

621.392

P. 248

РАСЧЕТ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

6Ф6.5

P24

УДК 62-52 (0.75.8)

А. В. Фатеев, А. А. Вавилов, Л. П. Смольников, А. И. Солодовников,
В. Б. Яковлев

Расчет автоматических систем. Под ред. **А. В. Фатеева**.

P24 Учебн. пособие для вузов. М., «Высш. школа», 1973.

336 с. с илл.

Перед загл. авт.: **А. В. Фатеев**, А. А. Вавилов, Л. П. Смольников, А. И. Солодовников, В. Б. Яковлев

В книге рассмотрены основные вопросы и даны методические указания по расчету различных систем автоматического управления (линейных и нелинейных, непрерывного и дискретного действия), приведены необходимые сведения по расчету параметров основных элементов таких систем. Изложение иллюстрировано конкретными примерами.

Предназначается для студентов высших технических учебных заведений, специализирующихся в области автоматики и телемеханики. Может быть полезна студентам других специальностей, изучающим теорию автоматического управления и регулирования, а также инженерно-техническим работникам, занимающимся проектированием и расчетом систем автоматического управления.

6Ф6.5

Рецензенты:

кафедра САУ Московского института радиотехники, электроники и автоматики; проф. К. В. Егоров (МЭИ)

Изложение теории автоматического управления и регулирования без конкретных примеров расчета систем не позволяет студентам хорошо усвоить основные теоретические положения и приобрести навык в практических расчетах. Опыт преподавания теории автоматического регулирования и управления для специальности 0606 в Ленинградском ордена Ленина электротехническом институте им. В. И. Ульянова (Ленина) показывает необходимость создания учебных пособий не только по теоретическим вопросам, но и по расчету автоматических систем.

Книга «Расчет автоматических систем» (руководство к курсовому расчету) состоит из одиннадцати глав. Методически наиболее целесообразным оказалось построить каждую главу в виде параграфов, освещающих отдельные вопросы расчета автоматических систем управления и регулирования, и дать конкретные примеры.

Главы I, II (за исключением § 2.3, оригинальный материал которого предоставлен Ф. Ф. Котченко и Н. В. Соловьевым) и VII написаны А. И. Солодовниковым (в подготовке гл. VII принимал участие В. А. Терехов); гл. III и VI — В. Б. Яковлевым; гл. IV — А. В. Фатеевым; гл. V — Л. П. Смольниковым; гл. VIII, IX и XI — А. А. Вавиловым; гл. X — В. А. Хохловым и Л. П. Смольниковым.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность коллективу кафедры автоматики и телемеханики МИРЭА (зав. кафедрой чл.-корр. АН СССР проф. Е. П. Попов) и проф. К. В. Егорову за ценные замечания, сделанные ими при рецензировании рукописи, а также коллективу кафедры автоматики и телемеханики ордена Ленина ЛЭТИ им. В. И. Ульянова (Ленина) за обсуждение ряда вопросов при подготовке рукописи к изданию. Авторы признательны доц. Д. Х. Имаеву за помощь при подготовке рукописи к изданию.

Все замечания по книге просим направлять в издательство «Высшая школа» по адресу: Москва, К-51, Неглинная ул., 29/14.

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ И СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 1.1. Предварительные замечания

Структурная схема системы автоматического управления. Автоматические системы применяются для управления самыми различными физическими процессами во всех областях техники, поэтому в таких системах могут использоваться весьма разнообразные по конструкции механические, гидравлические, электрические и другие устройства. При расчете систему автоматического управления целесообразно представить в виде структурной схемы, абстрагируясь от конструктивных особенностей ее составных элементов. Назначение отдельных звеньев автоматической системы наиболее полно отображается ее функциональной структурной схемой. Пример такой схемы системы автоматического регулирования одной величины показан на рис. 1.1. Управляющий, или задающий, элемент 1 вырабатывает управляющее воздействие $g(t)$, с которым регулируемая величина $x(t)$ на выходе регулируемого объекта 7 должна находиться в требуемой зависимости. Часто задающий элемент преобразует сигнал одной физической природы в сигнал другой природы, удобный для управления системой, т. е. является преобразователем.

Элемент главной обратной связи 8 ГОС служит для передачи информации о регулируемой величине на вход системы. Обычно этот элемент представляет собой измерительно-преобразовательное устройство. Если управляющая $g(t)$ и регулируемая $x(t)$ величины имеют одну физическую природу, то необходимости в таком элементе нет, за исключением случаев, когда требуется преобразовать масштаб регулируемой величины.

Чувствительный элемент 2 (или элемент сравнения), предназначенный для сравнения сигнала $x_{o.o.}$, несущего информацию о регулируемой величине, с управляющим воздействием $g(t)$ осуществляет операцию вычитания $g(t) - x_{o.o.}(t) = \Delta x(t)$. Полученный таким образом сигнал называется *сигналом рассогласования*. С помощью усилителя 4 и исполнительного элемента 5 этот сигнал усиливается и преобразуется в регулирующее воздействие $r(t)$, действующее на объект. Необходимое по техническим условиям качество регулирования системы обеспечивается корректирующими цепями. Эти цепи могут быть включены в систему последовательно с другими элементами, параллельно или встречно-параллельно, образуя в последнем случае местные обратные связи. В показанной на рис. 1.1 системе применены последовательная корректирующая цепь 3 и корректирующая цепь 6 типа местной обратной связи ОС. В зависимости от характеристик элемен-

тов требуемое качество регулирования может быть обеспечено и одной корректирующей цепью, а в некоторых простейших случаях — даже без применения таких цепей.

Комбинированные системы автоматического управления и регулирования содержат дополнительно так называемые компенсирующие цепи 9 и 10, которые формируют сигналы, позволяющие сделать ошибку регулирования независимой (инвариантной) от управляющего или возмущающего воздействий.

В состав системы автоматического управления могут входить также цифровые вычислительные устройства и специальные импульсные

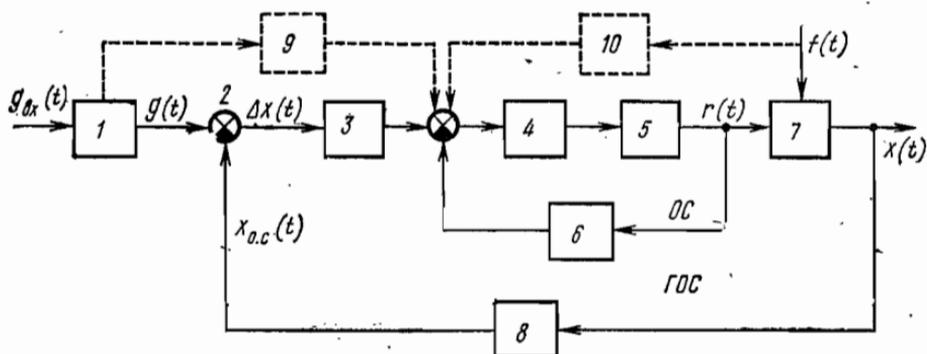


Рис. 1.1. Функциональная схема системы автоматического управления

элементы. В этом случае сигналы в системе передаются только в дискретные моменты времени. Такие системы называются *импульсными системами автоматического управления*.

Показателем точности системы автоматического управления является ошибка регулирования

$$e(t) = g(t) - x(t),$$

которая представляет собой расхождение между заданным и фактическим законом изменения регулируемой величины. Для показанной на рис. 1.1 системы автоматического управления величина этой ошибки совпадает с сигналом рассогласования $\Delta x(t)$, если элемент главной обратной связи является безынерционным и имеет коэффициент передачи, равный единице.

В разделении системы автоматического управления на рассмотренные элементы по функциональному признаку имеется некоторая условность. Например, часто в реальных системах функции исполнительного элемента выполняет выходной каскад усилителя, рассчитанный на требуемую мощность. В качестве чувствительных элементов в ряде случаев используются устройства, совмещающие операцию сравнения регулируемой и управляющей величин с операцией измерения регулируемой величины [1].

Существует целый класс систем автоматического управления, в которых главная обратная связь замыкается непосредственно с выхода исполнительного элемента. К этому классу относятся следящие

системы и замкнутые системы автоматического управления привода, в которых параметры объекта управления (возмущающее воздействие, момент инерции и др.) приводятся к исполнительному элементу.

Проектирование системы автоматического управления целесообразно начинать с составления функциональной структурной схемы и затем уже переходить к выбору и расчету параметров отдельных элементов. При выборе элементов необходимо исходить из требований, предъявляемых к системе, учитывая при этом ее назначение, надежность, экономичность, вид источников питания, внешние условия работы. Выбранные элементы должны быть согласованы по входным и выходным характеристикам.

Линеаризация уравнений элементов с нелинейными характеристиками. Чтобы рассчитать систему автоматического управления, необходимо математически описать все ее элементы. Подавляющее большинство реальных элементов имеют нелинейные характеристики и поэтому описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Для применения методов линейной теории при расчете автоматических систем нелинейные уравнения элементов заменяются приближенными линейными (линеаризованными) уравнениями.

При линеаризации уравнений предполагают, что отклонения координат системы от состояния равновесия малы. Составление линеаризованного уравнения элемента с нелинейными свойствами предполагает замену его статической характеристики в окрестности установившегося состояния линейной характеристикой.

Рассмотрим элемент (рис. 1.2, а), статическая характеристика которого является функцией двух переменных:

$$x_{\text{вых}} = F(x_{\text{вх}}, f). \quad (1.1)$$

На рис. 1.2, б приведена эта характеристика для f_1 , f_2 и f_3 .

Примером такого элемента может служить объект регулирования, к которому приложено регулирующее $x_{\text{вх}} = r$ и возмущающее f воздействия. Разлагая нелинейную функцию F в ряд Тейлора и ограничиваясь только первыми членами ряда, получим

$$x_{\text{вых}} \approx F(x_{\text{вх}0}, f_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_{\text{вх}}} \right)_0 \Delta x_{\text{вх}} + \left(\frac{\partial F}{\partial f} \right)_0 \Delta f. \quad (1.2)$$

В (1.2) индекс «0» указывает на то, что значения переменных соответствуют точке установившегося состояния.

При расчете динамики систем режим, соответствующий установившемуся (невозмущенному) состоянию, для упрощения записи уравнений исключают из рассмотрения. Для малых отклонений переменных линеаризованное уравнение статической характеристики элемента принимает вид

$$\Delta x_{\text{вых}} = F(x_{\text{вх}}, f) - F(x_{\text{вх}0}, f_0) = k_1 \Delta x_{\text{вх}} + k_2 \Delta f, \quad (1.3)$$

где

$$k_1 = (\partial F / \partial x_{\text{вх}})_0; \quad k_2 = (\partial F / \partial f)_0.$$

Коэффициенты уравнения k_1 и k_2 могут быть найдены также графически по соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{\Delta x_{\text{ВЫХ}}}{\Delta x_{\text{ВХ}}} = \operatorname{tg} \alpha \text{ при } f = \text{const}; \\ k_2 &= \frac{\Delta x_{\text{ВЫХ}}}{\Delta f} = \operatorname{tg} \beta \text{ при } x_{\text{ВХ}} = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Как видно, коэффициенты линеаризованного уравнения зависят от выбора рабочей точки на статической характеристике элемента.

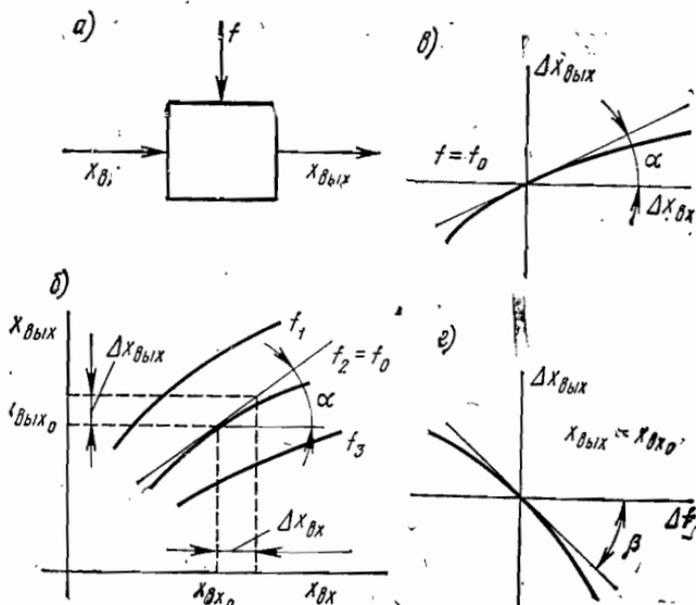


Рис. 1.2. Линеаризация статических характеристик нелинейного элемента

Запись уравнения в отклонениях эквивалентна переносу начала координат в точку установившегося состояния. В этом случае зависимости отклонений выходной величины элемента от входных воздействий имеют вид, показанный на рис. 1.2, в и г.

Получив линеаризованные статические характеристики элемента, можно составить для него линейное дифференциальное уравнение динамики. Линейное дифференциальное уравнение в отклонениях, описывающее, например, динамику элемента при двух входных воздействиях $x_{\text{ВХ}}$ и f и одной выходной координате $x_{\text{ВЫХ}}$, в общем случае имеет вид

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n \Delta x_{\text{ВЫХ}}}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} \Delta x_{\text{ВЫХ}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{d \Delta x_{\text{ВЫХ}}}{dt} + a_n \Delta x_{\text{ВЫХ}} = \\ = b_0 \frac{d^m \Delta x_{\text{ВХ}}}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} \Delta x_{\text{ВХ}}}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{d \Delta x_{\text{ВХ}}}{dt} + b_m \Delta x_{\text{ВХ}} + \\ + c_0 \frac{d^k \Delta f}{dt^k} + c_1 \frac{d^{k-1} \Delta f}{dt^{k-1}} + \dots + c_{k-1} \frac{d \Delta f}{dt} + c_k \Delta f. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для решения дифференциальных уравнений удобно использовать преобразование Лапласа, позволяющее свести задачу к алгебраическим действиям. Переходя к изображениям и опуская для упрощения записи (как это обычно принято) значок Δ , получим уравнение (1.5) в форме

$$D(s) X_{\text{ВЫХ}}(s) - H_{\text{ВЫХ}}(s) = N(s) X_{\text{ВХ}}(s) - H_{\text{ВХ}}(s) + M(s)F(s) - H_f(s), \quad (1.6)$$

где $X_{\text{ВЫХ}}(s)$, $X_{\text{ВХ}}(s)$ и $F(s)$ — изображения по Лапласу выходной величины и входных воздействий элемента; $D(s)$, $N(s)$ и $M(s)$ — полиномы, причем

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n;$$

$$N(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m;$$

$$M(s) = c_0 s^k + c_1 s^{k-1} + \dots + c_{k-1} s + c_k.$$

Полиномы $H_{\text{ВЫХ}}(s)$, $H_{\text{ВХ}}(s)$ и $H_f(s)$ определяются начальными условиями (при $t=0+\varepsilon$, где $\varepsilon \rightarrow 0$). Например,

$$H_{\text{ВЫХ}}(s) = a_0 x_{\text{ВЫХ}}(0) s^{n-1} + [a_0 x_{\text{ВЫХ}}^{(1)}(0) + a_1 x_{\text{ВЫХ}}(0)] s^{n-2} + \dots \\ \dots + [a_0 x_{\text{ВЫХ}}^{(n-1)}(0) + a_1 x_{\text{ВЫХ}}^{(n-2)}(0) + \dots + a_{n-1} x_{\text{ВЫХ}}(0)].$$

Здесь $x_{\text{ВЫХ}}(0)$, $x_{\text{ВЫХ}}^{(1)}$ и т. д. — начальные значения (при $t=0+\varepsilon$, где $\varepsilon \rightarrow 0$) выходной координаты элемента и ее производных.

Полиномы $H_{\text{ВХ}}(s)$ и $H_f(s)$ можно найти аналогично. При нулевых начальных условиях $H_{\text{ВЫХ}}(s)$, $H_{\text{ВХ}}(s)$ и $H_f(s)$ обращаются в нуль.

Решая уравнение (1.6) относительно $X(s)$ и принимая начальные условия нулевыми, получим

$$X_{\text{ВЫХ}}(s) = W(s) X_{\text{ВХ}}(s) + W_f(s) F(s). \quad (1.7)$$

В выражение (1.7) входят передаточные функции

$$W(s) = N(s)/D(s); \quad W_f(s) = M(s)/D(s), \quad (1.8)$$

которые определяют динамику элемента по отношению к каждому из входных воздействий. Передаточные функции могут быть выражены через изображения сигналов на входе и выходе элемента:

$$\left. \begin{aligned} W(s) &= \frac{X_{\text{ВЫХ}}(s)}{X_{\text{ВХ}}(s)} \text{ при } \Delta f = 0; \\ W_f(s) &= \frac{X_{\text{ВЫХ}}(s)}{F(s)} \text{ при } \Delta X_{\text{ВХ}} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

При расчете автоматических систем частотными методами используются частотные характеристики. Аналитические выражения для частотных характеристик формально можно получить из передаточных функций, производя замену s на $j\omega$. Связь параметров автоматической

системы с частотными характеристиками рассмотрена в гл. V.

Линеаризация уравнений при малых отклонениях координат допустима только в случае, если статические характеристики элементов имеют непрерывные и однозначные производные в окрестности точки установившегося режима. Пример статической характеристики элемента, допускающей линеаризацию при малых отклонениях, показан на рис. 1.3, а.

Нелинейные элементы, статические характеристики которых не имеют непрерывных и однозначных производных вблизи точки установившегося режима, нельзя линеаризовать, используя метод малых отклонений. К нелинеаризуемым нелинейностям относятся зазоры в механических передачах, гистерезис в магнитных цепях, зоны нечувствительности усилительных и исполнительных устройств и т. д. При проектировании автоматической системы необходимо стремиться к тому, чтобы такого рода нелинейности мало влияли на работу системы. Описание системы линейными уравнениями с нелинейностями возможно в тех случаях, когда участки линеаризуемых статических характеристик элементов существенно шире нелинеаризуемых участков. В этом случае уравнения элементов можно линеаризовать по усредненным статическим характеристикам (рис. 1.3, б, в). При несоблюдении указанного соотношения (рис. 1.3, г, д) в системе могут возникать автоколебания. Поведение систем с существенными нелинейностями необходимо анализировать методами нелинейной теории (см. гл. IX—XI).

Примеры, иллюстрирующие методику расчета параметров и составления линеаризованных уравнений элементов систем автоматического управления, приведены в § 1.2—1.5. В примерах рассматриваются элементы, наиболее распространенные в электрических и электромеханических системах.

В настоящее время в промышленности интенсивно внедряются системы автоматического регулирования различными технологическими процессами, содержащие специфические устройства и элементы. Динамические свойства объектов и элементов таких систем описаны в литературе [2—5].

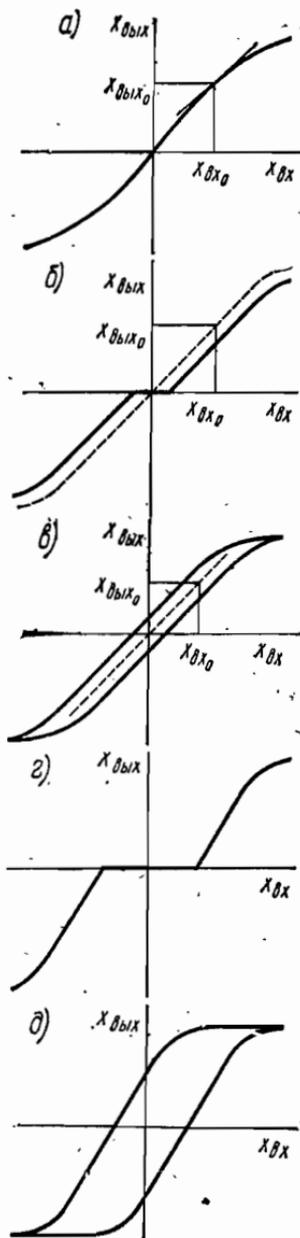


Рис. 1.3. Статические характеристики нелинейных элементов

§ 1.2. Расчет параметров и составление уравнения генератора постоянного тока

Генераторы постоянного тока применяются в автономных источниках питания с автоматическим регулированием напряжения или тока. Такие источники питания, в которых генератор является объектом управления, используются на самолетах, кораблях, в специальных испытательных стендах со стабилизацией или широким регулированием

напряжения или тока, в электромагнитных ускорителях частиц и т. д. Кроме того, генераторы постоянного тока применяются также в качестве усилительных элементов, например при управлении электродвигателями.

В системах автоматического регулирования, как правило, используются генераторы с независимым возбуждением (рис. 1.4). Принципиальная схема такого генератора, нагруженного на активно-индуктивную нагрузку $Z_H = r_H + jx_H$, показана на рис. 1.4, а.

Рассмотрим генератор в статическом режиме работы. В этом случае без учета реакции якоря напряжение на выходе генератора

$$U_V = e_r - r_{я.ц} I_{я} = cn\Phi_B - r_{я.ц} I_{я}, \quad (1.10)$$

где $e_r = cn\Phi_B$ — э. д. с. генератора, в; Φ_B — поток возбуждения генератора, вб; $c = pN/(a \cdot 60)$ — конструктивная постоянная [здесь

p — число пар полюсов; N — число активных проводников якоря (равно удвоенному числу витков обмотки якоря w); a — число пар параллельных ветвей обмотки якоря]; n — скорость вращения якоря, об/мин; $r_{я.ц}$ — сопротивление цепи якоря, ом; $I_{я}$ — ток якоря, а.

Конструктивная постоянная генератора может быть найдена по его номинальным данным:

$$c = \frac{e_{г.ном}}{\Phi_{в.ном} n_{ном}} = \frac{U_{г.ном} + I_{н.ном} r_{я.ц}}{\Phi_{в.ном} n_{ном}}. \quad (1.11)$$

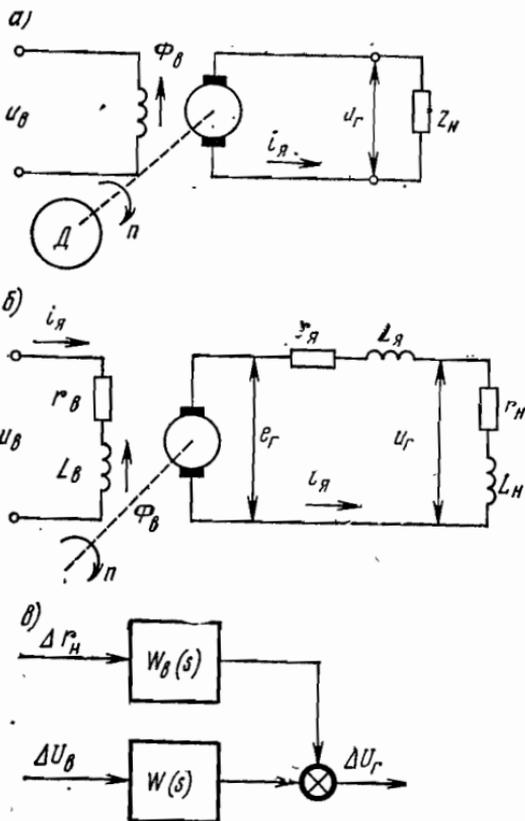


Рис. 1.4. Генератор постоянного тока с независимым возбуждением

Из уравнения (1.10) видно, что напряжение генератора падает при увеличении тока нагрузки. Уровнем напряжения генератора можно управлять с наименьшей затратой мощности путем изменения величины магнитного потока возбуждения Φ_B , устанавливая соответствующие значения напряжения или тока возбуждения.

Поток возбуждения генератора Φ_B является нелинейной функцией от магнитодвижущей силы F (м. д. с.). В технических данных генератора эта зависимость обычно приводится в виде кривой намагничивания на один полюс:

$$\Phi_B = f(F) = f(a\omega_{B1}), \quad (1.12)$$

где $F = a\omega_{B1}$ — м. д. с. одного полюса, a —

На рис. 1.5, а показана кривая намагничивания без учета влияния гистерезиса.

По уравнению (1.10), используя кривую намагничивания, можно построить нагрузочные характеристики генератора (рис. 1.5, б). Эти характеристики позволяют определить диапазон изменения тока возбуждения i_B , необходимый для поддержания заданного уровня напряжения генератора при изменении тока нагрузки. Найденные

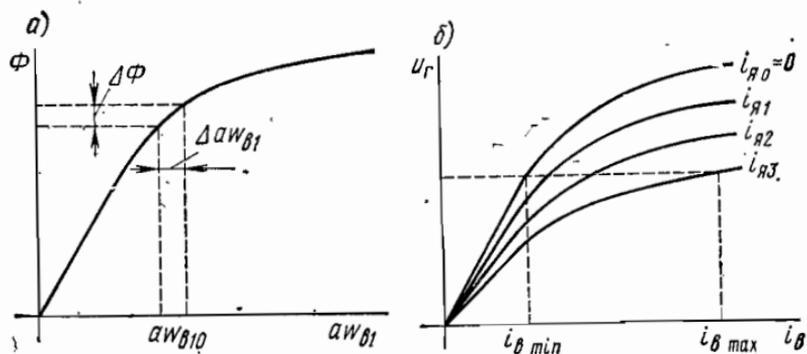


Рис. 1.5. Кривая намагничивания и нагрузочные характеристики генератора с независимым возбуждением

значения $i_{B \min}$ и $i_{B \max}$ служат исходными данными для расчета исполнительного элемента автоматической системы, в которой генератор является объектом управления.

Из рассмотренных характеристик видно, что генератор является нелинейным звеном, а следовательно, его динамика описывается нелинейным дифференциальным уравнением.

Составим приближенное линейное уравнение динамики генератора для случая $n = \text{const}$, полагая входной (управляющей) величиной напряжение возбуждения u_B , а выходной — напряжение на нагрузке u_T . Для упрощения задачи не будем учитывать влияние гистерезиса, вихревых токов и реакции якоря и предположим, что поток рассеяния изменяется по одному закону с потоком возбуждения Φ_B . При составлении уравнения генератора воспользуемся эквивалентной схемой (см. рис. 1.4, б).

Проведя линеаризацию нелинейной зависимости (1.12) в рабочей точке, получим

$$\Delta\Phi_B = c_{r1}\Delta aw_{B1} = c_{r1}\omega_{B1}\Delta I_B$$

или в изображениях*

$$\Phi_B(s) = c_{r1}\omega_{B1}I_B(s), \quad (1.13)$$

где $c_{r1} = \left[\frac{\partial f(aw_{B1})}{\partial (aw_{B1})} \right]_{aw_{B10}} \approx \left(\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta aw_{B1}} \right)_{aw_{B10}}$ — коэффициент, определяемый по зависимости $\Phi_B = f(aw_{B1})$, заданной в аналитической или графической форме; ω_{B1} — число витков обмотки возбуждения на полюс.

Запишем уравнение в изображениях для цепи возбуждения (при последовательном соединении обмоток полюсов):

$$U_B(s) = r_B I_B(s) + 2p\sigma_r \omega_{B1} s \Phi_B(s) \quad (1.14)$$

или, учитывая (1.13),

$$U_B(s) = r_B I_B(s) + L_B s I_B(s), \quad (1.15)$$

где r_B — сопротивление цепи возбуждения, ом; $L_B = 2p\sigma_r c_{r1} \omega_{B1}^2$ — индуктивность цепи возбуждения, гн; $\sigma = 1,15 \div 1,2$ — коэффициент, учитывающий рассеяние магнитного потока генератора.

Используя зависимость (1.13), найдем изображение э. д. с. генератора:

$$E_r(s) = cn\Phi_B(s) = c_r c_{r1} \omega_{B1} I_B(s), \quad (1.16)$$

где $c_r = cn = \frac{pN}{a \cdot 60} n$.

Для цепи якоря и нагрузки можно записать уравнения:

$$E_r(s) = (r_{я.н} + L_{я} s) I_{я}(s) + U_r(s); \quad (1.17)$$

$$U_r(s) = (r_n + L_n s) I_{я}(s), \quad (1.18)$$

в которых $I_{я}(s)$ — изображение приращения тока нагрузки в цепи якоря; $U_r(s)$ — изображение приращения напряжения генератора; $L_{я}^{**}$ — индуктивность обмотки якоря; $r_{я}$ — сопротивление нагрузки; L_n — индуктивность нагрузки.

Решив совместно уравнения (1.15) ÷ (1.18), получим уравнение динамики генератора, записанное в изображениях:

$$(T_B s + 1)(T_{я.н} s + 1) U_r(s) = \frac{r_n}{r_{я.н} + r_n} k_r (T_n s + 1) U_B(s), \quad (1.19)$$

* Значок Δ в последующих записях уравнений в изображениях опускается.

** Приближенно величину $L_{я}$ можно рассчитать по формуле [9]

$$L_{я} = \frac{30}{\pi} \beta \frac{U_{г.ном}}{p n_{ном} I_{я.ном}};$$

для генераторов с компенсационной (стабилизирующей) обмоткой $\beta = 0,25 \div 0,4$.

где $T_n = L_n/r_n$ — постоянная времени цепи возбуждения *сек*;

$T_{я.н} = (L_n + L_{я.ц})/(r_{я.ц} + r_n)$ — постоянная времени цепи якоря, *сек*;

$T_n = L_n/r_n$ — постоянная времени цепи нагрузки, *сек*;

$k_p = c_r c_{r1} \omega_{в1}/r_n$ — коэффициент передачи генератора.

При активной нагрузке $z_n = r_n$ значение $T_n = 0$. Часто при этом величина $T_{я.н} = L_{я.ц}/(r_{я.ц} + r_n)$ мала и ею можно пренебречь, после чего уравнение генератора в изображениях принимает следующий вид:

$$(T_n s + 1) U_r(s) = \frac{r_n}{r_{я.ц} \Phi r_n} k_p U_B(s). \quad (1.20)$$

Составим уравнение генератора для случая активной нагрузки, предположив, что сопротивление нагрузки изменяется скачком на величину Δr_n . При этом для цепи нагрузки можно записать

$$u_{r0} + \Delta u_r = (r_{n0} + \Delta r_n) (i_{я0} + \Delta i_n), \quad (1.21)$$

где u_{r0} , r_{n0} — напряжение генератора и сопротивление нагрузки до возмущения при $t = 0 - |\varepsilon|$ ($\varepsilon \rightarrow 0$); $i_{я0} = u_{r0}/r_{n0}$ — ток нагрузки до возмущения при $t = 0 - |\varepsilon|$ ($\varepsilon \rightarrow 0$); $\Delta r_n = r_n - r_{n0}$ — приращение сопротивления нагрузки после возмущения при $t = |\varepsilon|$ ($\varepsilon \rightarrow 0$).

Переходя к изображениям, для приращений величин получим

$$U_r(s) = r_n I_n(s) + \frac{u_{r0}}{r_{n0}} R_n(s), \quad (1.22)$$

или

$$U_r(s) = E_r(s) - r_{я.ц} I_n(s). \quad (1.23)$$

Из (1.20) найдем уравнение для э. д. с. генератора, приняв $r_n = \infty$:

$$(T_n s + 1) E_r(s) = k_p U_B(s). \quad (1.24)$$

Решив совместно (1.22) ÷ (1.24), запишем уравнение для напряжения генератора с учетом воздействия со стороны нагрузки:

$$(T_n s + 1) U_r(s) = \frac{r_n}{r_{я.ц} \Phi r_n} k_p U_B(s) + \frac{r_{я.ц}}{r_{я.ц} \Phi r_n} \cdot \frac{u_{r0}}{r_{n0}} (T_n s + 1) R_n(s). \quad (1.25)$$

Для генератора, используемого в качестве источника напряжения, передаточные функции по управляющему и возмущающему воздействиям определяются из соотношений:

$$W(s) = U_r(s)/U_B(s); \quad W_B(s) = U_r(s)/R_n(s). \quad (1.26)$$

На основании (1.25) и (1.26) генератор можно представить в виде структурной схемы (см. рис. 1.4, в).

Рассмотрим динамику генератора при использовании его в качестве источника тока, например, для питания электромагнита. В этом случае нагрузка характеризуется большой индуктивностью. Составим линейное уравнение динамики генератора, если выходной величиной

является ток, а возмущающим воздействием — изменение активного сопротивления нагрузки.

Для возмущенного состояния цепи якоря генератора (см. рис. 1.4, б) можно записать

$$e_{г0} + \Delta e_{г} = (r_{я.ц} + r_{н0} + \Delta r_{н}) (i_{я0} + \Delta i_{я}) + (L_{я} + L_{н}) \frac{d\Delta i_{я}}{dt} \quad (1.27)$$

или, переходя к изображениям,

$$E_{г}(s) = i_{я0} R_{н}(s) + (r_{я.ц} + r_{н} + L_{я}s + L_{н}s) I_{я}(s). \quad (1.28)$$

Решив (1.28) совместно с (1.24), получим уравнение для тока генератора:

$$(T_{в}s + 1)(T_{я.н}s + 1) I_{я}(s) = \frac{k_{г}}{r_{я.ц} + r_{н}} U_{в}(s) - (T_{в}'s + 1) \frac{i_{я0}}{r_{я.ц} + r_{н}} R_{н}(s), \quad (1.29)$$

где $i_{я0} = u_{г0}/r_{н0}$ — ток нагрузки в цепи якоря генератора до возмущения при $t = 0 - \varepsilon$ ($\varepsilon \rightarrow 0$); $r_{н} = r_{н0} + \Delta r_{н}$ — активное сопротивление нагрузки после возмущения при $t = 0 + \varepsilon$ ($\varepsilon \rightarrow 0$); $T_{я.н} = (L_{я} + L_{н})/(r_{я.ц} + r_{н})$ — постоянная времени цепи якоря после возмущения.

Из уравнения (1.29) можно найти передаточные функции генератора по управляющему и возмущающему воздействиям:

$$W(s) = I_{я}(s)/U_{в}(s); \quad W_{в}(s) = I_{я}(s)/R_{н}(s). \quad (1.30)$$

Примеры составления уравнений генератора с учетом реакции якоря и влияния компенсационных обмоток рассмотрены в литературе [6].

Технические данные некоторых типов генераторов постоянного тока серии П для $n_{ном} = 1450$ об/мин приведены в табл. 1.1 [7], где приняты следующие обозначения: $U_{ном}$, $I_{ном}$, $P_{ном}$ — номинальные данные генератора по напряжению, току и мощности; P_1 — потребляемая мощность на валу генератора в номинальном режиме; $r_{я}$, $r_{д.п}$ — сопротивления обмоток якоря и дополнительных полюсов; $r_{ст}$ — сопротивление последовательной (стабилизирующей) обмотки; $\omega_{в1}$ и $r_{в}$ — число витков (на полюс) и сопротивление (общее) обмотки возбуждения.

Сопротивления обмоток приведены для холодного состояния при температуре 15°C . В расчетах величины сопротивлений обмоток берутся для нагретого состояния [10]:

$$r_{нагр} = \alpha r, \quad (1.31)$$

где $\alpha = 1 + 0,004 \tau$ (τ — перегрев обмотки по сравнению с температурой 15°C); в приближенных расчетах принимают $\alpha \approx 1,2$.

Обмотки дополнительных полюсов генератора исключают искрение между щетками и коллектором, а последовательная обмотка

Таблица 1.1

ТЕХНИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ ГЕНЕРАТОРОВ ПОСТОЯННОГО ТОКА СЕРИИ П

Тип генератора	$U_{\text{НОМ}}^{\text{в}}$	$P_{\text{НОМ}}^{\text{квт}}$	$I_{\text{НОМ}}^{\text{д}}$	$P_1^{\text{квт}}$	$2p$	$2c$	$\omega_{\text{Я}}$	$r_{\text{Я}}^{\text{Л.П.}}$ ом	$r_{\text{ст. ом}}$	$\omega_{\text{Я}}$ (на полюс)	$r_{\text{в. ом}}$
П-21	115	0,37	3,2	0,53	2	2	1080	5,56	0,96	2500	320
	230	0,37	1,6	0,53							
П-22	115	0,6	5,2	0,8	2	2	630	2,3	0,6	1600	152
	230	0,6	2,6	0,8							
П-31	115	1,0	8,7	1,3	2	2	576	1,56	0,34	2400	188
	230	1,0	4,4	1,3							
П-32	115	1,5	13,1	1,8	2	2	360	0,76	0,17	1800	122
	230	1,5	6,5	1,8							
П-41	115	2,7	23,4	3,6	4	2	351	0,558	0,136	900	68,8
	230	2,7	11,7	3,6							
П-42	115	3,2	27,8	4,1	4	2	270	0,39	0,0534	750	50
	230	3,2	13,9	4,1							
П-51	115	5,0	43,4	6,2	4	2	217	0,191	0,03	700	32
	230	5,0	21,7	6,2							
П-52	115	6,5	56,4	7,9	4	2	186	0,15	0,0096	600	28,3
	230	6,5	28,2	7,9							
П-61	115	9,0	78,0	10,7	4	2	186	0,111	0,0088	800	35,0
	230	9,0	39,1	10,7							
П-62	115	11,5	100	13,6	4	2	124	0,061	0,009	650	25
	230	11,5	50	13,6							
П-71	230	16	69,5	21,8	4	2	297	0,30	0,0115	950	43
	П-72	230	21	91,0							
П-81	230	27	117	32,0	4	2	222	0,1445	0,00475	1350	69,5
	П-82	230	35	152							
П-91	230	50	217	57,5	4	2	145	0,0504	0,00304	870	35,8
	П-92	230	70	304							
П-101	230	90	391	110	4	2	93	0,0187	0,00072	950*	37,8
	П-102	230	110	478							
П-111	230	150	653	167	4	4	126	0,00963	0,00077	850	28
	П-112	230	190	826							

* Обмотки главных полюсов соединены параллельно.

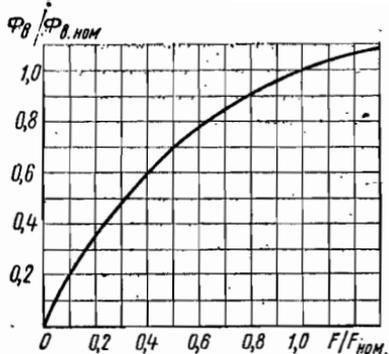


Рис. 1.6. Универсальная кривая намагничивания генераторов постоянного тока серии П

уменьшает реакцию якоря. В расчетах по рассмотренной методике сопротивление этих обмоток учитывается при подсчете величины

$$r_{\text{я.ц}} = r_{\text{я}} + r_{\text{д.п}} + r_{\text{ст}} \quad (1.32)$$

Номинальный ток возбуждения генератора, если он не указан в справочных данных, определяется приближенно:

$$I_{\text{в.ном}} \approx 0,8 U_{\text{Г.ном}} / (\alpha r_{\text{в}}) \quad (1.33)$$

На рис. 1.6 показана универсальная кривая намагничивания генераторов указанной серии, используемая для ориентировочных расчетов. Сведения о генераторах, выпускаемых промышленностью, приведены в справочнике [8].

Пример 1.1. Определим приближенную передаточную функцию генератора постоянного тока с независимым возбуждением типа П-32 ($U_{\text{ном}} = 230 \text{ в}$) при $n = n_{\text{ном}}$ по данным табл. 1.1. Нагрузку считаем активной, индуктивностью обмотки якоря пренебрегаем. Начальный поток возбуждения полагаем номинальным, внутреннее сопротивление источника возбуждения не учитываем.

Из таблицы имеем: $U_{\text{ном}} = U_{\text{Г.ном}} = 230 \text{ в}$; $I_{\text{ном}} = I_{\text{я.ном}} = 6,5 \text{ а}$; $n_{\text{ном}} = 1450 \text{ об/мин}$; $p = 1$; $a = 1$; $N = 2w_{\text{н}} = 1440$; $r_{\text{я.ц}} = 3,75 \text{ ом}$; $w_{\text{в1}} = 3400$; $r_{\text{в}} = 480 \text{ ом}$.

Находим конструктивную постоянную:

$$c = \frac{pN}{a \cdot 60} = \frac{1 \cdot 1440}{1 \cdot 60} = 24,$$

откуда

$$\sigma_{\Gamma} = c n_{\text{ном}} = 24 \cdot 1450 = 3,48 \cdot 10^4.$$

На основании (1.11) номинальный поток возбуждения

$$\Phi_{\text{в.ном}} = \frac{U_{\text{Г.ном}} \diamond I_{\text{я.ном}} \alpha r_{\text{я.ц}}}{c n_{\text{ном}}} = \frac{230 \diamond 6,5 \cdot 1,2 \cdot 3,75}{3,48 \cdot 10^4} = 7,45 \cdot 10^{-3} \text{ вб}.$$

Определяем номинальные ток возбуждения и м. д. с. на полюс:

$$I_{\text{в.ном}} \approx \frac{0,8 U_{\text{Г.ном}}}{\alpha r_{\text{в}}} = \frac{0,8 \cdot 230}{1,2 \cdot 480} = 0,32 \text{ а};$$

$$F_{\text{ном}} = \alpha w_{\text{в1}} I_{\text{в.ном}} = I_{\text{в.ном}} w_{\text{в1}} = 0,32 \cdot 3400 = 1080 \text{ а}.$$

По найденным значениям $\Phi_{\text{в.ном}}$ и $F_{\text{ном}}$ получаем масштабные коэффициенты по осям универсальной кривой намагничивания (см. рис. 1.6):

$$m_{\Phi} = 7,45 \cdot 10^{-3}; \quad m_F = 1080.$$

По кривой намагничивания при $\Phi_{\text{в}} = \Phi_{\text{в.ном}}$ находим

$$c_{\Gamma 1} = \frac{m_{\Phi}}{m_F} \left(\frac{\Delta \bar{\Phi}_{\text{в}}}{\Delta \alpha w_{\text{в1}}} \right) \approx \frac{7,45 \cdot 10^{-3} \cdot 0,04}{1080 \cdot 0,1} = 2,7 \cdot 10^{-6}.$$

Принимая $\sigma_r = 1,2$, определяем

$$L_B = 2\rho\sigma_r c_{r1} \omega_{B1}^2 = 2 \cdot 1,2 \cdot 2,7 \cdot 10^{-6} \cdot 3400^2 = 75 \text{ гн};$$

$$T_B = \frac{L_B}{\alpha r_B} = \frac{75}{1,2 \cdot 480} = 0,13 \text{ сек.}$$

Коэффициент передачи генератора

$$k_r = \frac{c_r c_{r1} \omega_{B1}}{\alpha r_B} = \frac{3,48 \cdot 10^4 \cdot 2,7 \cdot 10^{-6} \cdot 3400}{1,2 \cdot 480} = 0,55.$$

На основании (1.20) и (1.26) передаточная функция генератора

$$W(s) = \frac{U_r(s)}{U_B(s)} = \frac{r_H}{\alpha r_{я.ц} + r_H} \cdot \frac{k_r}{T_B s + 1} = \frac{r_H}{\alpha r_{я.ц} + r_H} \cdot \frac{0,55}{0,13s + 1}.$$

§ 1.3. Расчет параметров и составление уравнения двигателя постоянного тока

определение мт-ой модели двигателя

Наибольшее использование в системах автоматического управления, работающих на постоянном токе, имеют двигатели с независимым возбуждением. Такие двигатели, управляемые путем изменения напряжения на якоре, позволяют получить широкий диапазон регулирования скорости вращения, благодаря чему широко применяются в качестве исполнительных элементов в регулируемом приводе многих производственных механизмов и в силовых следящих системах.

Принципиальная схема двигателя постоянного тока с независимым возбуждением показана на рис. 1.7. Рассмотрим статический режим работы двигателя. В этом случае без учета реакции якоря для двигателя можно записать:

$$u_d = e_d + r_{я.ц} i_{я}; \quad (1.34)$$

$$e_d = c_e \Phi_B n; \quad (1.35)$$

$$M = c_m \Phi_B i_{я}. \quad (1.36)$$

В уравнениях (1.34)—(1.36) приняты следующие обозначения: u_d — напряжение на якоре двигателя, в; $i_{я}$ — ток якоря, а; $r_{я.ц}$ — сопротивление цепи якоря, ом; e_d — э. д. с. вращения, в; Φ_B — поток возбуждения, вб; n — скорость вращения двигателя, об/мин; M — момент, развиваемый двигателем, н·м; $c_e = \frac{pN}{a \cdot 60}$; $c_m = \frac{pN}{2\pi a}$ — кон-

структивные постоянные [здесь p — число пар полюсов двигателя; N — число активных проводников якоря (равно удвоенному числу витков обмотки якоря $\omega_{я}$); a — число пар параллельных ветвей обмотки якоря].

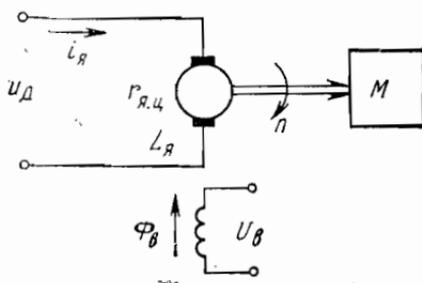


Рис. 1.7. Двигатель постоянного тока с независимым возбуждением

В установленном режиме момент двигателя уравнивается приведенным к валу статическим моментом сопротивления рабочего механизма M_c , т. е. в этом случае $M = M_c$.

Следует обратить внимание на соотношение

$$c_e/c_M = 2\pi/60 = 0,105, \quad (1.37)$$

которое может использоваться в расчетах.

Из (1.34) ÷ (1.36) получаем уравнение механической характеристики двигателя в виде

$$n = \frac{u_d}{c_e \Phi_B} - \frac{r_{я.ц} i_{я}}{c_e \Phi_B}, \quad (1.38)$$

или

$$n = \frac{u_d}{c_e \Phi_B} - \frac{r_{я.ц} M}{c_e c_M \Phi_B^2}. \quad (1.39)$$

В формулах (1.38) и (1.39) в правой части первый член соответствует скорости вращения при идеальном холостом ходе ($M = 0, i_{я} = 0$), а второй — снижению скорости вращения двигателя под нагрузкой.

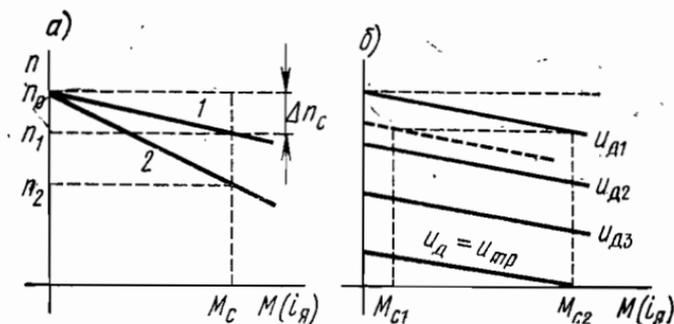


Рис. 1.8. Механические характеристики двигателя с независимым возбуждением

Механическая характеристика двигателя при $\Phi_B = \text{const}$ и $u_d = \text{const}$ выражается уравнением прямой (рис. 1.8, а, прямая 1). При увеличении сопротивления якорной цепи жесткость механической характеристики двигателя ухудшается (прямая 2).

Конструктивные постоянные двигателя можно определить по его номинальным данным. Из уравнения (1.38)

$$c_e = \frac{U_{д.ном} - r_{я.ц} I_{я.ном}}{\Phi_{в.ном} n_{ном}}. \quad (1.40)$$

Для определения c_e можно воспользоваться также формулой

$$c_e = U_{д.ном} / \Phi_{в.ном} n_0, \quad (1.41)$$

где n_0 — скорость вращения при идеальном холостом ходе, определенная по механической характеристике при $u_d = U_{д.ном}$.

Из уравнения (1.36)

$$c_M = M_{\text{ном}} / \Phi_{\text{в.ном}} I_{\text{я.ном}} \quad (1.42)$$

Момент $M_{\text{ном}}$ можно определить по механической характеристике при $n = n_{\text{ном}}$ или по формуле

$$M_{\text{ном}} = 9,55 \frac{P_{\text{ном}}}{n_{\text{ном}}}, \quad (1.43)$$

где $P_{\text{ном}}$ — номинальная мощность на валу двигателя, *вт*.

Формулы (1.40) ÷ (1.42) используются для приближенного вычисления постоянных c_e и c_M , так как номинальные данные для двигателей представляют собой усредненные величины.

Рассмотрим регулирование скорости вращения двигателя путем изменения напряжения на якоре.

Механические характеристики двигателя, построенные по уравнению (1.39) при разных напряжениях на якоре, изображены на рис. 1.8, б. При уменьшении напряжения механическая характеристика смещается параллельно вниз пропорционально величине напряжения. Статические характеристики позволяют определить диапазон изменения напряжения на якоре двигателя, требуемый для поддержания заданной скорости вращения при заданных пределах изменения статического момента M_c . Соответствующие значения тока якоря можно найти, используя соотношение (1.36). График, приведенный на рис. 1.8, б, позволяет также определить зону нечувствительности двигателя, определяемую напряжением трогания ($u_d = U_{\text{д.тр}}$). Это напряжение соответствует началу вращения двигателя и зависит от момента сопротивления на валу M_c . Величина $U_{\text{д.тр}}$ может быть найдена также из (1.38) или (1.39) при $n = 0$ и $M = M_c$.

Составим уравнение динамики двигателя в отклонениях при $\Phi_{\text{в}} = \text{const}$, не учитывая для упрощения реакцию якоря. За входную величину примем напряжение на якоре, а за выходную — скорость вращения.

Рассмотрим случай, когда момент сопротивления на валу двигателя не зависит от скорости вращения. При этом введем обозначения:

$$c_e \Phi_{\text{в}} = c_{eд}; \quad c_M \Phi_{\text{в}} = c_{Mд}. \quad (1.44)$$

Для цепи якоря, учитывая, что $e_d = c_{eд} n$, при нулевых начальных условиях запишем

$$U_d(s) = c_{eд} n(s) + r_{\text{я.ц}} I_{\text{я}}(s) + L_{\text{я}} s I_{\text{я}}(s)^*. \quad (1.45)$$

Заменив в формуле для динамического момента двигателя $M_{\text{дин}} = J d\omega_d / dt$ угловую скорость ω_d (*рад/сек*) на n (*об/мин*), получим в изображениях уравнение равновесия моментов:

$$M(s) = \frac{1}{9,55} J s n(s) + M_c(s), \quad (1.46)$$

* Здесь и далее изображения уравнений записываются для малых приращений переменных.

где $J = J_{\text{д}} + J_{\text{н.пр}}$ — момент инерции на валу двигателя, $\text{кг}\cdot\text{м}^2$.
 Здесь $J_{\text{д}}$ — момент инерции якоря двигателя; $J_{\text{н.пр}} = k_p^2 J_{\text{н}}$ — момент инерции нагрузки, приведенный к валу двигателя (k_p — коэффициент передачи редуктора, соединяющего вал двигателя с нагрузкой).

Используем зависимость

$$M(s) = c_{\text{м.д}} I_{\text{я}}(s). \quad (1.47)$$

После совместного решения (1.45) ÷ (1.47) запишем уравнение двигателя:

$$(T_{\text{я}} T_{\text{эм}} s^2 + T_{\text{эм}} s + 1) n(s) = k_{\text{д}} U_{\text{д}}(s) - (T_{\text{я}} s + 1) k_{\text{д.в}} M_{\text{с}}(s), \quad (1.48)$$

где $T_{\text{я}} = L_{\text{я}}/r_{\text{я.ц}}$ — постоянная времени цепи якоря, сек ;

$T_{\text{эм}} = \frac{1}{9,55} J \frac{r_{\text{я.ц}}}{c_{\text{ед}} c_{\text{м.д}}}$ — электромеханическая постоянная времени, сек ;

$k_{\text{д}} = 1/c_{\text{ед}}$ — коэффициент передачи двигателя по управляющему воздействию, $\text{об}/(\text{мин}\cdot\text{в})$; $k_{\text{д.в}} = r_{\text{я.ц}}/(c_{\text{ед}} c_{\text{м.д}})$ — коэффициент передачи двигателя по возмущающему воздействию, $\text{об}/(\text{н}\cdot\text{м}\cdot\text{мин})$.

Вычислить индуктивность якоря $L_{\text{я}}$ сложно, поэтому на практике ее определяют экспериментально. Приблизительно [9] величина $L_{\text{я}}$ (гн)

$$L_{\text{я}} \approx \frac{30}{\pi} \beta \frac{U_{\text{д.ном}}}{\rho n_{\text{ном}} I_{\text{я.ном}}}, \quad (1.49)$$

где $\beta = 0,25 \div 0,6$ (нижнее значение принимается для компенсированных машин, верхнее — для некомпенсированных).

Для определения $T_{\text{эм}}$ имеется также соотношение

$$T_{\text{эм}} = \frac{1}{9,55} J \frac{\Delta n_{\text{с}}}{M_{\text{ном}}}, \quad (1.50)$$

где $\Delta n_{\text{с}} = \frac{r_{\text{я.ц}} I_{\text{я.ном}}}{c_{\text{ед}}}$ — падение скорости двигателя в номинальном режиме.

Анализируя уравнение (1.48), можно установить, что при $T_{\text{эм}} \leq 4T_{\text{я}}$ двигатель обладает колебательными свойствами, которые являются нежелательными. Поэтому при конструировании двигателей стремятся выполнить соотношение $T_{\text{эм}} > 4T_{\text{я}}$. В этом случае уравнение динамики двигателя можно записать в виде

$$(T_1 s + 1) (T_2 s + 1) n(s) = k_{\text{д}} U_{\text{д}}(s) - (T_{\text{я}} s + 1) k_{\text{д.в}} M_{\text{с}}(s), \quad (1.51)$$

где

$$T_1 = \frac{T_{\text{эм}}}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4 \frac{T_{\text{я}}}{T_{\text{эм}}}} \right);$$

$$T_2 = \frac{T_{\text{эм}}}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4 \frac{T_{\text{я}}}{T_{\text{эм}}}} \right).$$

В случае, когда $T_{\text{эм}} \gg T_{\text{я}}$, пренебрегая величиной $T_{\text{я}}$, уравнение двигателя можно свести к приближенному уравнению первого порядка.

Передаточные функции двигателя по управляющему и возмущающему воздействиям равны соответственно:

$$W(s) = n(s)/U_d(s); \quad W_B(s) = n(s)/M_c(s). \quad (1.52)$$

Часто за выходную величину двигателя принимается угол поворота вала α_d (обычно измеряемый в радианах). При этом, учитывая, что $\alpha_d(s) = \frac{1}{s} \omega_d(s)$, а $\omega_d \left[\frac{\text{рад}}{\text{сек}} \right] = \frac{1}{9,55} n \left[\frac{\text{об}}{\text{мин}} \right]$, получаем вместо (1.52) другие передаточные функции двигателя:

$$\left. \begin{aligned} W_\alpha(s) &= \frac{\alpha_d(s)}{U_d(s)} = \frac{1}{9,55} \cdot \frac{1}{s} W(s); \\ W_{\alpha B}(s) &= \frac{\alpha_d(s)}{M_c(s)} = \frac{1}{9,55} \cdot \frac{1}{s} W_B(s). \end{aligned} \right\} \quad (1.53)$$

Составим уравнение динамики двигателя для случая, когда статический момент на валу зависит от скорости вращения. Линейная зависимость такого рода существует, например, если нагрузкой двигателя является генератор постоянного тока с независимым возбуждением, замкнутый на постоянное сопротивление. В механизмах с так называемым вентиляторным моментом статический момент на валу зависит от квадрата скорости вращения.

Для малых изменений скорости вращения в общем случае величина приращения статического момента

$$\Delta M_c(t, n) = \Delta M_{c0}(t) + k_c \Delta n(t), \quad (1.54)$$

где M_{c0} — постоянная составляющая момента сопротивления; $k_c = \left[\frac{\partial M_c(t, n)}{\partial n} \right] \Delta n$ — коэффициент, получаемый при линеаризации зависимости $M_c(t, n)$ в заданной точке.

С учетом зависимости (1.54) уравнение двигателя (1.48) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \left(\frac{T_\gamma T_{\text{вм}}}{1 + k_B k_c} s^2 + \frac{k_B k_c T_\gamma + T_{\text{вм}}}{1 + k_B k_c} s + 1 \right) n(s) = \\ & = \frac{k_d}{1 + k_B k_c} U_d(s) - \frac{k_B}{1 + k_B k_c} (T_\gamma s + 1) M_{c0}(s). \end{aligned} \quad (1.55)$$

Примеры составления уравнений динамики двигателя для различных случаев рассмотрены в [6], [10]. Технические характеристики некоторых двигателей постоянного тока приведены в табл. 1.2, 1.3, 1.4, составленных по данным [8], [11], [12], [19].

В таблицах приняты следующие обозначения: $U_{\text{ном}}$, $I_{\text{ном}}$, $P_{\text{ном}}$ и $\eta_{\text{ном}}$ — номинальные данные двигателя по напряжению, току, мощности и к. п. д. ($I_{\text{ном}} = I_{\gamma\text{-ном}} + I_{\text{в.ном}}$); r_γ и $r_{\text{д.п}}$ — сопротивление обмоток якоря и дополнительных полюсов; $r_{\text{ст}}$ — сопротивление последовательной (стабилизирующей) обмотки; GD^2 — маховой момент двигателя; $M_{\text{п}}$ — пусковой момент.

ТЕХНИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ ДВИГАТЕЛЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА СЕРИИ П,

 $n_{\text{НОМ}} = 1500 \text{ об/мин}$

Тип двигателя	$U_{\text{НОМ}}, \text{в}$	$P_{\text{НОМ}}, \text{квт}$	$I_{\text{НОМ}}, \text{а}$	$\eta_{\text{НОМ}}, \%$	$2p$	$2a$	$\omega_{\text{я}}$	$r_{\text{я}} + r_{\text{л. п.}} \cdot \frac{p}{\omega_{\text{я}}}$ (при 15°С), ом	$r_{\text{ст}}, \text{ом}$	$\omega_{\text{в1}}$ (на полюс)	$r_{\text{в}} \text{ в общем}$ (при 15°С), ом	$GD^2, \text{кг}\cdot\text{м}^2$
П-11	110 220	0,3	4,3 2,06	63,5 66,0	2	2	826 1652	5,14 22,6	0,236 0,88	2700 4000	300 670	0,012
П-12	110 220	0,45	5,2 2,88	78,5 71,0	2	2	574 1176	2,97 11,75	0,125 0,25	1850 4000	158 785	0,015
П-21	110 220	0,7	8,9 4,4	72,0 72,0	2	2	558 1188	1,52 6,59	0,063 0,24	2000 4800	107 600	0,045
✓ П-22	110 220	1,0	11,7 5,9	77,0 77,0	2	2	414 864	0,96 4,17	0,062 0,25	2400 4800	175 712	0,055
П-31	110 220	1,5	17,4 8,6	78,0	2	2	342 756	0,594 2,455	0,026 0,212	2600 4600	130 470	0,085
П-32	110 220	2,2	24,5 12,2	80,5 81,5	2	2	234 468	0,285 1,35	0,02 0,092	1700 3600	78 358	0,105
П-41	110 220	3,2	36,1 18,0	80,5 80,5	4	2	243 540	0,2826 1,41	0,007 0,0328	1400 2700	118 470	0,15
П-42	110 220	4,5	50,6 25,3	81,0 81,0	4	2	162 351	0,153 0,65	0,0048 0,0392	760 1500	41,4 172	0,18
П-51	110 220	6,0	66 33	82,5 82,5	4	2	155 372	0,1026 0,565	0,0044 0,00736	900 1800	45,2 262	0,35
П-52	110 220	8,0	86 42,6	84,5 85,5	4	2	124 248	0,0656 0,298	0,0022 0,0068	800 1800	41,8 178	0,40
П-61	220	11	57,3	87,0	4	4	248	0,199	0,006	1950	178	0,56
П-62	220	14	73	86,0	4	4	186	0,1183	0,004	1700	146	0,65

Сопротивления обмоток указаны для холодного состояния. Увеличение сопротивления за счет нагрева можно учесть, пользуясь соотношением (1.31). Сопротивление цепи якоря двигателя подсчитывается по формуле (1.32).

Момент инерции якоря двигателя

$$J_{\text{д}} = m\rho^2 = mD^2/4, \quad (1.56)$$

где $J_{\text{д}}$ — момент инерции, $\text{кг}\cdot\text{м}^2$; m — масса якоря, кг ; ρ и D — соответственно радиус и диаметр инерции, м .

Таблица 1.3

ТЕХНИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ ДВИГАТЕЛЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА С НЕЗАВИСИМЫМ
ВОЗБУЖДЕНИЕМ СЕРИИ МИ

Тип двига- теля	$U_{\text{НОМ. в}}$	$\Gamma_{\text{НОМ. об/мин}}$	$P_{\text{НОМ. кет}}$	$I_{\text{Я. НОМ. а}}$	$I_{\text{В. НОМ. а}}$	$\eta, \%$	$\Gamma_{\text{Я. Ц (при 20}^\circ\text{C), ом}}$	$\Gamma_{\text{В (при 20}^\circ\text{C), ом}}$	$M_{\text{НОМ}} \times 9,81 \times 10^{-3}, \text{ н.м}$	$M_{\text{СХ}} \times 9,81 \times 10^{-3}, \text{ н.м}$	$G D^2, \text{ кг.м}^2$	
МИ-11	60	3000	0,12	2,86	0,27	62	0,46	223	3,9	1,0	0,006	
	60	2000	0,1	2,27	0,27	—	0,94	223	—	1,0	0,006	
	110	3000	0,12	1,53	0,17	62	1,48	642	3,9	1,0	0,006	
	110	2000	0,1	1,22	0,17	—	3,0	642	—	1,0	0,006	
МИ-12	60	3000	0,2	4,57	0,28	66	0,23	218	6,4	1,0	0,008	
	60	2000	0,12	2,72	0,28	—	0,52	218	—	1,0	0,008	
	110	3000	0,2	2,46	0,2	66	0,765	560	6,4	1,0	0,008	
	110	2000	0,12	1,46	0,2	—	1,74	560	—	1,0	0,008	
МИ-21	60	3000	0,25	5,6	0,2	67	0,284	306	8,0	1,5	0,014	
	60	2000	0,2	4,3	0,2	—	0,645	306	—	1,5	0,014	
	110	3000	0,25	3,05	0,13	67	0,945	827	8,0	1,5	0,014	
	110	2000	0,2	2,33	0,13	—	2,2	827	—	1,5	0,014	
МИ-22	60	3000	0,37	8,2	0,23	71	0,195	264	11,9	1,5	0,016	
	60	2000	0,25	5,5	0,23	—	0,36	264	—	1,5	0,016	
	60	1000	0,12	2,6	0,23	64	1,44	264	11,6	1,5	0,016	
	110	3000	0,37	4,4	0,14	—	0,546	934	—	1,5	0,016	
+	110	2000	0,25	2,9	0,14	69	1,29	790	12,0	1,5	0,016	
	110	1000	0,12	1,4	0,14	—	4,58	790	—	1,5	0,016	
	МИ-31	60	3000	0,45	10,3	0,41	68	0,204	145	14,5	2,5	0,036
		60	2000	0,37	8,2	0,41	—	0,405	145	—	2,5	0,036
60		1000	0,2	4,4	0,41	—	1,32	145	—	2,5	0,036	
110		3000	0,45	5,6	0,24	68	0,585	460	14,5	2,5	0,036	
+	110	2000	0,37	4,4	0,24	—	1,16	460	—	2,5	0,036	
	110	1000	0,2	2,4	0,24	66	3,93	460	19,4	2,5	0,036	
	МИ-32	110	2500	0,76	8,2	0,43	80	0,391	258	29,5	2,5	0,053
		110	1500	0,45	5,0	0,43	—	0,975	258	—	2,5	0,053
110		1000	0,37	4,2	0,43	72	2,21	258	35,9	2,5	0,053	
220		2500	0,76	4,1	0,23	—	1,36	950	—	2,5	0,053	
+	220	1500	0,45	2,5	0,23	75	3,81	950	29,1	2,5	0,053	
	220	1000	0,37	2,1	0,23	—	8,57	950	—	2,5	0,053	
	МИ-41	110	2500	1,6	19,2	0,43	73	0,249	255	62,0	6,0	0,16
		110	1500	1,1	13,0	0,43	—	0,67	255	—	6,0	0,16
110		1000	0,76	9,0	0,43	—	1,3	255	—	6,0	0,16	
220		2500	1,6	9,5	0,33	73	0,93	670	62,0	6,0	0,16	
-	220	1500	1,1	6,4	0,33	—	2,63	670	—	6,0	0,16	
	220	1000	0,76	4,5	0,33	72	5,32	670	73,7	6,0	0,16	
	МИ-42	110	2500	3,2	36,3	0,62	78	0,1	178	121,0	6,0	0,26
		110	1500	1,6	18,2	0,62	—	0,32	178	—	6,0	0,26
110		1000	1,1	12,6	0,62	75	0,75	178	106,7	6,0	0,26	
220		2500	3,2	18,0	0,31	—	0,376	715	—	6,0	0,26	
+	220	1500	1,6	9,1	0,31	—	1,28	715	—	6,0	0,26	
	220	1000	1,1	6,3	0,31	75	2,95	715	106,7	6,0	0,26	
	МИ-51	220	2500	5,0	27,2	—	—	0,164	435	—	12,0	0,5
		220	1500	3,2	17,1	—	—	0,46	435	—	12,0	0,5
220		1000	1,6	8,7	—	—	1,1	435	—	12,0	0,5	
МИ-52	220	2500	7,0	37,0	—	—	0,088	312	—	12,0	0,6	
	220	1500	4,5	23,3	—	—	0,26	312	—	12,0	0,6	
	220	1000	2,5	13,1	—	—	0,569	312	—	12,0	0,6	

ТЕХНИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ МАЛОМОЩНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ПОСТОЯННОГО
ТОКА ТИПА СЛ

Тип дви- гателя	$U_{\text{НОМ}}$, в	$n_{\text{НОМ}}$, об/мин	$P_{\text{НОМ}}$, вт	$I_{\text{Я.НОМ}}$, а	$I_{\text{Я.К.З.}}$, а	$I_{\text{В.НОМ}}$, а	$r_{\text{Я.П}}$ (при 20°С), ом	$M_{\text{НОМ}}$, $M_{\text{П}}$, $M_{\text{С}}$			$J_{\text{Д}} \times 9,81 \times 10^{-5}$, $\times 10^{-5}$, кг·м ²	$L_{\text{Д}}$, мГн
								$\times 9,81 \cdot 10^{-4}$, н·м				
СЛ-121	110	4500	7,5	0,16	0,45	0,07	240	14	42	4	0,039	130
СЛ-161	110	4000	8,6	0,17	0,64	0,08	170	21	80	4	0,053	125
СЛ-221	110	3600	13	0,25	0,9	0,05	117	35	90	8	0,14	230
СЛ-221А	110	3600	13	0,25	—	0,05	117	35	90	8	0,14	230
СЛ-261	110	3600	24	0,41	1,74	0,08	51	65	200	8	0,2	140
СЛ-281	24	5200	26	2,16	16,0	0,24	1,15	50	125	8	0,2	0,5
СЛ-321	110	3000	38	0,58	3,3	0,11	25,8	125	310	13	0,6	130
СЛ-361	110	3000	50	0,75	4,35	0,1	20,5	160	400	13	0,7	115
СЛ-369	110	3600	55	0,8	5,85	0,1	15,2	150	450	13	0,7	90
СЛ-521	110	3000	77	1,07	10,0	0,13	8,5	250	650	35	1,7	58
СЛ-521К	110	1000	20	0,37	1,1	0,13	74	200	635	35	1,7	360
СЛ-569	110	3600	175	1,96	24,0	0,11	3,6	475	925	35	2,7	30
СЛ-569К	110	850	36	0,58	2,25	0,22	40	420	1020	35	2,7	290
СЛ-571К	24	2200	95	6,15	62,0	0,85	0,31	420	750	35	2,7	2
СЛ-621	110	2400	172	2,08	30,0	0,16	3,0	700	1250	38	6,75	35
СЛ-661	110	2400	230	2,66	54,0	0,18	1,73	925	1550	38	9,35	25

В справочной литературе и каталогах момент инерции часто выражают через маховой момент GD^2 , используя техническую систему единиц МКГСС. В этом случае момент инерции измеряется в $\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{сек}^2$:

$$J_{\text{Д}} = \frac{G}{g} \cdot \frac{D^2}{4} = \frac{GD^2}{4g},$$

где $G/g = m$ — масса якоря, $\text{кг} \cdot \text{сек}^2/\text{м}$; g — ускорение силы тяжести, равное $9,81 \text{ м/сек}^2$; $G = mg$ — вес якоря (сила тяжести), кг ($1 \text{ кг} = 9,81 \text{ кг} \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$).

Для численного выражения момента инерции $J_{\text{Д}}$ в единицах СИ через маховой момент GD^2 [$\text{кг} \cdot \text{м}^2$] можно пользоваться соотношением

$$J_{\text{Д}} = GD^2/4. \quad (1.57)$$

Номинальный ток якоря двигателя

$$I_{\text{Я.НОМ}} = I_{\text{НОМ}} - I_{\text{В.НОМ}} \approx I_{\text{НОМ}} - \frac{U_{\text{НОМ}}}{\alpha r_{\text{В}}}.$$

Пример 1.2. Определим для двигателя типа П-22 ($U_{\text{НОМ}} = 220 \text{ в}$, $n_{\text{НОМ}} = 1500 \text{ об/мин}$) коэффициенты уравнения динамики при номинальном потоке возбуждения и $M_{\text{С}} = M_{\text{С}}(t)$, $J_{\text{Д.пр}} = 0,014 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Из табл. 1.2 имеем следующие данные:

$$U_{\text{Д.НОМ}} = 220 \text{ в}; \quad I_{\text{Я.НОМ}} = I_{\text{НОМ}} - I_{\text{В.НОМ}} = 5,64 \text{ а}; \quad p = 1;$$

$$r_{\text{Я.П}} = r_{\text{Я}} \nabla r_{\text{Д.П}} \nabla r_{\text{СТ}} = 4,42 \text{ ом}; \quad J_{\text{Д}} = 0,0138 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Пользуясь соотношениями (1.44), (1.40) и (1.37), определяем постоянные:

$$c_{ед} = \frac{U_{д.ном} - \alpha r_{я.ц} I_{я.ном}}{n_{ном}} = \frac{220 - 1,2 \cdot 4,42 \cdot 5,64}{1500} = 0,126;$$

$$c_{мд} = \frac{1}{0,105} c_{ед} = \frac{0,126}{0,105} = 1,2.$$

Учитывая, что двигатели серии П имеют легкую компенсационную (стабилизирующую) обмотку, по приближенной формуле (1.49), полагая $\beta = 0,3$, находим:

$$L_{я} = \frac{30}{\pi} \beta \frac{U_{д.ном}}{p n_{ном} I_{я.ном}} = \frac{30}{\pi} 0,3 \frac{220}{1 \cdot 1500 \cdot 5,64} \approx 0,075 \text{ гн.}$$

Момент инерции на валу двигателя

$$J = J_{д.ч} + J_{я.пр} = 0,0138 + 0,014 \approx 0,028 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Подставив численные значения параметров, получаем

$$k_{д} = \frac{1}{c_{ед}} = \frac{1}{0,126} \approx 8 \frac{\text{об}}{\text{мин} \cdot \text{в}};$$

$$k_{в} = \frac{\alpha r_{я.ц}}{c_{ед} c_{м.д}} = \frac{1,2 \cdot 4,42}{0,126 \cdot 1,2} = 35 \frac{\text{об}}{\text{н} \cdot \text{м} \cdot \text{мин}};$$

$$T_{я} = \frac{L_{я}}{\alpha r_{я.ц}} = \frac{0,075}{1,2 \cdot 4,42} = 0,014 \text{ сек};$$

$$T_{эм} = \frac{1}{9,55} J \frac{\alpha r_{я.ц}}{c_{ед} c_{м.д}} = \frac{0,028}{9,55} \cdot \frac{1,2 \cdot 4,42}{0,126 \cdot 1,2} \approx 0,1 \text{ сек.}$$

§ 1.4. Расчет параметров и составление уравнения двухфазного асинхронного двигателя

Двухфазные асинхронные двигатели широко используются в автоматических системах. Наибольшее применение как исполнительные элементы они находят в маломощных следящих системах. Практическое достоинство этих двигателей заключается в том, что они не имеют коллектора и поэтому обладают высокой надежностью.

В основном выпускаются двухфазные асинхронные двигатели двух типов: с полым немагнитным ротором из материала с хорошей электропроводностью (обычно из алюминия) и с ферромагнитным ротором, имеющим короткозамкнутую обмотку в виде беличьей клетки. Имея меньший к. п. д., двигатели первого типа отличаются малой инерцией ротора и лучшими регулировочными свойствами. Мощность указанных типов двигателей не превышает $100 \div 200 \text{ вт}$.

Принципиальная схема двухфазного асинхронного двигателя показана на рис. 1.9. Обмотка управления w_y и обмотка возбуждения w_b расположены перпендикулярно друг к другу. Необходимый фазовый сдвиг между напряжениями на обмотках, равный 90° , обеспечивается с помощью конденсатора C , включенного в цепь обмотки возбуждения. Могут применяться и другие схемы включения обмоток [13].

Механические характеристики асинхронного двигателя нелинейны и зависят не только от собственных параметров, но и от параметров выходного каскада усилителя и схемы включения обмоток. Поэтому механические характеристики, используемые в расчетах, должны соответствовать реальным условиям работы двигателя. Как правило,

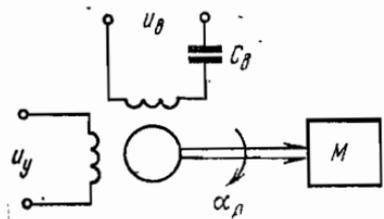


Рис. 1.9. Двухфазный асинхронный двигатель

такие характеристики определяются экспериментально. Обычно в справочниках приводятся технические данные двигателей для показанной на рис. 1.9 схемы включения обмоток при управлении от источника с большой мощностью и малым внутренним сопротивлением.

С помощью механических характеристик $n = f(U_y, M)$ (рис. 1.10, а) можно найти управляющее напряжение при заданном статическом моменте сопротивления на валу и напряжении трогания двигателя.

Составим линейное уравнение динамики двигателя в отклонениях, проведя линеаризацию его механических характеристик. За входную величину примем напряжение на управляющей обмотке, а за выходную — угол поворота вала, полагая момент сопротивления не зависящим от скорости вращения, что соответствует большинству применений двухфазных асинхронных двигателей.

Механические характеристики двигателя следует линеаризовать в точке или области рабочего режима путем построения касательных

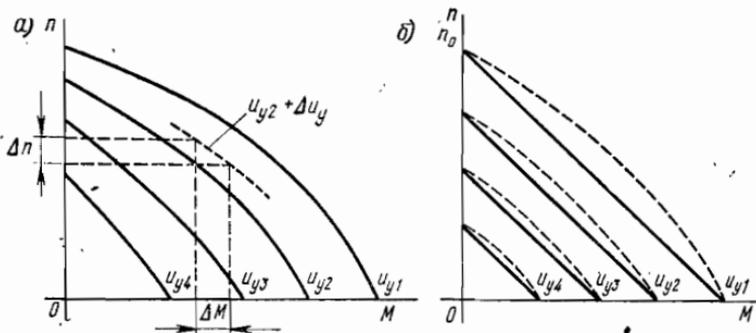


Рис. 1.10. Механические характеристики асинхронного двигателя

к действительным характеристикам. Если по форме механические характеристики близки к линейным, то их можно заменить приближенными линейными характеристиками в виде параллельных прямых (рис. 1.10, б) с наклоном, равным усредненному наклону прямых, соединяющих при заданных управляющих напряжениях точки пусковых моментов и холостого хода.

Из дальнейшего рассмотрения исключим инерционность по цепи управления двигателя, так как эта величина практически очень мала. Проведя аналогию с двигателем постоянного тока при $L_p = 0$, на

основании уравнения (1.39) для асинхронного двигателя при постоянной амплитуде напряжения возбуждения и малых отклонениях переменных можно записать:

$$\frac{d\alpha_d}{dt} = \frac{1}{c_e} U_y - \frac{1}{c_e c_m} M, \quad (1.58)$$

где $d\alpha_d/dt = \omega_d$ — скорость вращения двигателя, рад/сек; α_d — угол поворота вала двигателя, рад; U_y — действующее значение напряжения на обмотке управления, в; M — момент двигателя, н·м; c_e, c_m — постоянные двигателя, определяемые в области рабочего режима, в·сек/рад; н·м/в.

При этом уравнение равновесия моментов имеет вид

$$M = J \frac{d^2 \alpha_d}{dt^2} + M_c. \quad (1.59)$$

Решив совместно (1.58), (1.59) и перейдя к изображениям, получим уравнение двухфазного асинхронного двигателя

$$(T_{эм} s + 1) s \alpha_d(s) = k_d U_y(s) - k_{д.в} M_c(s), \quad (1.6)$$

где $k_d = 1/c_e$, $k_{д.в} = 1/c_e c_m$ — коэффициенты передачи двигателя соответственно по управляющему и возмущающему воздействиям; $T_{эм} = J/(c_e c_m)$ — электромеханическая постоянная времени, сек. Здесь $J = J_d + J_{н.пр}$ — момент инерции на валу двигателя, кг·м²; J_d — момент инерции ротора двигателя, кг·м². Постоянные c_e и c_m могут быть найдены на основании (1.58) по механическим характеристикам. При $\Delta M = 0$ ($M = \text{const}$) получаем

$$c_e = \Delta U_y / \Delta \omega_d. \quad (1.6)$$

Принимая $\omega_d = 0$ ($\omega_d = \text{const}$), находим

$$c_m = \Delta M / \Delta U_y. \quad (1.62)$$

В случае приведения механических характеристик двигателя (см. рис. 1.10, б)

$$c_e = U_y / \omega_{д0}; \quad c_m = M_{п} / U_y, \quad (1.6)$$

где $\omega_{д0}$, $M_{п}$ — скорость при холостом ходе и пусковой момент двигателя при напряжении управления U_y .

При отсутствии механических характеристик постоянные двигателя можно определить приближенно по его номинальным данным. Если механическую характеристику двигателя на рабочем участке от номинальной скорости вращения $\omega_{д.ном}$ до $\omega_d = 0$ при номинальном напряжении управления $U_{у.ном}$ считать линейной, то

$$\left. \begin{aligned} c_e &= \frac{\Delta U_y}{\Delta \omega_d} = \frac{M_{п} - M_{ном}}{M_{п}} \cdot \frac{U_{у.ном}}{\omega_{д.ном}}; \\ c_m &= \Delta M / \Delta U_y = M_{п} / U_{у.ном}, \end{aligned} \right\} \quad (1.64)$$

где $\Delta U_y = U_{у.ном} - U_{тр.ном}$ (здесь $U_{тр.ном} = U_{у.ном} M_{ном} / M_{п}$ — напряжение трогания двигателя при номинальном моменте).

В последнем случае коэффициенты уравнения двигателя запишутся как

$$\left. \begin{aligned} k_{\text{д}} &= \frac{M_{\text{п}}}{M_{\text{п}} - M_{\text{ном}}} \cdot \frac{\omega_{\text{д.ном}}}{U_{\text{у.ном}}}; \\ k_{\text{д.в}} &= \frac{\omega_{\text{д.ном}}}{M_{\text{п}} - M_{\text{ном}}}; \\ T_{\text{эм}} &= J \frac{\omega_{\text{д.ном}}}{M_{\text{п}} - M_{\text{ном}}}. \end{aligned} \right\} (1.65)$$

Так как в справочных сведениях скорость вращения двигателя дается в оборотах в минуту, следует учитывать соотношение

$$\omega_{\text{д}} (\text{рад/сек}) = \frac{1}{9,55} n (\text{об/мин}).$$

Передаточные функции двигателя на основании (1.60) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} W_{\text{д}}(s) &= \frac{\alpha_{\text{д}}(s)}{U_{\text{д}}(s)} = \frac{k_{\text{д}}}{s(T_{\text{эм}}s \mp 1)}; \\ W_{\text{д.в}}(s) &= \frac{\alpha_{\text{д}}(s)}{M_{\text{с}}(s)} = \frac{-k_{\text{д.в}}}{s(T_{\text{эм}}s \mp 1)}. \end{aligned} \right\} (1.66)$$

Примеры составления передаточных функций двухфазных асинхронных двигателей при различной форме механических характеристик рассмотрены в литературе [13].

Технические данные некоторых типов двухфазных асинхронных двигателей с полым ротором приведены в табл. 1.5. [11, 12, 14, 15, 20].

Пример 1.3. Определим для двигателя типа АДП-262 приближенную передаточную функцию по управляющему воздействию при $J_{\text{н.пр}} = 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, приняв за выходную величину угол поворота вала.

Из табл. 1.5 имеем следующие данные:

$$U_{\text{у.ном}} = 125 \text{ в}; \quad \omega_{\text{д.ном}} = \frac{1}{9,55} n_{\text{ном}} = 194 \frac{\text{рад}}{\text{сек}};$$

$$M_{\text{ном}} = 49 \cdot 10^{-3} \text{ н} \cdot \text{м}; \quad M_{\text{п}} = 88 \cdot 10^{-3} \text{ н} \cdot \text{м};$$

$$J = J_{\text{д}} + J_{\text{н.пр}} = 3,37 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Используя номинальные данные двигателя, определяем приближенные значения

$$k_{\text{д}} = 3,5 \frac{\text{рад}}{\text{в} \cdot \text{сек}}; \quad T_{\text{эм}} = 0,017 \text{ сек}.$$

При найденных параметрах

$$W_{\text{д}}(s) = \frac{3,5}{s(0,017s \mp 1)}.$$

Таблица 1.5

ТЕХНИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ ДВУХФАЗНЫХ АСИНХРОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ТИПА АДП

Тип двигателя	f, гц	P _{ном.вт}	n _{ном.} об/мин	n _о , об/мин	Обмотка возбуждения						Обмотка управления						M _{ном.} · 10 ⁻³	M _{п.} · 10 ⁻⁸	M _{р.} · 10 ⁻⁸	J _{п.} · 10 ⁻⁶
					U _{в.} в	I _{ном. в.} а	P _{в.вт}	C _{в.} мкф	г _{в.} ом	U _{макс.} в	I _{в.} а	I _{п.} а	P _{вт}	г _{у.} ом	U _{макс.} в	I _{в.} а				
АДП-120		2,4	4000	5000	110 0,3	28 0,25	—	—	—	110 0,18	—	8	—	—	—	5,9	9,8	0,29	—	
АДП-123	400	4,1	4000	5000	110 0,18	16 0,3	—	—	—	120 0,18	—	9	—	—	9,8	13,7	0,29	0,785		
АДП-123Б		8,9	6000	7000	110 0,27	26 0,5	—	—	—	110 0,22	—	12	—	—	14,2	16,7	0,29	0,785		
АДП-263		24	6000	8800	52 0,78	38 1,38	49 ± 9,5	—	—	165 0,37	0,42	38	10 ± 1,0	—	39	58	1,18	1,67		
АДП-263А	500	27,8	6000	8600	36 1,38	42 3,9	3,5 ± 0,35	—	—	270 0,51	0,56	42	28 ± 2,0	—	44	64	1,18	1,86		
АДП-363		35	6000	8600	110 0,55	53 6,6	11,5 ± 1,1	—	—	120 1,2	1,7	55	3 ± 0,3	—	56	69	2,0	3,93		
АДП-363А	500	46,4	6000	8600	36 2,0	65 6,6	1,22 ± 0,12	—	—	240 0,65	0,92	68	11 ± 1,0	—	73,5	83,4	2,0	4,83		
АДП-563А		70,5	6000	8600	36 3,6	105 14,4	2,4 ± 0,2	—	—	240 0,9	1,25	76	5 ± 0,5	—	98	118	4,3	11,75		
АДП-262		9,5	1850	2650	110 0,23	23 2,5	190 ± 15	—	—	125 0,58	0,6	26	38 ± 3,5	—	49	88	0,8	1,67		
АДП-362	50	19	1950	2650	110 0,6	45 6,5	36 ± 3,5	—	—	120 0,65	0,75	25	21 ± 2,0	—	93	167	1,3	3,93		
АДП-562		41	2000	2650	110 0,88	88 11,0	17 ± 1,5	—	—	160 0,73	1,15	35	13 ± 1,3	—	196	343	2,2	12,75		

§ 1.5. Основные параметры и передаточная функция электромашинного усилителя

В автоматических системах электромашинные усилители (ЭМУ) находят широкое применение. Это объясняется тем, что они имеют высокие коэффициенты усиления по мощности и по напряжению, обладают сравнительно большим быстродействием и при наличии нескольких обмоток управления позволяют просто суммировать управляющие сигналы.

Промышленность выпускает ЭМУ продольного поля (с самовозбуждением) и поперечного поля. Двухступенчатые ЭМУ первого типа изготавливаются на большую мощность — до 200 кВт и более и используются в управляемом электроприводе. В системах автоматического управления и регулирования широко применяются ЭМУ с поперечным полем, изготавливаемые до 10 кВт.

Принципиальная электрическая схема ЭМУ поперечного поля (рис. 1.11) представляет схему двухкаскадного усилителя. Первый каскад усиления включает в себя обмотку управления OU и обмотку якоря с выходом на щетки поперечной оси $1-1$. Магнитный поток Φ_y , создаваемый обмоткой управления, индуцирует в якоре э. д. с. поперечной оси $e_{к.з}$. За счет тока $i_{к.з}$ образуется поперечный поток

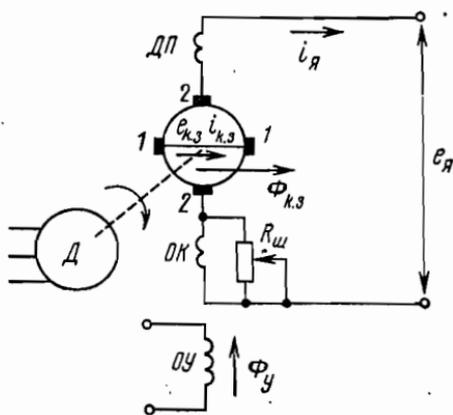


Рис. 1.11. Электромашинный усилитель с поперечным полем

реакции якоря $\Phi_{к.з}$, который используется для возбуждения второго каскада. Результирующая э. д. с. ЭМУ $e_{я.у}$ снимается со щеток продольной оси 2-2.

Для увеличения потока реакции якоря по поперечной оси воздушный зазор между якром и статором делается равномерным, а дополнительные полюса по этой оси не ставятся. С этой же целью сопротивление якорной цепи по поперечной оси стремятся сделать минимальным, для чего щетки, расположенные на этой оси, обычно замыкают коротко.

Для компенсации реакции якоря по продольной оси от тока якоря i_y на статоре по этой оси располагается распределенная обмотка компенсации ОК, намагничивающее действие которой регулируется с помощью шунтирующего сопротивления $R_{ш}$. Для уменьшения искрения между щетками и коллектором в цепи нагрузки по продольной оси машины располагаются также дополнительные полюса ДП.

В электромашинных усилителях серии ЭМУ-А, выпускаемых в настоящее время промышленностью, введены дополнительно специальные размагничивающие обмотки переменного тока и последовательная обмотка в поперечной цепи статора. Эти обмотки позволяют су-

щественно уменьшить влияние гистерезиса магнитопровода и тока нагрузки на характеристики ЭМУ. Для примера на рис. 1.12 показаны характеристики холостого хода (а) и внешние характеристики (б) электромашинного усилителя типа ЭМУ-12А при управлении со стороны обмотки с числом витков $\omega_y = 2900$ [8].

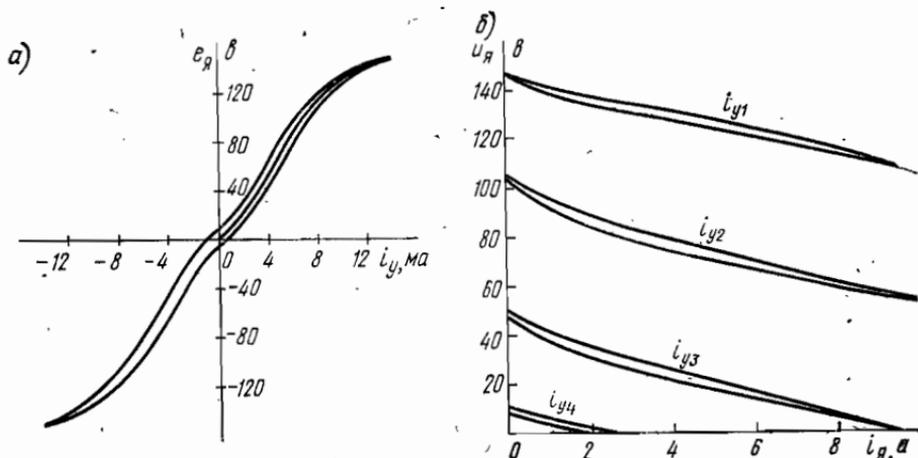


Рис. 1.12. Характеристики холостого хода и внешние характеристики электромашинного усилителя типа ЭМУ-12А

В режиме холостого хода динамика ЭМУ при малых приращениях напряжения управления описывается передаточной функцией

$$W_{\text{ЭМУ}}(s) = \frac{E_{я.у}(s)}{U_y(s)} = \frac{k_{y \text{ ЭМУ}}}{(T_y s + 1)(T_{к.з} s + 1)}, \quad (1.67)$$

где k_y — коэффициент передачи ЭМУ по напряжению, определенный по характеристике х. х.; T_y и $T_{к.з}$ — постоянные времени соответственно цепи управления и к. з. цепи, сек.

При наличии нескольких обмоток управления постоянная времени цепи управления ЭМУ принимается равной сумме постоянных времени всех обмоток, включенных на источники сигнала.

В общем случае подключение нагрузки к ЭМУ изменяет его характеристики за счет внутренних обратных связей. Однако, как показывает опыт, в нормально скомпенсированном ЭМУ, содержащем размагничивающие обмотки и последовательные стабилизирующие обмотки в поперечной цепи, изменения характеристик достаточно малы, что позволяет пренебречь влиянием внутренних обратных связей.

Наибольшее применение ЭМУ находят в системах управления двигателями постоянного тока, часто используются в качестве возбудителей генераторов. На рис. 1.13 показана идеализированная эквивалентная схема ЭМУ, нагруженного на якорную цепь двигателя по-

стоянного тока. Уравнение для ЭМУ и двигателя, полученное из этой схемы, имеет вид

$$[(T_{я\Sigma} s + 1) T'_{эм} s + 1] n_d(s) = \frac{k_y k_d}{(T_y s + 1)(T_{к.в} s + 1)} U_y(s) - (T_{я\Sigma} s + 1) k'_в M_c(s), \quad (1.68)$$

где $T_{я\Sigma} = \frac{L_{я.у} \nabla L_{я.д}}{r_{я.у} + r_{я.д}}$ — суммарная постоянная времени цепи якоря ЭМУ и двигателя, сек;

$T'_{эм} = J \frac{r_{я.у} \nabla r_{я.д}}{c_{ед} c_{м.д}}$ — электромеханическая постоянная времени двигателя при работе от ЭМУ, сек;

$k'_в = \frac{r_{я.у} + r_{я.д}}{c_{ед} + c_{м.д}}$ — коэффициент передачи двигателя по возмущающему воздействию при работе от ЭМУ, об/н·м·мин.

Величину индуктивности цепи якоря ЭМУ $L_{я.у}$ можно найти по приближенной формуле (1.49), принимая $\beta \approx 0,25$.

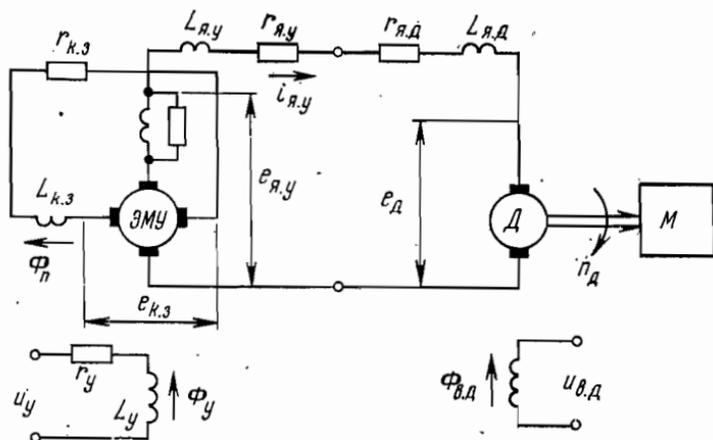


Рис. 1.13. Эквивалентная электрическая схема ЭМУ, нагруженного на двигатель постоянного тока

Если нагрузкой ЭМУ является цепь возбуждения генератора, то постоянная времени этой цепи достаточно точно определяется соотношением

$$T'_в \approx \frac{L_в}{r_в + r_{я.у}} = \frac{T_в}{1 \nabla r_{я.у}/r_в} \quad \left(\text{где } T_в = \frac{L_в}{r_в} \right), \quad (1.69)$$

так как всегда $L_в \gg L_{я.у}$. При последовательном соединении ЭМУ и генератора постоянного тока передаточная функция

$$W(s) = \frac{E_r(s)}{U_y(s)} = \frac{k_y k'_r}{(T_y s + 1)(T_{к.в} s + 1)(T'_в s + 1)}, \quad (1.70)$$

где $k'_r = \frac{k_r}{1 + r_{я.у}/r_B}$, здесь k_r — коэффициент передачи генератора

при возбуждении от источника с нулевым сопротивлением.

В целях стабилизации параметров и уменьшения влияния нелинейностей и нагрузки электромашинный усилитель часто охватывают жесткой отрицательной обратной связью по напряжению, используя для этого одну из обмоток управления (рис. 1.14, а). Эквивалентная

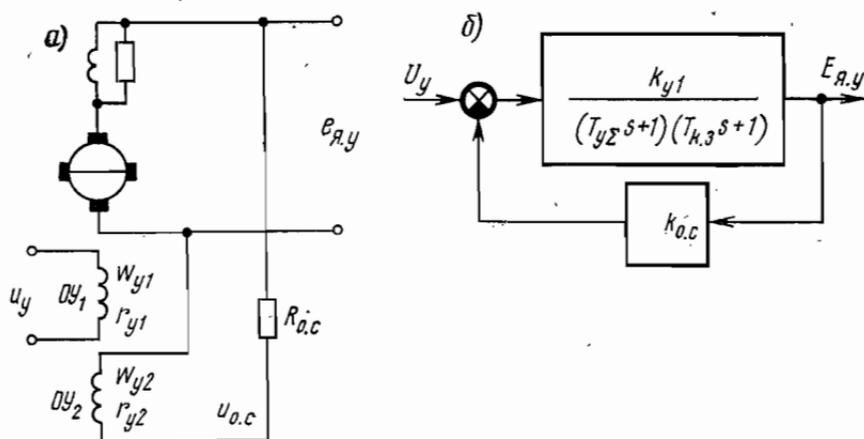


Рис. 1.14. Электромашинный усилитель с отрицательной обратной связью по напряжению

схема ЭМУ с жесткой обратной связью показана на рис. 1.14, б. Динамика такого ЭМУ описывается передаточной функцией

$$W'_{\text{ЭМУ}}(s) = \frac{k'_{y1}}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}, \quad (1.71)$$

в которой $k'_{y1} = \frac{k_{y1}}{1 + k_{y1} k_{o.c.}}$; $k_{o.c.} = \frac{\omega_{y2}}{\omega_{y1}} \cdot \frac{r_{y1}}{r_{y2} + R_{o.c.}}$;

$$T = \sqrt{\frac{T_{y2} T_{к.з}}{1 + k_{y1} k_{o.c.}}}; \quad \zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{1 + k_{y1} k_{o.c.}}} \cdot \frac{T_{y2} + T_{к.з}}{\sqrt{T_{y2} T_{к.з}}};$$

$$T_{y2} = T_{y1} + T_{y2} = \left(1 + \frac{\omega_{y2}^2}{\omega_{y1}^2} \cdot \frac{r_{y1}}{r_{y2} + R_{o.c.}}\right) T_{y1}.$$

Применение в ЭМУ отрицательной обратной связи уменьшает его коэффициент усиления. Особенно сильное влияние обратная связь оказывает на величину коэффициента усиления по мощности:

$$k'_p = \frac{k_p}{(1 + k_{y1} k_{o.c.})^2}, \quad (1.72)$$

где k_p — коэффициент усиления по мощности при отсутствии обратной связи.

Таблица 1.7

ДАННЫЕ КОМПЛЕКТОВ ОБМОТОК УПРАВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАШИНЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ

Тип усилителя	Номер комплекта	ОУ ₁				ОУ ₂				ОУ ₃				ОУ ₄				
		ω _у	но ^д Δ ₁	ном ^{дм} Δ ₁	дм ^{поц} Δ ₁	ω _у	но ^д Δ ₁	ном ^{дм} Δ ₁	дм ^{поц} Δ ₁	ω _у	но ^д Δ ₁	ном ^{дм} Δ ₁	дм ^{поц} Δ ₁	ω _у	но ^д Δ ₁	ном ^{дм} Δ ₁	дм ^{поц} Δ ₁	
ЭМУ-3	—	2600	1000	20	120	2600	1000	20	120	—	—	—	—	—	—	—	—	—
		4400	3500	10,7	64,2	4400	3500	10,7	64,2	—	—	—	—	—	—	—	—	—
ЭМУ-5	—	3250	1000	20	120	3250	1000	20	120	—	—	—	—	—	—	—	—	—
		5300	3000	11,5	69	5300	3000	20	69	—	—	—	—	—	—	—	—	—
ЭМУ-12	12-2-А	2900	1030	22	190	2900	1030	22	190	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	12-2-Б	4600	2200	14	130	4600	2200	14	130	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	12-2-В	4800	2600	13	117	4800	2600	13	117	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	12-3-Г	3000	1550	21	145	3000	1550	21	145	3000	1345	21	145	3000	1345	21	145	3000
	12-3-Д	2350	1340	27	135	2350	1340	27	135	460	34,2	140	820	460	34,2	140	820	460
12-3-Е	500	161	130	200	370	84	170	280	740	85	600	600	740	85	600	600	740	
12-3-Ж	12-4-3	900	155	70	350	900	155	70	350	1350	367	47	240	1350	367	47	240	1350
		675	184	94	240	900	155	70	350	675	184	94	240	675	184	94	240	675
ЭМУ-25	25-2-А	3400	985	22	200	3400	985	22	200	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	25-2-Б	4360	1500	17	155	4360	1500	17	155	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	25-2-В	6600	3310	11,5	105	6600	3310	11,5	105	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	25-2-Г	8000	5000	9,5	85	8000	5000	9,5	85	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	25-3-Д	2600	1065	28,5	150	2600	1065	28,5	150	2600	950	28,5	200	2600	950	28,5	200	2600
25-4-Е	500	37,2	145	720	330	18,5	220	1100	330	15,6	220	1100	330	15,6	220	1100	330	
25-4-Ж	1300	340	56	225	330	18,5	220	1100	1300	340	56	225	1300	340	56	225	1300	
25-4-З	3200	1820	23	115	330	18,5	220	1100	3200	1820	23	115	1200	792	61	120	1200	
25-4-И	400	21,7	180	950	2800	1500	26	120	400	21,7	180	950	2800	1500	26	120	400	
25-4-К	5000	2920	14,5	85	500	131	145	300	5000	2920	14,5	85	1500	1000	49	115	1500	
25-4-Л	1300	340	56	225	330	18,5	220	1100	330	15,6	220	1100	330	18,5	220	1100	330	
25-4-М	3600	1835	20	100	3600	1835	20	100	3600	1835	20	100	3600	1835	20	100	3600	
25-4-Н	18	0,04	4000	20000	500	44,1	145	720	18	0,04	4000	20000	500	44,1	145	720	18	

Тип усилителя	Номер комплекта	ОУ ₁				ОУ ₂				ОУ ₃				ОУ ₄			
		шУ	кО, А _г	МОМ, А _г	ВМ, ПОЦ _г	шУ	кО, А _г	МОМ, А _г	ВМ, ПОЦ _г	шУ	кО, А _г	МОМ, А _г	ВМ, ПОЦ _г	шУ	кО, А _г	МОМ, А _г	ВМ, ПОЦ _г
ЭМУ-50	50-2-А	3420	1030	22	200	3420	1030	22	200	3420	1030	22	200	3420	1030	22	200
	50-2-Б	3720	1500	19,5	175	3720	1500	19,5	175	3720	1500	19,5	175	3720	1500	19,5	175
	50-2-В	6600	3920	11,5	105	6600	3920	11,5	105	6600	3920	11,5	105	6600	3920	11,5	105
	50-4-Г	380	24,8	190	950	220	9,15	330	1650	220	7,95	330	1650	220	9,15	330	1650
	50-4-Д	3200	2900	23	115	220	9,15	330	1650	3200	2200	23	115	1200	930	61	120
	50-4-Е	5000	3540	14,5	85	5000	3540	14,5	85	100	4,16	730	2000	500	44,7	145	720
	50-4-Ж	2800	1540	26	120	2800	1770	26	120	2800	1540	26	120	2800	1770	26	120
	50-4-З	1710	465	44	220	1710	535	44	220	1710	465	44	220	1710	535	44	220
	50-4-И	2750	1500	27	120	2300	1000	32	160	2750	1500	27	120	2300	1000	32	160
	50-4-К	2750	1500	27	120	1260	300	58	290	2750	1500	27	120	400	30	180	900
	50-4-Л	1300	410	56	225	330	21,6	220	1100	1300	410	56	225	1300	470	56	225
	50-4-М	380	24,8	190	950	15	0,04	4800	24000	15	0,04	4800	24000	15	0,04	4800	24000
ЭМУ-70	70-2-А	3600	1000	22	200	3600	1000	22	200	3600	1000	22	200	3600	1000	22	200
	70-2-Б	4000	1500	20	180	4000	1500	20	180	4000	1500	20	180	4000	1500	20	180
	70-4-Б	3600	1950	22	120	2000	800	40	180	3600	1950	22	120	330	24	240	960
ЭМУ-100	100-2-А	3200	1000	23	210	3200	1000	23	210	3200	1000	23	210	3200	1000	23	210
	100-4-Б	230	8,16	320	1600	460	37,2	160	800	230	8,16	320	1600	460	37,2	160	800
	100-4-В	230	8,16	320	1600	3000	2100	25	120	230	8,16	320	1600	3000	2100	25	120
	100-4-Г	230	8,16	320	1600	460	37,2	160	800	460	32,6	160	800	460	37,2	160	800

Примечание. Сопровращения обмоток указаны при 20° С; длительно допустимый ток обозначен через / доп.

Технические данные электромашинных усилителей серии ЭМУ-А приведены в табл. 1.6 [8, 16]. Параметры, характеризующие динамические свойства ЭМУ, являются ориентировочными. Эти параметры определены с помощью универсальных характеристик [16], которые связывают величины постоянной времени к. з. и удельной индуктивности обмоток управления с номинальной мощностью ЭМУ и скоростью вращения приводного двигателя.

Электромашинные усилители изготавливаются с различными комплектами обмоток управления (табл. 1.7). Высокоомные обмотки используются при управлении ЭМУ от электронных усилителей, а низкоомные — от полупроводниковых. Наличие в комплекте нескольких обмоток позволяет вводить на вход ЭМУ кроме управляющих также и корректирующие сигналы.

Благодаря стабилизирующей обмотке в поперечной цепи электромашинные усилители типа ЭМУ-А имеют смягченные внешние характеристики, достаточно близкие к линейным. Коэффициент передачи для этих усилителей в режиме холостого хода приближенно можно найти по номинальным данным:

$$k_y = \frac{e_{я.у}}{u_y} \approx \frac{m U_{\text{ВЫХ.НОМ}}}{\alpha r_y I_{y.\text{НОМ}}}, \quad (1.73)$$

где $\alpha = 1,15$ — коэффициент, учитывающий нагрев обмотки управления; $m = 1,35; 1,3; 1,25$ соответственно для усилителей 0,2 — 1,5 квт; 2 — 5 квт; 7 — 10 квт.

§ 1.6. Основные параметры и передаточные функции магнитных усилителей

Магнитные усилители широко используются в системах автоматического управления. Достоинствами таких усилителей являются большое усиление по мощности, малая зависимость работы от изменений напряжения и частоты, простота суммирования сигналов на входе, возможность электрической изоляции рабочей цепи от цепи управления, высокая надежность.

К недостаткам магнитных усилителей следует отнести малое входное сопротивление и инерционность.

Целесообразно применять магнитные усилители при питании их от сети повышенной частоты (400—3000 гц). В этом случае габариты и инерционность усилителей можно значительно уменьшить.

Качество магнитных усилителей оценивают по величине добротности

$$D = k_p / T_{\Sigma}, \quad (1.74)$$

где k_p — коэффициент усиления по мощности; T_{Σ} — постоянная времени магнитного усилителя со стороны цепи управления.

С целью увеличения добротности магнитные усилители, как правило, выполняют с положительной обратной связью по току на грузки [17, 18].

На рис. 1.15 изображены электрические схемы однотактных магнитных усилителей с внешней (а) и внутренней (б) положительной обратной связью и выходом на переменном токе. В первой схеме обратная связь осуществляется с помощью специальной обмотки $w_{o.c.}$, включенной в цепь нагрузки Z_H через выпрямительный мост. Обмотка $w_{c.m.}$ служит для смещения характеристики усилителя, реагирующего на полярность управляющего сигнала u_y . Рабочие обмотки $w_{p.o.}$ включены так, что наводимая э. д. с. в обмотке управления компенсируется.

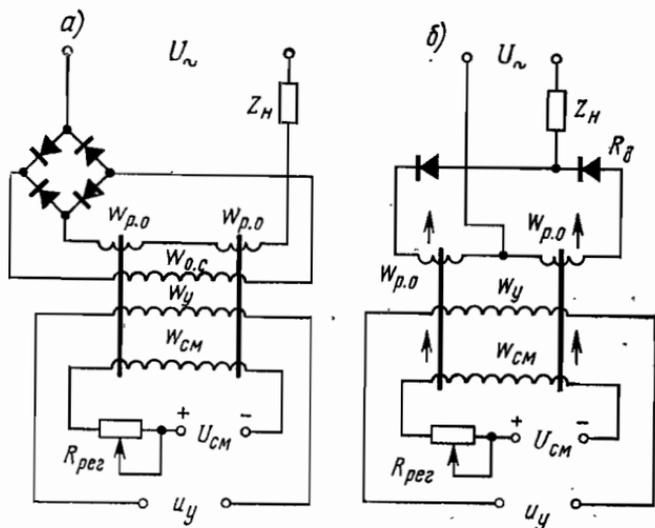


Рис. 1.15. Однотактные магнитные усилители с выходом на переменном токе

Во второй схеме усилителя положительная обратная связь создается непосредственно рабочими обмотками $w_{p.o.}$, в цепи которых включены диоды. При этом в отличие от первой схемы усилителя рабочие обмотки соединяются таким образом, что они создают постоянную составляющую потока по отношению к обмотке управления. Магнитные усилители с внутренней обратной связью называются также *усилителями с самонасыщением* (см. рис. 1.15, б). Примем следующие обозначения: w_y , $w_{c.m.}$, $w_{o.c.}$, $w_{p.o.}$ — числа витков соответственно обмоток управления, смещения, обратной связи и рабочей обмотки; r_y , $r_{c.m.}$, $r_{o.c.}$, $r_{p.o.}$ — сопротивления соответствующих обмоток, *ом*; R_c — внутреннее сопротивление источника сигнала управления, *ом*; $R_{рег}$ — подстроечное сопротивление для регулировки тока в обмотке смещения, *ом*; R_d — прямое сопротивление диода, *ом*; $\eta = R_H / R_{\Sigma}$ — к. п. д. цепи нагрузки; R_{Σ} — суммарное сопротивление, учитывающее сопротивление обмоток и диодов, *ом*; U_{\sim} , u_y , $U_{c.m.}$ — соответственно напряжение сети, управления и смещения, *в*; f — частота сети, *гц*.

Приближенно передаточную функцию магнитного усилителя с положительной обратной связью при работе на активную нагрузку

можно представить в виде [17, 18]

$$W_I(s) = \frac{I_{н.ср}(s)}{U_Y(s)} = \frac{k_I}{r_Y + R_c} \cdot \frac{e^{-st_b}}{T_{\Sigma}s + 1}, \quad (1.75)$$

если за выходную величину принять ток нагрузки, или в виде

$$W_U(s) = \frac{U_{н.ср}(s)}{U_Y(s)} = R_H W_I(s) = \frac{k_U}{1 + R_c/r_Y} \cdot \frac{e^{-st_b}}{T_{\Sigma}s + 1}, \quad (1.76)$$

если за выходную величину взять напряжение на нагрузке.

В формулах (1.75), (1.76) использованы следующие обозначения: $I_{н.ср}$, $U_{н.ср}$ — средние значения тока нагрузки (a) и напряжения (b); $k_I = \frac{\omega_y}{\omega_{p.o}} \cdot \frac{1}{1 - k_{o.c}}$ — коэффициент усиления по току с учетом обратной связи (где $k_{o.c}$ — коэффициент обратной связи; для усилителей с внешней обратной связью $k_{o.c} = \omega_{o.c}/\omega_{p.o}$, для усилителей с внутренней обратной связью $k_{o.c} = 0,95 \div 0,96$); $k_U = k_I R_H / r_Y$ — коэффициент усиления по напряжению; t_b — время запаздывания (для усилителей с внешней обратной связью $t_b = 0$, для усилителей с внутренней обратной связью $t_b = 1/(2f)$, сек).

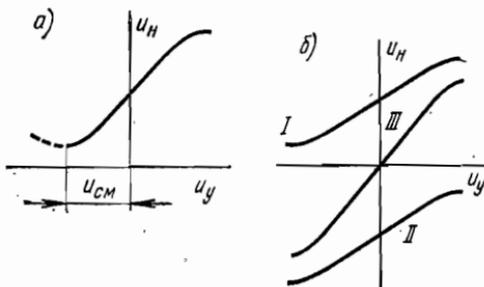


Рис. 1.16. Выходные характеристики магнитных усилителей

Постоянная времени магнитного усилителя T_{Σ} равна сумме постоянных времени обмоток управления, смещения и обратной связи [17]. Для магнитного усилителя с внешней положительной обратной связью и несколькими обмотками управления

$$T_{\Sigma} = \frac{R_H}{4f\eta} \cdot \frac{1}{\omega_{p.o}^2 (1 - k_{o.c})} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\omega_{yi}^2}{r_{yi} + R_{ci}} + \frac{\omega_{cm}^2}{r_{cm} + R_{per}} + \frac{\omega_{o.c}^2}{r_{p.c} + 2R_d + 2r_{p.o} + R_H} \right). \quad (1.77)$$

В магнитном усилителе с внутренней обратной связью обратная связь осуществляется через поток рабочих обмоток, работающих поочередно в каждый полупериод. Для такого усилителя постоянная времени

$$T_{\Sigma} = \frac{1}{2f\eta} \cdot \frac{R_H}{\omega_{p.o}^2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\omega_{yi}^2}{r_{yi} + R_{ci}} + \frac{\omega_{cm}^2}{r_{cm} + R_{per}} \right). \quad (1.78)$$

Для магнитных усилителей с внутренней обратной связью характерно также чистое запаздывание $t_s = 1/(2f)$, обусловленное тем, что процесс изменения индукции сердечника под действием сигнала управления происходит в один полупериод, а выдача сигнала в рабочей цепи (соответствующего уровню намагниченности сердечника) — в другой полупериод. При $t \ll T_s$ величиной t_s пренебрегают.

Реверсивный выход получают с помощью двухтактных магнитных усилителей, которые составляют из двух однотактных усилителей.

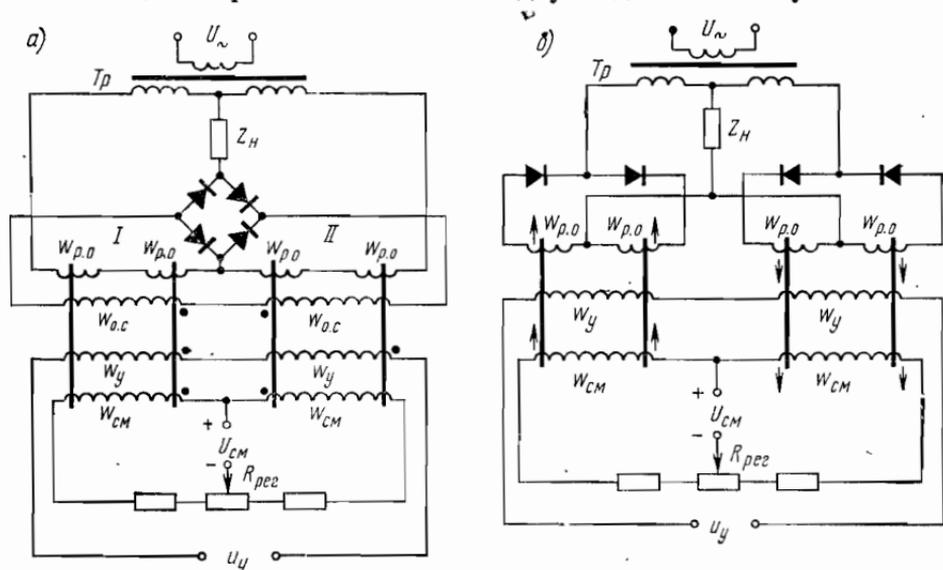


Рис. 1.17. Двухтактные магнитные усилители с выходом на переменном токе

Образование реверсивной выходной характеристики *III* при дифференциальном включении двух однотактных усилителей с характеристиками *I* и *II* показано на рис. 1.16, б. Примеры двухтактных магнитных усилителей, построенных по дифференциальной схеме с положительной обратной связью и выходом на переменном токе, приведены на рис. 1.17, а, б. Обратная связь в первом усилителе внешняя, а во втором — внутренняя. Расчетные формулы (1.75)—(1.78) справедливы также и для двухтактных усилителей.

Двухтактные магнитные усилители строят также по мостовой и трансформаторной схемам [17, 18]. Чтобы получить выход на постоянном токе, в выходную цепь следует ввести выпрямительные устройства. Магнитные усилители с двухтактным выходом на постоянном токе имеют низкий к. п. д. Для повышения его применяют специальные схемы усилителей. Однако без использования вспомогательных активных элементов, рассчитанных на работу при соответствующем токе нагрузки, к. п. д. таких усилителей практически не превышает 40—45% [18].

Нагрузка магнитного усилителя может иметь индуктивный характер, например, при работе на асинхронный двигатель или на обмот-

ку возбуждения генератора. В общем случае такая нагрузка приводит к изменению передаточной функции усилителя. В магнитном усилителе с выходом на переменном токе влияние индуктивной нагрузки практически исключается, если последнюю настроить в резонанс с частотой сети, подключив параллельно конденсатор. Такое включение магнитного усилителя используется при работе на асинхронный двигатель.

В случае выхода на постоянном токе при индуктивной нагрузке в магнитных усилителях с положительной обратной связью коэффициент обратной связи возрастает, что может привести к неустойчивой работе усилителя. Существуют способы устранения этого явления [18]. При использовании их передаточная функция магнитного усилителя с выходом на постоянном токе и индуктивной нагрузке

$$W_I(s) = \frac{I_{н.сп}(s)}{U_Y(s)} = \frac{k_I}{(r_Y + R_c)(T_\Sigma s + 1)(T_H s + 1)}, \quad (1.79)$$

где $T_H = L_H/R_\Sigma$ — постоянная времени цепи нагрузки, сек (L_H — индуктивность нагрузки, гн).

Наряду с рассмотренными усилителями, в системах автоматического управления применяются также малоинерционные магнитные усилители, называемые *быстродействующими*. Они основаны на использовании схемы с внутренней положительной обратной связью [17, 18]. Такие усилители могут управляться как постоянным, так и переменным напряжением. Передаточная функция быстродействующего магнитного усилителя

$$W_U(s) = \frac{U_{н.сп}(s)}{U_Y(s)} = k_U e^{-s\tau_3}, \quad (1.80)$$

где τ_3 — время запаздывания, составляющее половину периода или один период напряжения питания; $k_U = \frac{1}{2} \eta \frac{\omega_{р.о}}{\omega_Y}$ — для однополупериодной схемы; $k_U = \eta \frac{\omega_{р.о}}{\omega_Y}$ — для двухполупериодной схемы.

Малое время реакции быстродействующих усилителей достигается в основном за счет уменьшения усиления по мощности и напряжению, что создает определенные ограничения в применении таких усилителей. Наиболее целесообразно использование быстродействующих магнитных усилителей в качестве выходных каскадов усилительных устройств в сочетании с полупроводниковыми усилителями. Наиболее широко магнитные усилители применяются для управления асинхронными двигателями в маломощных следящих системах, работающих на переменном токе повышенной частоты (400—500 гц).

Методика конструктивного расчета различных магнитных усилителей изложена в литературе [17, 18].

Литература к главе I

1. К. В. Егоров. Основы теории автоматического регулирования. «Энергия», 1967.
2. Д. П. Кэмпбелл. Динамика процессов химической технологии. Госхимиздат, 1962.
3. В. А. Олейников, Н. С. Зотов. Автоматическое регулирование технологических процессов в нефтяной и нефтехимической промышленности. Гостехиздат, 1962.
4. В. А. Олейников, О. Н. Тихонов. Автоматическое управление технологическими процессами в обогатительной промышленности. «Недра», 1966.
5. В. М. Ордынцев. Математическое описание объектов автоматизации. «Машиностроение», 1965.
6. В. И. Анисимов, А. А. Вавилов, А. В. Фатеев. Сборник примеров и задач по линейной теории автоматического регулирования. Под ред. А. В. Фатеева. Госэнергоиздат, 1959.
7. Г. П. Хализев, В. И. Серов. Расчет пусковых, тормозных и регулировочных устройств для электродвигателей. «Высшая школа», 1966.
8. Справочные данные по электрооборудованию, т. 1 — Электрические машины общего применения. «Энергия», 1964.
9. В. П. Андреев, Ю. А. Сабинин. Основы электропривода. Госэнергоиздат, 1963.
10. А. В. Башарин и др. Примеры расчетов автоматизированного электропривода. «Энергия», 1964.
11. П. Д. Верхопятницкий. Электрические элементы автоматики. Судпромгиз, 1963.
12. С. О. Доброгурскии и др. Счетно-решающие устройства. «Машиностроение», 1966.
13. Ф. Ф. Котченко. Следящие системы автоматических компенсаторов. «Недра», 1965.
14. В. Д. Панасенко. Элементы автоматических устройств и вычислительной техники. Оборонгиз, 1962.
15. Н. П. Ермолин. Электрические машины малой мощности. «Высшая школа», 1967.
16. В. В. Рудаков. Электромашинные усилители в системах автоматики. Госэнергоиздат, 1961.
17. В. Б. Миловзоров. Электромагнитная техника. «Высшая школа», 1966.
18. Б. И. Аранович, Б. В. Шамрай. Электромагнитные устройства автоматики. «Энергия», 1965.
19. С. Л. Попков. Следящие системы. «Высшая школа», 1963.
20. Е. В. Арменский, Г. Б. Фалк. Электрические микромашины. «Высшая школа», 1968.

ВЫБОР ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО ДВИГАТЕЛЯ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 2.1. Предварительные замечания

Элементы, входящие в состав системы автоматического управления, целесообразно различать по функциональному признаку (см. § 1.1), который определяется выполняемой элементом операцией. Различают усилительные, исполнительные, преобразовательные, измерительные и корректирующие элементы, а также устройства сравнения и суммирования сигналов. Особую группу элементов систем автоматического управления составляют исполнительные устройства. Основным моментом в проектировании этих устройств является выбор исполнительного двигателя. По ряду причин, указанных далее, эта задача не решается однозначно, поэтому при проектировании исполнительного устройства возможны варианты решения. В § 2.2 и 2.3 даны некоторые рекомендации по выбору двигателей электромеханических исполнительных устройств, получивших на практике наибольшее распространение. Для исполнительного устройства позиционной следящей системы установлена связь между мощностью двигателя, параметрами элементов и показателями качества системы.

§ 2.2. Выбор мощности исполнительного двигателя системы автоматического управления

Рациональный выбор мощности исполнительного двигателя системы управления позволяет уменьшить потребление энергии и получить минимальные габариты и вес системы, которые определяются в основном двигателем и усилителем мощности.

В качестве исполнительных двигателей с управляемой скоростью вращения в автоматических системах применяются двигатели переменного тока (двухфазные асинхронные), постоянного тока с независимым возбуждением, гидравлические и др. При разработке маломощных систем (до 200 *вт*) отдается предпочтение надежным в эксплуатации двухфазным асинхронным двигателям. В системах с выходной мощностью более 0,2 *квт*, как правило, используются двигатели постоянного тока. При больших требуемых ускорениях нагрузки применяются гидравлические двигатели [1]. Однако переход к гидравлической системе с точки зрения стоимости и удобства эксплуатации оправдывается только при мощностях свыше 2,5—3 *квт*. Излагаемые далее рекомендации относятся к выбору электродвигателя.

В исполнительных устройствах, как правило, используются электродвигатели, скорость вращения которых превышает необходимые скорости вращения входного вала нагрузки. Поэтому двигатели со-

единяются с нагрузкой через редуктор. Применение тихоходного двигателя с целью исключения редуктора нерационально, так как габариты, вес и стоимость исполнительного устройства в этом случае получаются значительно выше.

Выбор двигателя для замкнутой системы управления представляет собой сравнительно сложную задачу, которая однозначно решается только для простых частных случаев [2]. Сложность выбора двигателя обусловлена тем, что динамические качества и механические характеристики двигателя заранее не известны. Кроме того, соотношения параметров у двигателей даже одного типа различны в зависимости от

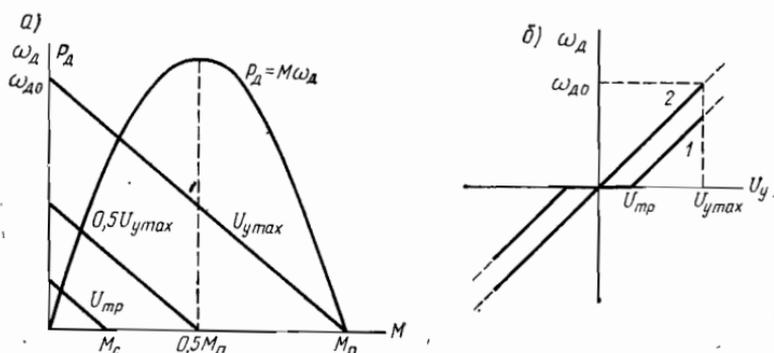


Рис. 2.1. Характеристики двигателя постоянного тока с независимым возбуждением

мощности и номинальной скорости. Дополнительные трудности возникают в тех случаях, когда нагрузка и двигатель имеют нелинейные характеристики.

При выборе мощности исполнительного двигателя необходимо определить коэффициент передачи редуктора, при котором обеспечиваются заданные скорость вращения и ускорение на входном валу нагрузки, а требуемая мощность двигателя минимальна.

Рассмотрим двигатели, механические характеристики которых можно считать линейными (рис. 2.1, а). Линейными характеристиками обладают двигатели постоянного тока с независимым возбуждением. Кроме того, механические характеристики, достаточно близкие к линейным, имеют также широко применяемые в маломощных системах асинхронные двухфазные двигатели с полым ротором.

Наклон механических характеристик двигателя определяется коэффициентом кратности между пусковым и номинальным моментами:

$$m = M_{\text{п}}/M_{\text{ном}}. \quad (2.1)$$

Для асинхронных двигателей с полым ротором $m \approx 2$; для двигателей постоянного тока в замкнутых системах $m = 2 \div 2,5$. Поскольку во втором случае ток пропорционален моменту, то фактически величина m определяется допустимым пусковым током. В случае применения ЭМУ увеличение эквивалентного внутреннего сопротивления достигается некоторой недокомпенсацией реакции якоря по про-

дольной оси от тока нагрузки. В новой серии электромашинных усилителей типа ЭМУ-А для этой цели введена специальная обмотка.

В переходном режиме момент двигателя определяется уравнением

$$M = Jd\omega_d/dt + M_c, \quad (2.2)$$

из которого видно, что он идет на преодоление сил инерции и статического момента сопротивления. Предположим, что статический момент сопротивления обусловлен силами трения. В этом случае он является функцией знака скорости:

$$M_c(\omega_d) = M_c \operatorname{sign} \omega_d, \quad (2.3)$$

т. е. всегда оказывает тормозящее действие.

В замкнутой системе статический момент сопротивления на валу двигателя обычно существенно меньше максимального момента, развиваемого двигателем. Это объясняется тем, что статический момент сопротивления сужает линейный участок характеристики управления двигателя и создает у него зону нечувствительности (кривая 1 на рис. 2.1, б). Люфт редуктора при существенной ширине этой зоны приводит к значительным трудностям в обеспечении устойчивости системы автоматического управления.

Зону нечувствительности двигателя принято характеризовать напряжением трогания:

$$U_{\text{тр}} = (M_c/M_n) U_{y \text{ max}}, \quad (2.4)$$

где $U_{y \text{ max}}$ — максимальное напряжение на двигателе, соответствующее насыщению управляющего усилителя.

Величину этого напряжения стремятся сделать минимальной, что достигается выполнением соотношения $M_c \ll M_n$. Если $U_{\text{тр}} \leq 0,1 U_{y \text{ max}}$, то при анализе условий устойчивости системы характеристику управления двигателя можно заменить идеальной (кривая 2 на рис. 2.1, б). В реальных системах управления напряжение трогания двигателя обычно не берет больше $(0,2-0,25) U_{y \text{ max}}$. При $U_{\text{тр}} > 0,1 U_{y \text{ max}}$ устойчивость системы управления определяется с учетом зоны нечувствительности двигателя и люфта редуктора.

Чтобы уменьшить влияние этих нелинейностей на устойчивость системы, целесообразно применить коррекцию в виде обратной связи по производным от выходной координаты двигателя.

В расчетах зону нечувствительности характеристики управления двигателя удобно определять через коэффициент

$$\gamma_c = M_c/M_n = U_{\text{тр}}/U_{y \text{ max}}.$$

При линейных механических характеристиках и максимальном управляющем напряжении $U_{y \text{ max}}$ развиваемая двигателем мощность на валу (вт)

$$P_d = M\omega_d = M\omega_{d0} (1 - M/M_n), \quad (2.5)$$

где ω_{d0} — скорость идеального х. х. двигателя, рад/сек ; M — момент двигателя, $\text{н}\cdot\text{м}$.

Кривая $P_d = M\omega_d$ показана на рис. 2.1, а. При $M = 0,5 M_n$ и $\omega_d = 0,5\omega_{d0}$ мощность двигателя достигает максимального значения

$$P_{d \max} = 0,25M_n\omega_{d0}. \quad (2.6)$$

Рассмотрим методику выбора мощности двигателя для случая, когда заданы момент инерции J_n [кг·м²] и статический момент сопротивления $M_{с.н}$ [н·м] на входном валу нагрузки; максимальные скорость вращения $\omega_{n \max}$ [рад/сек] и ускорение $\varepsilon_{n \max}$ [рад/сек²] нагрузки.

В большинстве случаев передаточная функция двигателя с подключенной нагрузкой

$$W_d(s) = \frac{\omega_d(s)}{U_y(s)} = \frac{s\alpha_d(s)}{U_y(s)} = \frac{k_d}{T_{эм}s + 1}, \quad (2.7)$$

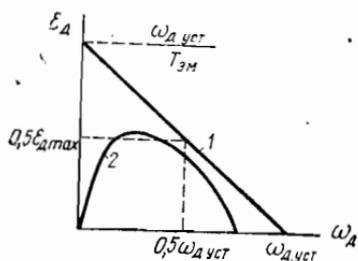


Рис. 2.2. Зависимости между скоростью и ускорением двигателя

где $T_{эм}$ — электромеханическая постоянная времени двигателя с учетом момента инерции нагрузки, сек.

При включении на источник с напряжением $U_{y \max}$ переходный процесс в таком двигателе определяется уравнением

$$\omega_d(t) = \omega_{d.уст} (1 - e^{-t/T_{эм}}). \quad (2.8)$$

Установившаяся скорость вращения двигателя зависит от статического момента сопротивления на валу:

$$\omega_{d.уст} = \omega_{d0} (1 - \gamma_c). \quad (2.9)$$

Ускорение, развиваемое двигателем, можно найти, продифференцировав (2.8):

$$\varepsilon_d(t) = \frac{\omega_{d.уст}}{T_{эм}} e^{-t/T_{эм}}. \quad (2.10)$$

Уравнения (2.8) и (2.10) по существу определяют предельные значения скорости и ускорения, которые может развивать двигатель в режиме разгона (при торможении в зависимости от вида цепи управления ускорение на валу двигателя может быть больше). Величины ω_d и ε_d взаимосвязаны соотношением

$$\varepsilon_d = \frac{\omega_{d0} (1 - \gamma_c)}{T_{эм}} \left[1 - \frac{\omega_d}{\omega_{d0} (1 - \gamma_c)} \right], \quad (2.11)$$

представленным зависимостью 1 на рис. 2.2.

В замкнутой системе развиваемые двигателем скорости и ускорения связаны более сложно, так как управляющее напряжение двигателя является функцией времени, определяемой динамическими свойствами всех звеньев системы. На рис. 2.2 кривая 2 показывает пример этой связи в двигательном квадранте при работе управляющего усилителя без насыщения. Если при этом на валу нагрузки

обеспечиваются заданные максимальные значения скорости и ускорения, то такая кривая фактически определяет мощность двигателя, необходимую для создания динамического момента на валу. Совершенно ясно, что получить подобную зависимость до выбора двигателя, редуктора и других элементов системы невозможно.

Из-за отсутствия достаточной информации приходится выбирать двигатель методом последовательных приближений.

Из (2.2) и (2.5) следует, что усилитель, управляющий двигателем, будет работать в линейном режиме при выходном напряжении $u_y \leq \leq U_{y \max}$, если выполняется условие

$$P_d \geq J \frac{\varepsilon_n \omega_n}{k_p^2} + M_c \frac{\omega_n}{k_p}, \quad (2.12)$$

где $J = \sigma J_d + k_p^2 J_n$ — суммарный момент инерции, приведенный к валу двигателя (J_d — собственный момент инерции двигателя; σ — коэффициент, учитывающий момент инерции редуктора; $k_p^2 J_n$ — момент инерции нагрузки, приведенный к валу двигателя); $M_c = M_{c,d} + + k_p M_{c,n} / \eta_p$ — суммарный статический момент сопротивления, приведенный к валу двигателя ($M_{c,d}$ — собственный статический момент сопротивления двигателя, учитывается для маломощных двигателей постоянного тока, в которых относительно велики потери на трение между щетками и коллектором; $k_p M_{c,n} / \eta_p$ — статический момент сопротивления нагрузки, приведенный к валу двигателя; η_p — к. п. д. редуктора).

Соотношение (2.12) содержит ряд неизвестных, поэтому необходимо ввести некоторые допущения. Будем считать, что заданные величины $\omega_n \max$ и $\varepsilon_n \max$, характеризующие динамические качества системы управления, наблюдаются одновременно. Следовательно, при $\omega_n \max$ и $\varepsilon_n \max$ потребляемая мгновенная мощность на валу максимальна и соотношение (2.12) приобретает более удобный вид:

$$P_{d \max} \geq J \frac{\varepsilon_n \max \omega_n \max}{k_p^2} + M_c \frac{\omega_n \max}{k_p}. \quad (2.13)$$

Так как мощность двигателя достигает наибольшей величины при $\omega_d = 0,5 \omega_{d0}$, то желательным коэффициентом передачи редуктора является

$$k_p = 2 \omega_n \max / \omega_{d0}. \quad (2.14)$$

Найдем оптимальное значение k_p , при котором момент двигателя, а следовательно, и мощность, необходимые для обеспечения $\omega_n \max$ и $\varepsilon_n \max$, минимальны. Исключая из рассмотрения величину $M_{c,d}$, на основании (2.13) запишем

$$M = k_p \frac{P_d}{\omega_n \max} = (\sigma J_d + k_p^2 J_n) \frac{\varepsilon_n \max}{k_p} + \frac{1}{\eta_p} k_p M_{c,n}. \quad (2.15)$$

Минимизируя (2.15) относительно k_p , получим оптимальное значение коэффициента передачи редуктора:

$$k_{p \text{ опт}} = \sqrt{\frac{\sigma J_d \varepsilon_n \max}{J_n \varepsilon_n \max + M_{c,n} / \eta_p}}. \quad (2.16)$$

Приравнивая (2.14) и (2.16), найдем

$$J_d \omega_{до}^2 = \frac{4\omega_n^2 \max}{\sigma \varepsilon_n \max} \left(J_n \varepsilon_n \max + \frac{1}{\eta_p} M_{с.н} \right). \quad (2.17)$$

Подставляя выражение J_d из (2.17) и значение $k_p = k_{p.опт}$ в (2.15) определим минимальное требуемое значение момента двигателя:

$$M_{\min} = \frac{4\omega_n \max}{\omega_{до}} \left(J_n \varepsilon_n \max + \frac{1}{\eta_p} M_{с.н} \right). \quad (2.18)$$

В рассматриваемой задаче величина момента должна составлять $0,5M_{п.}$ При допустимых значениях $m = M_{п.}/M_{ном} = 2 \div 2,5$ можно считать, что $M_{ном} \approx 0,5 M_{п.}$ и $P_{д \max} \approx M_{ном} \omega_{до} / 2$.

На основании изложенного выбранный двигатель должен иметь величину $J_d \omega_{до}^2$, близкую к расчетной, и удовлетворять условию $M_{ном} \geq M_{\min}$.

Ориентировочно номинальная мощность двигателя

$$P_{ном} \approx \beta \omega_n \max (J_n \varepsilon_n \max + M_{с.н}), \quad (2.19)$$

где принимают $\beta \approx 2$, если $M_{с.н} < J_n \varepsilon_n \max$, или $\beta = 2 \div 3,5$, если $M_{с.н} \geq J_n \varepsilon_n \max$. Причем большие значения коэффициента β берут в случае применения двигателя постоянного тока, учитывая, что для такого двигателя может потребоваться искусственное смягчение механических характеристик.

Необходимые при расчете значения коэффициентов σ и η_p можно выбрать из следующих рекомендуемых величин: $\sigma = 1,1 \div 1,5$ — наибольшее значение принимается для маломощных асинхронных двигателей с полым ротором; $\eta_p = 0,7 \div 0,9$ — для редуктора с цилиндрическими зубчатыми передачами при $P_{ном} \leq 100 \text{ вт}$; $\eta_p = 0,9 \div 0,94$ — то же, при $P_{ном} > 100 \text{ вт}$.

Величины σ и η_p можно уточнить по справочным таблицам и графикам в процессе поверочного расчета после определения коэффициента передачи редуктора и выбора его кинематической схемы [3].

Сделав первоначальный выбор двигателя, необходимо произвести поверочный расчет исполнительного устройства в следующем порядке:

1) принять коэффициент передачи редуктора равным $k_{p.опт}$, определив его по формуле (2.16);

2) найти статический момент сопротивления на валу двигателя $M_{с.н} = M_{с.д} + k_{p.опт} M_{с.н} / \eta_p$ ($M_{с.д}$ учитывается для маломощных двигателей постоянного тока);

3) определить величину $\gamma_c = M_{с.н} / M_{п.}$ Если $\gamma_c \leq 0,1$, то для дальнейших расчетов принимается $k_{p.опт}$. Заметим, что в указанном случае значение $k_{p.опт}$ должно быть близким к значению k_p , определенному из (2.14). При $\gamma_c > 0,1$ также можно принять найденную величину $k_{p.опт}$, если обеспечение устойчивости системы не вызывает опасений. В случае необходимости уменьшения γ_c двигатель следует заменить на более мощный и принять для дальнейших расчетов величину k_p из (2.14);

4) вычислить электромеханическую постоянную времени двигателя $T_{эм} = J\omega_{до}/M_{п}$;

5) проверить соотношение (2.12) при $\omega_{н\max}$ и $\varepsilon_{н\max}$, взяв значение мощности $P_{д}$ при $\omega_{д} = \omega_{н\max}/k_p$, а величину развиваемого двигателем момента — из его механической характеристики. Если условие (2.12) выполняется и при этом запас по мощности невелик, то параметры выбранного двигателя следует считать удовлетворительными.

При выборе двигателя для замкнутой системы автоматического управления могут иметь место некоторые частные случаи. Например, при $J_{н\varepsilon_{н\max}} \gg M_{с.н}$ можно ожидать малого значения γ_c , что позволяет сразу принять

$$k_p = k_{p.опт} = \sqrt{\sigma J_{д}/J_{н}} \quad (2.20)$$

и выбрать двигатель из условия (2.13), в котором $M_c = 0$.

В случае $J_{н\varepsilon_{н\max}} \ll M_{с.н}$ накладываемое ограничение на величину γ_c может обусловить выбор двигателя с большим запасом по мощности, при котором фактическое ускорение, развиваемое двигателем, будет значительно превышать требуемое. При этом можно использовать двигатели с большим собственным моментом инерции.

Частным случаем является применение электродвигателя в позиционной следящей системе (см. § 2.3). Выбор двигателя для такой системы целесообразно связывать с параметрами других элементов и показателями качества проектируемой системы.

Специальным вопросом при проектировании исполнительного устройства является проверка выбранного двигателя по нагреву. Методы расчета нагрева двигателей при заданных законах изменения нагрузки подробно излагаются в руководствах по электроприводу [2, 4].

Изложенная методика выбора двигателя относится к случаю, когда его естественные механические характеристики являются мягкими либо искусственно смягчаются. Практика показывает, что при таких механических характеристиках и обычных типовых нагрузках (с периодическим или случайно изменяющимся динамическим моментом) тепловой режим двигателя остается нормальным, если температура внешней среды не превышает допустимого по техническому паспорту значения.

Для асинхронных двигателей с полым ротором нет необходимости рассчитывать тепловой режим, так как у таких двигателей ток управления мало зависит от величины момента. То же относится и к двигателям позиционных следящих систем, которые работают на установившейся скорости вращения.

§ 2.3. Выбор исполнительного двигателя и расчет параметров позиционных следящих систем малой мощности

Среди следящих систем большое распространение получили так называемые позиционные системы. Эти системы используются в автоматических программных установках различного назначения (в станках с программным управлением, электроннолучевых установках,

нагревательных печах с заданной программой нагрева и т. д.). Типичным режимом работы многих позиционных систем управления является отработка больших рассогласований при постоянной скорости привода, когда времена разгона и торможения исполнительного двигателя малы по сравнению с общим временем отработки. Последнее позволяет не учитывать момент инерции исполнительного механизма. При анализе позиционных систем следует иметь в виду, что во время отработки рассогласования усилитель насыщен и на двигатель подается максимальное управляющее напряжение $U_{y \max}$.

Быстродействие позиционной следящей системы определяется рядом величин, одной из которых является мощность исполнительного двигателя. Выбор двигателя по мощности для таких систем (как и в общем случае) также оказывается сложным из-за неоднозначности поставленной задачи. Неоднозначность задачи заключается в том, что при проектировании системы приходится определять ряд взаимосвязанных параметров системы, влияющих один на другой. При выборе исполнительного двигателя известен, как правило, лишь момент сопротивления нагрузки. Поэтому одновременно приходится решать задачу выбора двигателя по мощности, определять коэффициент передачи редуктора исходя из требований получения максимального быстродействия системы и согласовывать это с обеспечением устойчивости и заданными динамическими показателями качества системы.

Для решения поставленной задачи необходимо иметь аналитическое выражение предельной механической характеристики исполнительного двигателя, полученное по паспортным данным машины для номинального режима работы. В паспортных данных двигателя обычно указываются: $\omega_{до}$ — скорость холостого хода; $\omega_{д, ном}$ — номинальная скорость вращения; $M_{ном}$ — номинальный вращающий момент; $M_{п}$ — пусковой момент.

Часто на практике механическая характеристика двигателя снимается экспериментально и по графику находится ее аналитическое выражение. Механические характеристики двигателей могут быть линейными и нелинейными, в последнем случае они выражаются различными аналитическими зависимостями.

Общий подход к расчету привода позиционной следящей системы. Перепишем уравнение предельной механической характеристики исполнительного двигателя $M = f(\omega_{д})$ в относительных единицах $\mu = f(\Omega)$, введя обозначение относительного момента $\mu = M/M_{п}$ и относительной скорости вращения $\Omega = \omega_{д}/\omega_{до}$. Из равенства $M_c = k_p M_{с.н}$ получим соотношение

$$\mu_c = k_p \gamma_c, \quad (2.21)$$

где $\gamma_c = M_{с.н}/M_{п}$.

Выражение (2.21) может быть записано также в виде

$$f(\Omega) = k_p \gamma_c \quad (2.22)$$

и разрешено относительно Ω :

$$\Omega = F(k_p, \gamma_c).$$

Для позиционной системы время отработки рассогласования α_p равно

$$t = \frac{\alpha_p}{k_p \omega_d} = \frac{\alpha_p}{\omega_{до} k_p \Omega}. \quad (2.23)$$

Запишем (2.23) в относительных единицах:

$$\tau = 1 / (k_p \Omega), \quad (2.24)$$

где $\tau = t \omega_{до} / \alpha_p$.

Окончательно получим

$$\tau = \frac{1}{k_p F(k_p, \gamma_c)} = Q(k_p, \gamma_c). \quad (2.25)$$

Исследуя (2.25) на минимум относительно k_p , можно определить оптимальный коэффициент передачи редуктора $k_{p, \text{опт}}$. Введя обозначение

$$q = k_p / k_{p, \text{опт}}, \quad (2.26)$$

для интервала $0 \leq q \leq 1$ можно записать зависимости:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{k_y}{k_{y, \text{опт}}} = F_1(q); & \lambda &= \frac{k}{k_{\text{опт}}} = F_2(q); \\ p &= \frac{P_d}{P_{d \text{ max опт}}} = F_3(q); & T &= \frac{t}{t_{\text{min}}} = F_4(q), \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

где k_y , k , P_d , t — соответственно коэффициент усиления усилителя, добротность следящей системы, полезная мощность исполнительного двигателя и время отработки заданного рассогласования при различных значениях k_p . Параметры $k_{y, \text{опт}}$, $k_{\text{опт}}$, $P_{d \text{ max опт}}$, t_{min} соответствуют оптимальному коэффициенту передачи редуктора.

Анализ полученных зависимостей позволяет выбрать двигатель по мощности и определить параметры следящей системы, необходимые в дальнейшем для расчета устойчивости и показателей качества.

Расчет привода и определение параметров следящей системы при линейных механических характеристиках двигателя. Уравнение механической характеристики двигателя (рис. 2.3) запишется как

$$\omega_d = \left(1 - \frac{k_p M_{с.н}}{M_{п}} \right),$$

или в относительных единицах

$$\Omega = 1 - \mu,$$

так как $k_p M_{с.н} = M$.

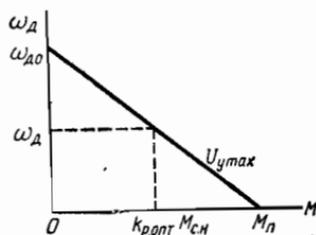


Рис. 2.3. Механическая характеристика двигателя

Учитывая (2.21), получим

$$\Omega = 1 - k_p \gamma_c. \quad (2.28)$$

Принимая во внимание (2.24), определим время отработки:

$$\tau = \frac{1}{k_p (1 - k_p \gamma_c)}. \quad (2.29)$$

Исследуя (2.29) на минимум, найдем оптимальный коэффициент передачи редуктора:

$$k_{p, \text{ опт}} = 1/2\gamma_c = M_{\text{п}}/2M_{\text{с.н}}, \quad (2.30)$$

при котором минимальное время отработки заданного рассогласования

$$t_{\text{мин}} = 4\gamma_c \alpha_p / \omega_{\text{до}},$$

или в безразмерной форме

$$t_{\text{мин}} = 4\gamma_c. \quad (2.31)$$

Из (2.30) следует, что

$$k_{p, \text{ опт}} M_{\text{с.н}} = M_{\text{п}}/2; \quad \omega_{\text{д}} = \omega_{\text{до}}/2.$$

При этом напряжение трогания двигателя принимает максимальное значение:

$$U_{\text{тр max}} = U_{\text{у max}}/2. \quad (2.32)$$

Соотношение (2.32) показывает, что напряжение трогания двигателя, обусловленное приведенным к его валу моментом сопротивления, при оптимальном коэффициенте передачи редуктора составляет половину напряжения насыщения усилителя. При этом в точке $\omega_{\text{д}} = \omega_{\text{до}}/2$ двигатель развивает максимальную мощность

$$P_{\text{д max}} = k_{p, \text{ опт}} M_{\text{с.н}} \omega_{\text{д}} / \eta_p, \quad (2.33)$$

где η_p — к. п. д. редуктора.

Следовательно, выбор коэффициента передачи редуктора по формуле (2.30) обеспечивает минимум времени отработки заданного рассогласования. В этом случае двигатель полностью используется по мощности. Однако, чтобы получить заданную точность отработки, требуется максимальный коэффициент усиления усилителя

$$k_{\text{у max}} \geq U_{\text{тр max}} / U_{\delta}, \quad (2.34)$$

где U_{δ} — минимальный сигнал, равный зоне нечувствительности следящей системы, получаемый с датчика обратной связи.

Для значений параметров элементов позиционной следящей системы, определяемых выражениями (2.30) и (2.34), добротность системы достигает максимальной величины $k = k_{\text{у max}} k_{\text{д}} k_{p, \text{ опт}} k_{\text{д.о.с}} (k_{\text{д.о.с}} — коэффициент передачи датчика обратной связи)$, что усложняет задачу обеспечения устойчивости системы.

Выражения (2.27) позволяют определить коэффициент усиления усилителя, добротность следящей системы, полезную мощность испол-

нительного двигателя и быстродействие системы в зависимости от коэффициента передачи редуктора. Для рассматриваемого случая получим:

$$\beta = \frac{k_y}{k_{y \max}} = \frac{U_{\text{тр}}}{U_{\text{тр} \max}} = \frac{M_{\text{с.н}} k_p}{M_{\text{с.н}} k_{p. \text{опт}}} = \frac{k_p}{k_{p. \text{опт}}} = q; \quad (2.35)$$

$$\lambda = \frac{k}{k_{\max}} = \frac{k_y k_d k_p k_{\partial. \text{о.с}}}{k_{y \max} k_d k_{p. \text{опт}} k_{\partial. \text{о.с}}} = \frac{k_y k_p}{k_{y \max} k_{p. \text{опт}}} = q^2; \quad (2.36)$$

$$p = \frac{P_d}{P_{d \max}} = \frac{k_p M_{\text{с.н}} \omega_d 2\eta_p}{\eta_p k_{p. \text{опт}} M_{\text{с.н}} \omega_{\text{до}}} = \frac{k_p 2\omega_d}{k_{p. \text{опт}} \omega_{\text{до}}} = \frac{2k_p (1 - k_p / 2k_{p. \text{опт}}) \omega_{\text{до}}}{k_{p. \text{опт}} \omega_{\text{до}}} = q(2 - q); \quad (2.37)$$

$$T = \frac{t}{t_{\min}} = \frac{\alpha_p \omega_{\text{до}}}{k_p (1 - k_p \gamma_c) \omega_{\text{до}} 4\gamma_c \alpha_p} = \frac{1}{4 \frac{k_p}{2k_{p. \text{опт}}} \left(1 - \frac{k_p}{2k_{p. \text{опт}}}\right)} = \frac{1}{q(2 - q)}. \quad (2.38)$$

Зависимости $\lambda(q)$, $p(q)$ и $T(q)$, рассчитанные для $0 \leq q \leq 1$, показаны на рис. 2.4. Анализ графиков и опыт практической реализации следящих систем позволяют сделать следующие выводы:

1) в реальных системах, как правило, величина $q \leq 0,1 \div 0,2$.

При увеличении q очень трудно обеспечить устойчивость системы, так как начинает сказываться влияние малых параметров, в частности электромеханической постоянной времени, инерционности усилителя и др.;

2) из рис. 2.4 видно, что при указанных значениях q достигается хорошее использование двигателя по мощности (20 — 35%) и достаточно низкая добротность, равная $0,05 \div 0,01$ от максимального значения;

3) величина T , характеризующая время отработки системы, лежит в пределах $2,8 \div 5,3$;

4) при проектировании систем целесообразно стремиться к получению больших значений q , если при этом удается достаточно простыми средствами обеспечить устойчивость следящей системы.

Таким образом, последовательность определения параметров позиционной следящей системы должна быть следующей. По формуле (2.33) находим

$$P_{d \max} = \frac{M_{\text{с.н}} k_{p. \text{опт}} \omega_d}{\eta_p} = \frac{M_{\text{с.н}} \omega_p}{\eta_p},$$

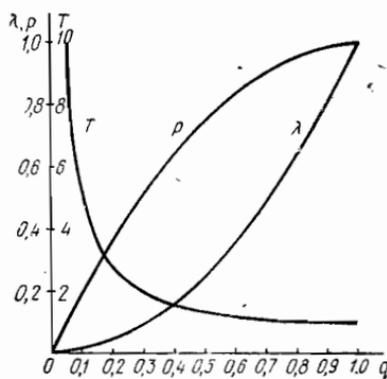


Рис. 2.4. Зависимости $\lambda(q)$, $p(q)$, $T(q)$ при $0 \leq q \leq 1$

где $M_{с.н}$ обычно задается; величина ω_p известна в пределах от $\omega_{p \min}$ до $\omega_{p \max}$; η_p берется по справочнику исходя из предполагаемого типа редуктора. При $\omega_{p \max}$ получаем $P_{д \max}$ и выбираем двигатель с мощностью, равной приблизительно $(3 \div 4) P_{д \max}$. Определив величину p , равную отношению $P_{д \max}$ к мощности выбранного двигателя $P_{д}$, по графикам (см. рис. 2.4) находим основные параметры системы (k_p , k и T).

Расчет привода и определение параметров следящей системы при нелинейных механических характеристиках двигателя. Большинство

исполнительных двигателей (в частности, асинхронные двухфазные двигатели) имеют нелинейную механическую характеристику. Точное математическое описание зависимости скорости двигателя от момента, как правило, весьма громоздко и практически не может быть использовано. Аналитическое выражение предельной механической характеристики при $u_y = U_{y \max}$ может быть представлено различными нелинейными зависимостями, которые будут справедливы (с той или иной степенью точности) для различных типов двигателей.

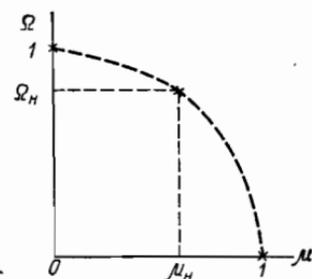


Рис. 2.5. Механическая характеристика привода

Следовательно, необходимо определить по паспортным данным двигателя значения коэффициентов функции $\Omega = \varphi(\mu)$ или $\mu = f(\Omega)$, описывающей механическую характеристику привода (рис. 2.5), например в виде

$$\mu = \frac{1 - \Omega}{a - \Omega} a, \quad (2.39)$$

или

$$\Omega = \frac{1 - \mu}{a - \mu} a,$$

где

$$a = \frac{\mu_n \Omega_n}{\mu_n + \Omega_n - 1} > 1 \quad (\text{здесь } \mu_n = M_{д. \text{ ном}} / M_{п});$$

$$\Omega = \omega_{д. \text{ ном}} / \omega_{до}.$$

Выражение (2.39) может быть использовано, если в двигательном квадранте механическая характеристика $\Omega = \varphi(\mu)$ не имеет неустойчивого участка (справедливо для большинства маломощных двухфазных асинхронных двигателей). При этом возможно также использование зависимости вида (рис. 2.6, штриховая линия)

$$\Omega = \sqrt{1 - \mu}. \quad (2.40)$$

Однако применение функции (2.40) для описания предельной механической характеристики возможно лишь в том случае, если точка номинального режима лежит на кривой $\Omega = \sqrt{1 - \mu}$, например при $\mu_{\text{ном}} = 0,67$ и $\Omega_{\text{ном}} = 0,57$.

Очень часто для описания механической характеристики двигателя используется формула Клосса

$$\mu = \frac{2s_{кр}(1-\Omega)}{\Omega^2 - 2\Omega + 1 + s_{кр}^2}, \quad (2.41)$$

где $s_{кр} = \frac{s_{ном}}{\mu_{ном}} (1 + \sqrt{1 - \mu_{ном}^2})$ — критическое скольжение; $s_{ном}$ — номинальное скольжение.

Возможны и другие аппроксимации механической характеристики двигателя. Например, аппроксимация полиномом второго порядка

$$\mu = \alpha\Omega^2 + \beta\Omega + c, \quad (2.42)$$

или

$$\mu = \frac{1-\Omega}{\alpha\Omega^2 + \beta\Omega + 1}. \quad (2.43)$$

Формулы (2.41)–(2.43) используются при наличии максимума момента в двигательном квадранте.

Чтобы получить рекомендации по выбору мощности двигателя и параметров позиционной следящей системы, исследуем аналитическое выражение механической характеристики (2.39). Учитывая (2.24) и (2.21), запишем

$$\tau = \frac{1}{k_p \Omega} = \frac{a - k_p \gamma_c}{k_p a (1 - k_p \gamma_c)}. \quad (2.44)$$

Исследуем (2.44) на минимум и определим оптимальный коэффициент передачи редуктора:

$$k_{p, опт} = \frac{a - \sqrt{a^2 - a}}{\gamma_c}. \quad (2.45)$$

Расчеты показывают, что коэффициент a уравнения (2.39) лежит в пределах $1 < a < 3$ (рис. 2.6). Чтобы получить зависимости (2.27), необходимо иметь конкретное значение a . Полагаем $a = 2$, тогда

$$k_{p, опт} = 0,6/\gamma_c, \quad (2.46)$$

откуда

$$k_{p, опт} M_{с. н} = 0,6 M_{п}; \quad (2.47)$$

$$\frac{\omega_{д}}{\omega_{до}} = 2 \frac{1 - k_{p, опт} \gamma_c}{2 - k_{p, опт} \gamma_c} = 2 \frac{1 - 0,6}{2 - 0,6} = 0,57, \quad (2.48)$$

т. е.

$$\omega_{д} = 0,57 \omega_{до}.$$

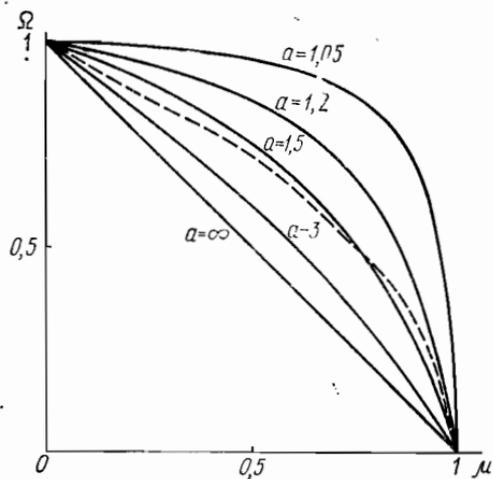


Рис. 2.6. Аппроксимированные механические характеристики привода при разных значениях коэффициента a

Определяем минимальное время обработки заданного рассогласования:

$$\tau = \frac{2 - \frac{0,6}{\gamma_c} \gamma_c}{2 \frac{0,6}{\gamma_c} \left(1 - \frac{0,6}{\gamma_c} \gamma_c \right)} = 2,9 \gamma_c. \quad (2.49)$$

Теперь нетрудно получить искомые зависимости (2.35) и (2.36) для β и λ , а величины T и ρ определить по формулам:

$$T = \frac{\tau}{\tau_{\min}} = \frac{2 - k_p \gamma_c}{2 (k_p - 2k_p^2 \gamma_c) 2,9 \gamma_c} = \frac{2 - 0,6q}{q (3,48 - 2,08q)}; \quad (2.50)$$

$$\rho = \frac{M_{с.н} k_p \omega_d \eta_p}{\eta_p M_{с.н} k_{p.опт} 0,57 \omega_{до}} = \frac{k_p \omega_d}{k_{p.опт} 0,57 \omega_{до}}. \quad (2.51)$$

Заметим, что при определении λ коэффициент передачи двигателя принят постоянным на основании линеаризации механической характеристики [3]. После подстановки величины ω_d и упрощений получим

$$\rho = 3,5q \frac{1 - 0,6q}{2 - 0,6q}. \quad (2.52)$$

Если точка номинального режима выбрана на кривой, (см. рис. 2.6, штриховая линия), построенной по (2.40), то получаем простые аналитические выражения для всех параметров системы.

Литература к главе II

1. В. А. Хохлов. Электрогидравлический следящий привод. «Наука», 1964.
2. П. С. Мелкозеров. Энергетический расчет систем автоматического управления и следящих приводов. «Энергия», 1968.
3. Д. В. Васильев и др. Проектирование и расчет следящих систем. «Судостроение», 1964.
4. В. П. Андреев, Ю. А. Сабинин. Основы электропривода. Госэнергоиздат, 1963.

РАСЧЕТ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТИ В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ

§ 3.1. Передаточные функции системы автоматического управления

Структурная схема линейной системы автоматического управления с неединичной обратной связью показана на рис. 3.1, а, где $W(s)$ и $W_{o.c}(s)$ — передаточные функции элементов системы, находящихся в основном тракте и в канале главной обратной связи; $W_f(s)$ — передаточная функция разомкнутой системы по возмущающему воздействию.

Рассматривая воздействие по каждому входу независимо от других, запишем передаточную функцию замкнутой системы по управляющему воздействию (при $f = 0$):

$$\Phi_g(s) = \frac{X(s)}{G(s)} = \frac{W(s)}{1 + W(s)W_{o.c}(s)}. \quad (3.1)$$

Передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию

$$\Phi_f(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{W_f(s)}{1 + W(s)W_{o.c}(s)}. \quad (3.2)$$

Часто канал обратной связи не содержит динамических элементов и тогда, после приведения в соответствие масштабов выходной вели-

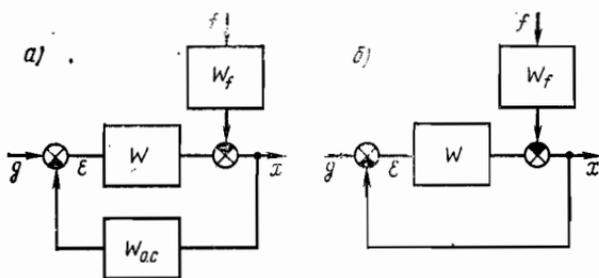


Рис. 3.1. Структурные схемы систем автоматического управления

чины и управляющего воздействия, в (3.1) и (3.2) полагаем $W_{o.c}(s) = 1$. В данном случае система относится к числу систем с единичной обратной связью, ее структурная схема показана на рис. 3.1, б.

При исследовании точности системы управления в установившемся режиме целесообразно располагать выражениями для передаточной

функции ошибки замкнутой системы по управляющему и по возмущающему воздействиям:

$$\Phi_{eg}(s) = \frac{E(s)}{G(s)} = \frac{1}{1 + W(s)W_{o.c}(s)}; \quad (3.3)$$

$$\Phi_{ef}(s) = \frac{E(s)}{F(s)} = \frac{W_f(s)W_{o.c}(s)}{1 + W(s)W_{o.c}(s)}. \quad (3.4)$$

Если система имеет единичную обратную связь, то в формулах (3.3) и (3.4) значение $W_{o.c}(s) = 1$.

На основании принципа суперпозиции с помощью передаточных функций замкнутой системы получим изображения выходной величины и сигнала ошибки:

$$X(s) = X_g(s) + X_f(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)W_{o.c}(s)} G(s) + \frac{W_f(s)}{1 + W(s)W_{o.c}(s)} F(s); \quad (3.5)$$

$$E(s) = E_g(s) + E_f(s) = \frac{1}{1 + W(s)W_{o.c}(s)} G(s) + \frac{W_f(s)}{1 + W(s)W_{o.c}(s)} F(s). \quad (3.6)$$

Составляющая ошибки $e_g = L^{-1}\{E_g(s)\}$ зависит от управляющего воздействия и называется *ошибкой по управляющему воздействию*; составляющая ошибки $e_f = L^{-1}\{E_f(s)\}$ соответственно называется *ошибкой по возмущающему воздействию*.

§ 3.2. Определение установившихся ошибок в системах автоматического управления

Одно из основных требований, которым должна удовлетворять система автоматического управления, заключается в обеспечении необходимой точности воспроизведения задающего (управляющего) сигнала в установившемся режиме. Для оценки точности системы определяется установившаяся ошибка, которая может быть получена из выражения (3.6) с помощью теоремы о конечном значении функции:

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_g(s) + \lim_{s \rightarrow 0} sE_f(s). \quad (3.7)$$

Если управляющее воздействие $g(t)$ имеет произвольный характер, то ошибку системы можно найти с помощью коэффициентов ошибок. Рассматривая системы с единичной обратной связью, определим на основании (3.3) и (3.6) изображение ошибки по управляющему воздействию:

$$E_g(s) = \Phi_{eg}(s) G(s) = \frac{1}{1 + W(s)} G(s). \quad (3.8)$$

Передаточную функцию Φ_{eg} представим в виде ряда

$$\Phi_{eg}(s) = C_0 + C_1s + C_2s^2 + C_3s^3 + \dots, \quad (3.9)$$

сходящегося при малых s , что соответствует установившемуся режиму или достаточно большим значениям времени t .

Коэффициенты этого ряда называются *коэффициентами ошибок* и определяются с помощью выражений

$$C_0 = [\Phi_{eg}(s)]_{s=0}, \quad C_1 = \left[\frac{d\Phi_{eg}(s)}{ds} \right]_{s=0}, \quad \dots, \quad C_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n \Phi_{eg}(s)}{ds^n} \right]_{s=0} \quad (3.10)$$

или непосредственным делением полинома числителя на полином знаменателя передаточной функции.

Коэффициенты C_0 , C_1 и C_2 называются соответственно *коэффициентами позиционной ошибки, скоростной ошибки и ошибки от ускорения*.

Переходя в формуле (3.8) к оригиналу и учитывая (3.9), выразим установившуюся ошибку через коэффициенты ошибок, управляющее воздействие и его производные:

$$\varepsilon_g(t) = C_0 g(t) + C_1 \frac{dg(t)}{dt} + C_2 \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \dots \quad (3.11)$$

Аналогично можно ввести понятие коэффициентов ошибок по возмущающему воздействию.

§ 3.3. Точность систем автоматического управления при типовых воздействиях

Обычно анализ работы систем автоматического управления выполняется при типовых воздействиях, близких к реальным управляющим и возмущающим воздействиям в нормальных или наиболее трудных режимах работы.

Рассмотрим установившийся режим системы с единичной обратной связью при постоянных возмущающем [$g(t) = g_0 = \text{const}$] и управляющем [$f(t) = f_0 = \text{const}$] воздействиях. В этом случае ошибка системы называется *статической* и находится с помощью выражения (3.7):

$$\varepsilon_\infty = \varepsilon_{g\infty} + \varepsilon_{f\infty} = \frac{1}{1+W(0)} g_0 + \frac{W_f(0)}{1+W(0)} f_0 \quad (3.12)$$

В статических системах автоматического управления значение $W(0) = k$, где k — коэффициент передачи разомкнутой системы. При этом составляющая статической ошибки от управляющего воздействия

$$\varepsilon_{g\infty} = g_0 / (1 + k). \quad (3.13)$$

Составляющая статической ошибки от возмущающего воздействия

$$\varepsilon_{f\infty} = k_f f_0 / (1 + k), \quad (3.14)$$

где $k_f = W_f(0)$ — коэффициент передачи системы между точками приложения возмущения и выхода системы (коэффициент передачи разомкнутой системы по возмущающему воздействию).

В ряде случаев кроме ошибок этих двух составляющих необходимо учитывать и ошибку чувствительного элемента $\varepsilon_{ч.э}$, который не является идеальным.

Таким образом, результирующая статическая ошибка системы управления

$$\varepsilon_{\infty} = \varepsilon_{g\infty} + \varepsilon_{f\infty} + \varepsilon_{ч.э}. \quad (3.15)$$

В астатических системах автоматического управления $W(0) \rightarrow \infty$, поэтому составляющая ошибки $\varepsilon_{g\infty} = 0$. Вторая составляющая ошибки $\varepsilon_{f\infty}$ при $W(0) \rightarrow \infty$ не всегда обращается в нуль, так как возможен случай, когда и $W_f(0) \rightarrow \infty$. Для того чтобы статическая ошибка системы при постоянном возмущающем воздействии была равна нулю, необходимо интегрирующее (астатическое) звено включить в цепь обратной связи относительно приложенного возмущения и выхода системы. Однако повышение порядка астатизма в следящих системах за счет включения интегрирующих звеньев в прямой цепи системы не может исключить ошибку чувствительного элемента, которую следует рассматривать как эквивалентное постоянное возмущение.

Режим работы при постоянных управляющих и возмущающих воздействиях наиболее характерен для систем автоматической стабилизации.

Рассмотрим теперь установившееся состояние при изменении управляющего воздействия с постоянной скоростью $g(t) = \dot{g}_0 t$ (где $\dot{g}_0 = \text{const}$) и постоянном значении возмущающего воздействия $f(t) = f_0 = \text{const}$. По (3.7) найдем установившуюся ошибку:

$$\varepsilon_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\dot{g}_0}{s[1+W(s)]} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{W_f(s)f_0}{1+W(s)}. \quad (3.16)$$

Первый член этого выражения в статической системе при $W(0) = k$ стремится к бесконечности, поэтому система автоматического управления или следящая система, работающая в режиме слежения с постоянной скоростью, должна быть астатической относительно управляющего воздействия. Второе слагаемое определяет статическую ошибку системы от возмущающего воздействия, в которую также необходимо включить ошибку чувствительного элемента.

Для системы с астатизмом первого порядка установившаяся ошибка от управляющего воздействия

$$\varepsilon_{g\infty} = \dot{g}_0/k_v, \quad (3.17)$$

где $k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sW(0)$ — коэффициент передачи (добротность) системы по скорости.

Ошибка $\varepsilon_{g\infty}$ называется *скоростной ошибкой от управляющего воздействия*.

В системе с астатизмом второго порядка и выше скоростная ошибка равна нулю (так как $k_v \rightarrow \infty$), поэтому режим с управляющим воздействием, изменяющимся с постоянной скоростью, используется только для оценки точности следящих систем с астатизмом первого порядка.

Рассмотрим установившийся режим в системе при изменении управляющего воздействия с постоянным ускорением $g(t) = \ddot{g}_0 t^2/2$ (где $\ddot{g}_0 = \text{const}$) и постоянном значении возмущающего воздействия $f(t) = f_0 = \text{const}$.

Аналогично определяется установившаяся ошибка [см. (3.7)]:

$$\varepsilon_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\ddot{g}_0}{s^2 [1 + W(s)]} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{W_f(s) f_0}{1 + W(s)}. \quad (3.18)$$

В статической и астатической системе первого порядка первая составляющая ошибки стремится к бесконечности, поэтому этот режим имеет смысл только для следящих систем с астатизмом второго порядка, для которых ошибка по управляющему воздействию

$$\varepsilon_{g\infty} = \ddot{g}_0/k_a, \quad (3.19)$$

где $k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 W(s)$ — коэффициент передачи (добротность) системы по ускорению.

Ошибка $\varepsilon_{g\infty}$ называется *установившейся ошибкой системы от ускорения*. Этот режим работы обычно применяется для оценки точности следящих систем с астатизмом второго порядка.

Второе слагаемое, как и в предыдущем случае, вместе с ошибкой чувствительного элемента определяет статическую ошибку системы от возмущающего воздействия.

Рассмотрим теперь установившийся режим системы регулирования при изменении управляющего воздействия по гармоническому закону

$$g(t) = g_{\max} \sin \omega_k t.$$

Для упрощения предположим, что возмущающее воздействие равно нулю. В этом случае ошибка в установившемся режиме также изменяется по гармоническому закону с частотой ω_k :

$$\varepsilon_g(t) = \varepsilon_{\max} \sin(\omega_k t + \varphi).$$

Точность системы в этом режиме можно оценить по амплитуде ошибки, которая находится из (3.6) путем подстановки $s = j\omega_k$ (при $f = 0$) и определения модуля полученного выражения:

$$\varepsilon_{\max} = |\Phi_{eg}(j\omega_k)| g_{\max} = g_{\max} / |1 + W(j\omega_k)|. \quad (3.20)$$

При $|W(j\omega_k)| \gg 1$

$$\varepsilon_{\max} \approx g_{\max} / |W(j\omega_k)| = g_{\max} / R(\omega_k), \quad (3.21)$$

где $R(\omega_k)$ — модуль частотной характеристики разомкнутой системы.

Выражение (3.21) удобно применять, если используется метод логарифмических частотных характеристик (см. пример 3.4).

Пример 3.1. Передаточная функция разомкнутой следящей системы с единичной обратной связью

$$W(s) = \frac{k}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}.$$

Определим коэффициенты ошибок C_0 , C_1 и C_2 , считая, что возмущающее воздействие равно нулю. Для управляющего воздействия передаточная функция системы по ошибке

$$\Phi_{eg}(s) = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{s(1+T_1s)(1+T_2s)}{s(1+T_1s)(1+T_2s)+k}. \quad (3.22)$$

Раскроем скобки в числителе и знаменателе выражения (3.22) и представим $\Phi_{eg}(s)$ в виде ряда, для чего разделим числитель на знаменатель:

$$\frac{s + (T_1 + T_2)s^2 + T_1T_2s^3}{s + \frac{1}{k}s^2 + \frac{T_1+T_2}{k}s^3 + \frac{T_1T_2}{k}s^4} \left| \frac{k + s + (T_1 + T_2)s^2 + T_1T_2s^3}{\frac{1}{k}s + \frac{1}{k}\left(T_1 + T_2 - \frac{1}{k}\right)s^2 + \dots} \right.$$

$$\left. \left(T_1 + T_2 - \frac{1}{k}\right)s^2 + \left(T_1T_2 - \frac{T_1+T_2}{k}s^3 + \frac{T_1T_2}{k}\right)s^4 \right.$$

Сравнивая полученный в частном ряд с выражением (3.9), найдем коэффициенты ошибок:

$$C_0 = 0, \quad C_1 = \frac{1}{k}, \quad C_2 = \frac{1}{k} \left(T_1 + T_2 - \frac{1}{k} \right) \text{ и т. д.}$$

Пример 3.2. Для следящей системы, рассмотренной в примере 3.1, определим величину установившейся ошибки, если на вход системы подано управляющее воздействие, изменяющееся с постоянной скоростью $\dot{g}_0 = 10$ град/сек, а коэффициент передачи по скорости $k = k_v = 50$ 1/сек.

В этом случае (при $f = 0$) установившаяся ошибка системы [см. (3.17)]

$$\varepsilon_\infty = \dot{g}_0/k_v = 10/50 = 0,2^\circ = 12'.$$

Пример 3.3. Для следящей системы, рассмотренной в примере 3.2, при $T_1 = 0,01$ сек и $T_2 = 0,04$ сек найдем амплитуду ошибки в случае синусоидальном управляющем воздействии с амплитудой $g_{\max} = 10^\circ$ и периодом $T_h = 5$ сек.

Амплитуду ошибки при гармоническом воздействии определим с помощью выражения (3.20). При частоте $\omega = \omega_h = 2\pi/T_h = 2\pi/5$ имеем

$$|\Phi_\varepsilon(j\omega)| = \left| \frac{4 \cdot 10^{-4} (j\omega_h)^3 + 5 \cdot 10^{-2} (j\omega_h)^2 + j\omega_h}{4 \cdot 10^{-4} (j\omega_h)^3 + 5 \cdot 10^{-2} (j\omega_h) + 50} \right| = \left| \frac{7,8 \cdot 10^{-2} + j 1,25}{50 + j 1,25} \right| = 0,025$$

и, следовательно,

$$\varepsilon_{\max} = |\Phi_\varepsilon(j\omega_h)| g_{\max} = 0,025 \cdot 10 = 0,25^\circ = 15'.$$

Для приближенного вычисления амплитуды ошибки определим модуль частотной характеристики разомкнутой системы при $\omega = \omega_h$:

$$R(\omega_h) = \frac{50}{1,25 \sqrt{1 + 1,25^2 \cdot 0,01^2} \sqrt{1 + 1,25^2 \cdot 0,04^2}} = 40.$$

Согласно формуле (3.21)

$$\varepsilon_{\max} \approx g_{\max}/R(\omega_h) = 10/40 = 0,25^\circ = 15'.$$

Пример 3.4. Для следящей системы (с единичной обратной связью) логарифмическая амплитудно-частотная характеристика разомкнутой системы которой показана на рис. 3.2, определим амплитуду ошибки при синусоидальном управляющем воздействии с амплитудой $g_{\max} = 10^\circ$ и частотой $\omega_h = 0,2$ 1/сек.

По логарифмической амплитудной частотной характеристике при $\omega = \omega_k = 0,2$ 1/сек найдем

$$L(\omega_k) = 20 \lg R(\omega_k) = 40 \text{ дБ}$$

и, следовательно,

$$R(\omega_k) = 100.$$

Амплитуда ошибки

$$\varepsilon_{\max} \approx g_{\max} / R(\omega_k) = 10 / 100 = 0,1^\circ = 6'.$$

Пример 3.5. Определим статическую ошибку в системе стабилизации скорости вращения двигателя постоянного тока, если изменение скорости при номинальном моменте в разомкнутой системе регулирования составляет 30% от номинального значения скорости, а коэффициент передачи разомкнутой системы $k = 100$. Система имеет единичную обратную связь.

Статическая ошибка от возмущающего воздействия

$$\varepsilon_{f\infty} \% = \frac{k_f f_0}{1 + k} = \frac{30}{1 + 100} \approx 0,3\%.$$

Пример 3.6. Генератор постоянного тока имеет коэффициент передачи по возмущению $k_f = 0,1$ в/а. Определим величину статической ошибки в системе регулирования напряжения генератора при изменении тока нагрузки на величину $\Delta I_H = 100$ а, если коэффициент передачи разомкнутой системы $k = 100$.

В данном случае статическая ошибка системы [см. (3.14)]

$$\varepsilon_{f\infty} = \frac{k_f \Delta I_H}{1 + k} = \frac{0,1 \cdot 100}{1 + 100} \approx 0,1 \text{ в.}$$

Пример 3.7. Определим моментную ошибку в следящей системе с астатизмом первого порядка, если добротность по скорости $k_D = 100$ 1/сек; передаточное отношение редуктора $i = 1000$; скорость холостого хода двигателя $n_{х.х} = 6000$ об/мин; $M_c = 0,2$ М_п.

Считая механическую характеристику двигателя линейной, найдем коэффициент передачи двигателя по возмущению с учетом редуктора:

$$k_f = \frac{\pi n_{х.х}}{30i M_{п}}$$

Моментная ошибка следящей системы

$$\varepsilon_{f\infty} = \frac{k_f f_0}{1 + k} \approx \frac{k_f M_c}{k} = \frac{21,6 \cdot 20}{100} = 4,3 \text{ угл. мин.}$$

§ 3.4. Расчет параметров систем автоматического управления по заданной величине установившейся ошибки

Расчет параметров статических систем автоматической стабилизации по заданной статической ошибке. В системах автоматической стабилизации управляющее воздействие, как правило, постоянно; оно определяет заданное значение регулируемой величины. При этом

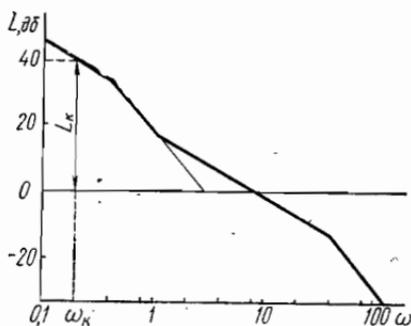


Рис. 3.2. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика разомкнутой системы

ошибка зависит не только от величины возмущающего воздействия, но и от ошибки чувствительного элемента.

Для статической системы стабилизации необходимое значение общего коэффициента передачи разомкнутой системы находится из (3.14):

$$k = \frac{k_f f_0}{\varepsilon_{f\infty}} - 1 = \frac{\varepsilon_{б.р}}{\varepsilon_{f\infty}} - 1, \quad (3.23)$$

где $\varepsilon_{б.р} = k_f f_0$ — изменение регулируемой величины в разомкнутой системе (ошибка системы без регулятора).

В ряде случаев система автоматической стабилизации должна обеспечивать широкий диапазон регулирования регулируемой величины от минимального x_{\min} до максимального x_{\max} значения.

Чтобы обеспечить заданную точность регулирования во всем диапазоне изменения регулируемой величины, необходимо выбирать коэффициент передачи системы по заданному максимальному значению ошибки при минимальном значении регулируемой величины. При этом условии значение коэффициента передачи разомкнутой системы должно быть не меньше, чем

$$k = \frac{\varepsilon_{б.р}}{\varepsilon_{f\infty}} - 1 = \frac{\delta_{б.р}}{\delta_p} m - 1, \quad (3.24)$$

где $m = x_{\max}/x_{\min}$ — диапазон регулирования; $\delta_{б.р} = \varepsilon_{б.р}/x_{\max}$ — относительная величина статической ошибки при максимальном значении регулируемой величины в разомкнутой системе (ошибка системы без регулятора); $\delta_p = \varepsilon_{f\infty}/x_{\min}$ — относительная величина ошибки при минимальном значении регулируемой величины в замкнутой системе (ошибка системы с регулятором).

Поскольку установившаяся ошибка определяется низкочастотной частью логарифмической амплитудной характеристики, то по вычисленному значению коэффициента усиления может быть построена первая асимптота желаемой логарифмической характеристики, параллельная оси частот.

Расчет параметров следящих систем по заданной величине установившейся ошибки. В следящих системах величина установившейся ошибки зависит от общего коэффициента передачи системы. На основании допустимого значения этой ошибки и вида управляющего воздействия выбираются параметры низкочастотной части логарифмической частотной характеристики [1, 3].

Наиболее просто вид логарифмической частотной характеристики в области низких частот определяется при гармоническом управляющем воздействии:

$$g(t) = g_{\max} \sin \omega_h t.$$

Амплитуда ошибки в этом случае вычисляется по выражению (3.21), из которого можно определить необходимое значение модуля частотной характеристики разомкнутой системы. Амплитуда ошибки не превышает заданной ε_{\max} , если логарифмическая амплитудная

характеристика проходит не ниже контрольной точки A_K (рис. 3.3), в которой при $\omega = \omega_k$ усиление, выраженное в децибелах,

$$L(\omega_k) = 20 \lg |W(j\omega_k)| = 20 \lg (g_{\max}/\epsilon_{\max}). \quad (3.25)$$

Часто точный закон изменения управляющего воздействия неизвестен, а заданы только максимальная скорость g_{\max} и максимальное ускорение \ddot{g}_{\max} управляющего воздействия. В этом случае при расчете удобно использовать эквивалентное синусоидальное воздействие $g(t) = g_0 \sin \omega_0 t$, наибольшее значение первой производной которого равно заданному максимальному значению скорости, а наибольшее значение второй производной — максимальному значению ускорения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{g}_0 &= g_0 \omega_0 = \dot{g}_{\max}; \\ \ddot{g}_0 &= g_0 \omega_0^2 = \ddot{g}_{\max}. \end{aligned} \right\} (3.26)$$

С учетом соотношений (3.26) амплитуда и частота эквивалентного синусоидального воздействия определяются по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= \ddot{g}_{\max}/\dot{g}_{\max}; \\ g_0 &= \dot{g}_{\max}/\omega_0. \end{aligned} \right\} (3.27)$$

Заданная ошибка слежения в системе не будет превышена, если логарифмическая амплитудная частотная характеристика разомкнутой системы (рис. 3.3) проходит не ниже точки A_K с координатами

$$\omega_K = \omega_k = \omega_0 = \frac{\ddot{g}_{\max}}{\dot{g}_{\max}}; \quad L_K = 20 \lg \frac{\dot{g}_{\max}^2}{\epsilon_{\max} \ddot{g}_{\max}}. \quad (3.28)$$

Если скорость сигнала на входе максимальна, а ускорение убывает, то контрольная точка будет двигаться по прямой с наклоном -20 дб/дек в диапазоне частот $\omega < \omega_0$. Если же ускорение равно максимальному, а скорость убывает, то контрольная точка движется по прямой с наклоном -40 дб/дек в диапазоне частот $\omega > \omega_0$.

Область, расположенная ниже контрольной точки A_K и двух прямых с наклоном -20 дб/дек и -40 дб/дек, представляет собой запретную область 30 для логарифмической амплитудной частотной характеристики следящей системы.

Так как точная логарифмическая амплитудная характеристика проходит ниже точки пересечения двух асимптот на 3 дб, то желаемая характеристика при $\omega = \omega_0$ должна быть поднята вверх на эту величину, т. е.

$$L_K = 20 \lg \frac{\dot{g}_{\max}^2 \sqrt{2}}{\epsilon_{\max} \ddot{g}_{\max}}. \quad (3.29)$$

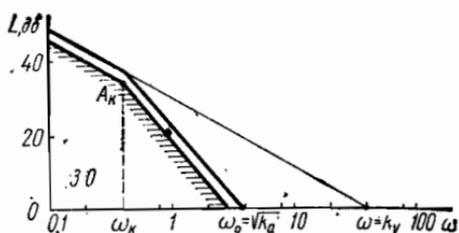


Рис. 3.3. Построение запретной зоны в области низких частот

При этом требуемое значение добротности по скорости

$$k_v = \dot{g}_{\max} \sqrt{2} / \varepsilon_{\max}, \quad (3.30)$$

а частота в точке пересечения второй асимптоты с осью частот

$$\omega_0 = \sqrt{k_a} = \sqrt{\ddot{g}_{\max} \sqrt{2} / \varepsilon_{\max}}. \quad (3.31)$$

В том случае, когда управляющее воздействие характеризуется только максимальной скоростью, добротность системы по скорости при заданном значении ошибки

$$k_v = \dot{g}_{\max} / \varepsilon_{\max}. \quad (3.32)$$

При этом низкочастотная асимптота логарифмической амплитудной характеристики или ее продолжение с наклоном -20 дб/дек пересекает ось частот в точке $\omega = k_v$.

Если задано только максимальное ускорение сигнала и величина ошибки, то добротность по ускорению

$$k_a = \ddot{g}_{\max} / \varepsilon_{\max}, \quad (3.33)$$

а низкочастотная асимптота с наклоном -40 дб/дек пересекает ось частот в точке

$$\omega_0 = \sqrt{k_a}.$$

Пример 3.8. Определим коэффициент передачи разомкнутой системы автоматической стабилизации скорости двигателя постоянного тока, обеспечивающей диапазон регулирования $m = 100$, если изменение скорости самого двигателя при номинальном моменте составляет $\delta_{б.р} = 10\%$ от скорости холостого хода, а относительная ошибка замкнутой системы $\delta_p = 0,5\%$.

Необходимое значение коэффициента передачи [см. (3.24)]

$$k = (\delta_{б.р} / \delta_p) m - 1 = (10/0,5) \cdot 100 - 1 = 1999.$$

Пример 3.9. Определим параметры низкочастотной части желаемой логарифмической амплитудной характеристики следящей системы, обеспечивающей установившуюся ошибку $\varepsilon_{\infty} \leq 3'$ при изменении управляющего воздействия с максимальной скоростью $\dot{g}_{\max} = 25 \text{ град/сек}$ и максимальным ускорением $\ddot{g}_{\max} = 50 \text{ град/сек}^2$.

Так как точный закон изменения управляющего воздействия неизвестен, то перейдем к эквивалентному синусоидальному воздействию с частотой

$$\omega_0 = \ddot{g}_{\max} / \dot{g}_{\max} = 50/25 = 2 \text{ 1/сек}$$

и амплитудой

$$g_0 = \dot{g}_{\max} / \omega_0 = 25/2 = 12,5^\circ.$$

Заданная величина ошибки обеспечивается в системе с астатизмом первого порядка, если логарифмическая амплитудно-частотная характеристика разомкнутой системы проходит не ниже точки A_R с координатами

$$\omega_k = \omega_0 = 2 \text{ 1/сек}; \quad L_R = 20 \lg \frac{g_0 \sqrt{2}}{\varepsilon_{\infty}} = 20 \lg \frac{12,5 \cdot 60 \sqrt{2}}{3} \approx 50 \text{ дб}.$$

Низкочастотная часть желаемой логарифмической амплитудно-частотной характеристики разомкнутой системы построена на рис. 3.4.

Требуемая величина коэффициента передачи разомкнутой системы с астатизмом первого порядка равна значению частоты $\omega = k_v = 700$ 1/сек в точке пересечения продолжения асимптоты, имеющей наклон -20 дБ/дек, с осью частот. Коэффициент передачи разомкнутой системы (добротность по скорости) можно определить и аналитически:

$$k_v = \frac{\dot{g}_{\max} \sqrt{2}}{\varepsilon_{\infty}} = \frac{25 \cdot 60 \cdot \sqrt{2}}{3} \approx 700 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Вторая асимптота, имеющая наклон -40 дБ/дек, пересекается с осью частот в точке

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{\dot{g}_{\max} \sqrt{2}}{\varepsilon_{\infty}}} = \\ &= \sqrt{\frac{50 \cdot 60 \cdot 1,4}{3}} \approx 37,5 \frac{1}{\text{сек}}. \end{aligned}$$

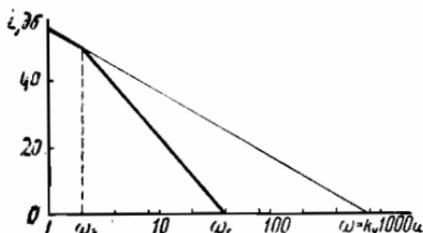


Рис. 3.4. Низкочастотная часть желаемой логарифмической амплитудно-частотной характеристики

Пример 3.10. Определим коэффициент передачи разомкнутой следящей системы с астатизмом второго порядка, обеспечивающий то же значение установившейся ошибки при тех же параметрах управляющего воздействия, что и система, рассмотренная в предыдущем примере.

Необходимое значение коэффициента передачи разомкнутой системы (добротность по ускорению)

$$k_a = \ddot{g}_{\max} / \varepsilon_{\infty} = 50 \cdot 60 / 3 = 1000 \text{ 1/сек}^2.$$

Пример 3.11. Определим установившуюся ошибку в следящей системе с передаточной функцией в разомкнутом состоянии:

$$W(s) = \frac{k_v}{s(1+Ts)}$$

при управляющем воздействии $g(t) = g_{\max} \sin \omega_k t$, если

$$k_v = 100 \text{ 1/сек}; T = 0,1 \text{ сек}; g_{\max} = 1 \text{ и } \omega_k = 5 \text{ 1/сек}.$$

Из (3.3) следует, что передаточная функция ошибки

$$\Phi_{eg}(s) = \frac{s(1+Ts)}{Ts^2 + s + k_v} = \frac{s(1+0,1s)}{0,1s^2 + s + 100}.$$

По формулам (3.10) найдем коэффициенты ошибки:

$$C_0 = \Phi_{eg}(0) = 0;$$

$$C_1 = \dot{\Phi}_{eg}(0) = 1/k_v = 10^{-2};$$

$$C_2 = \ddot{\Phi}_{eg}(0)/2! \approx T/k_v = 10^{-3};$$

$$C_3 = \dddot{\Phi}_{eg}(0)/3! \approx 2T/k_v^2 = -2 \cdot 10^{-5}.$$

Подставив эти значения в (3.11), получим ряд

$$\begin{aligned} \varepsilon_g(t) &= C_1 \omega_k \cos \omega_k t - C_2 \omega_k^2 \sin \omega_k t + C_3 \omega_k^3 \cos \omega_k t + \dots = 10^{-2} \omega_k \cos \omega_k t - \\ &- 10^{-3} \omega_k^2 \sin \omega_k t - 2 \cdot 10^{-5} \omega_k^3 \cos \omega_k t + \dots, \end{aligned}$$

который очень быстро сходится и может быть аппроксимирован выражением

$$\varepsilon_g(t) \approx 5 \cdot 10^{-2} \cos 5t - 25 \cdot 10^{-3} \sin 5t = 0,05 (\cos 5t - 0,5 \sin 5t).$$

При этом амплитуда установившейся ошибки

$$\varepsilon_{g \max} \approx 0,05 \sqrt{1 + 0,25} = 0,05 \cdot 1,12 = 0,056.$$

Литература к главе III

1. В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. Теория систем автоматического регулирования. «Наука», 1966.
2. Под ред. В. А. Бесекерского. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления. «Наука», 1969.
3. Д. В. Васильев и др. Проектирование и расчет следящих систем. «Судостроение», 1964.
4. К. В. Егоров. Теория автоматического регулирования. «Энергия», 1967.

РАСЧЕТ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ ЧАСТОТНЫМИ МЕТОДАМИ

§ 4.1. Предварительные замечания

Современные системы автоматического управления характеризуются, с одной стороны, сложной структурой, с другой — высокими требованиями, предъявляемыми к качеству процесса управления. Классические методы теории управления, основанные на решении уравнений и на использовании алгебраических критериев устойчивости, громоздки и не позволяют достаточно наглядно определить связь между устойчивостью и качеством систем. Вследствие этого возникла необходимость в разработке новых методов анализа и синтеза систем управления. Результатом работ явились методы, среди которых наиболее эффективными являются частотные. Эти методы позволяют решить вопросы устойчивости исследуемых систем, оценить качество протекающих в них динамических процессов и выполнить синтез систем, удовлетворяющих заданным техническим условиям.

§ 4.2. Частотные характеристики линейных систем

Для анализа и синтеза систем автоматического управления пригодны различные приемы, использующие частотные характеристики. Имея в своем распоряжении частотные характеристики разомкнутой системы, легко определить свойства замкнутой системы.

Частотная характеристика разомкнутой системы $W(j\omega)$ может быть получена заменой s на $j\omega$ в выражении передаточной функции $W(s)$. График функции $W(j\omega)$ называется *амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой системы*. Выделим в выражении частотной характеристики вещественную $u(\omega)$ и мнимую $v(\omega)$ составляющие:

$$W(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega).$$

Графики функций $u(\omega)$ и $v(\omega)$ называются соответственно *вещественной и мнимой частотными характеристиками разомкнутой системы*.

Частотная характеристика замкнутой системы, т. е. системы с обратной связью,

$$\Phi(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega),$$

где $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ — соответственно вещественная и мнимая частотные характеристики замкнутой системы.

Модуль частотной характеристики разомкнутой системы

$$\text{mod } W(j\omega) = R(\omega) = \sqrt{u^2(\omega) + v^2(\omega)},$$

а аргумент

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} [v(\omega)/u(\omega)].$$

Графики $R(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ называются соответственно *амплитудной и фазовой частотными характеристиками разомкнутой системы*.

Аналогично определяются модуль и аргумент частотной характеристики замкнутой системы.

Пример 4.1. Построим амплитудно-фазовую характеристику следящей системы с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{35}{s(0,15s+1)(0,04s+1)}.$$

Подставив $s = j\omega$, получим

$$W(j\omega) = \frac{35}{j(\omega)(0,15j\omega+1)(0,04j\omega+1)}. \quad (4.1)$$

Первый способ построения. Выделяя в (4.1) вещественную $u(\omega)$ и мнимую $v(\omega)$ составляющие, находим

$$W(j\omega) = \frac{-6,65\omega^2}{0,036\omega^4 + (0,006\omega^2 - \omega)^2} + j \frac{35(0,006\omega^2 - \omega)}{0,036\omega^4 + (0,006\omega^2 - \omega)^2} = u(\omega) + jv(\omega).$$

Подставляя значения частоты в интервале $0 \leq \omega \leq \infty$, получим табл. 4.1.

Таблица 4.1

ω	5	10	15	20
$u(\omega)$	-4	-1,8	-0,66	-0,3
$v(\omega)$	-3,7	-0,38	+0,11	+0,12
$R(\omega)$	5,5	1,8	0,67	0,3
$\varphi(\omega)$	-135°	-170°	-189°	-198°

Построенная по данным табл. 4.1 амплитудно-фазовая характеристика приведена на рис. 4.1. Из рисунка видно, что система неустойчива (см. § 4.3).

Второй способ построения. Амплитудно-фазовая характеристика системы может быть построена по амплитудно-фазовым характеристикам отдельных звеньев. Выражение (4.1) можно представить как произведение трех частотных характеристик:

$$W_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega}; \quad W_2(j\omega) = \frac{1}{0,15j\omega+1};$$

$$W_3(j\omega) = \frac{1}{0,04j\omega+1},$$

умноженное на $k = 35$.

Амплитудно-фазовая характеристика $W_1(j\omega)$ интегрирующего звена совпадает с отрицательной мнимой осью (рис. 4.2, а), амплитудно-фазовые характеристики $W_2(j\omega)$ и $W_3(j\omega)$ аperiodических звеньев представляют собой полуокружности с диаметром, равным единице (рис. 4.2, б и в).

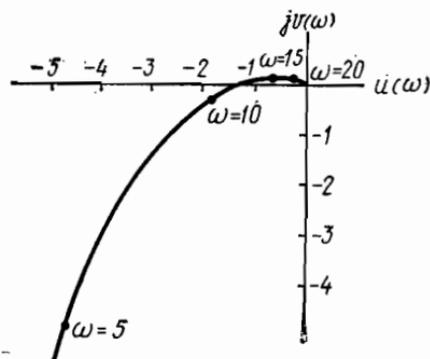


Рис. 4.1. Амплитудно-фазовая характеристика

Задаваясь различными величинами ω , определим значения модуля $R(\omega)$ и фазы $\varphi(\omega)$ для каждого звена. Далее, вычисляя произведение $R_1 \cdot R_2 \cdot R_3$ и сумму $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$, найдем вектор полной амплитудно-фазовой характеристики для коэффициента передачи $k = 1$, после чего легко получим указанным выше способом амплитудно-фазовую характеристику $W(j\omega)$ (рис. 4.2, з). Значения

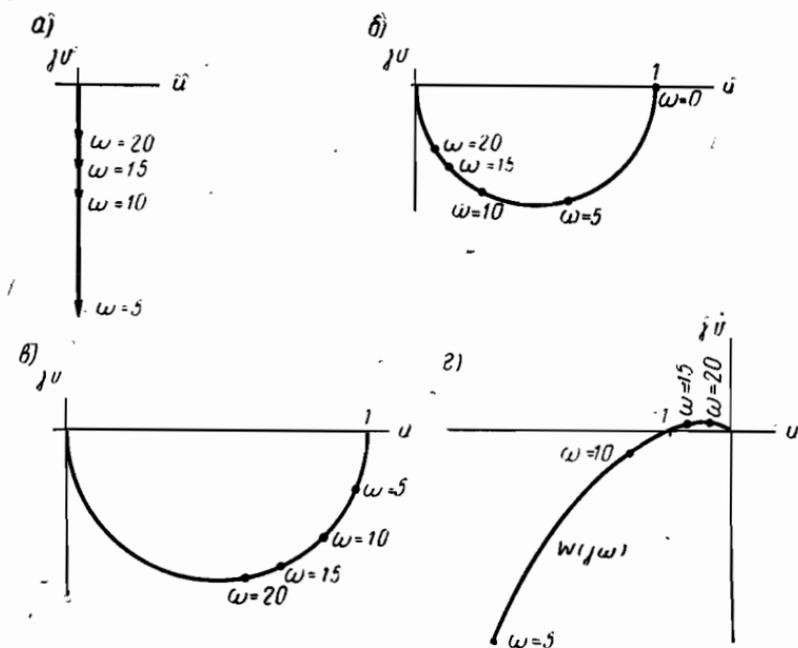


Рис. 4.2. К построению амплитудно-фазовой характеристики

модулей и фаз для трех амплитудно-фазовых характеристик приведены в табл. 4.2. В этой же таблице помещены суммарные значения фазы $\varphi(\omega)$ и модуля $R(\omega)$.

Таблица 4.2

ω	5	10	15	20
φ_1	-90°	-90°	-90°	-90°
φ_2	-37°	-57°	-66°	-72°
φ_3	-11°	-22°	-31°	-39°
R_1	0,2	0,1	0,067	0,05
R_2	0,78	0,52	0,37	0,28
R_3	0,99	0,93	0,86	0,78
$\varphi(\omega)$	-138°	-169°	-187°	-201°
$R(\omega)$	5,4	1,7	0,74	0,37

Как видно, значения суммарной фазы $\varphi(\omega)$ и полного модуля $R(\omega)$ совпадают с соответствующими значениями, помещенными в табл. 4.1.

Пример 4.2. Построим амплитудно-фазовую характеристику для системы, имеющей передаточную функцию

$$W(s) = \frac{10}{(0,1s + 1)(0,03s^2 + 0,56s + 1)}$$

В примере 4.1. было показано, как построить амплитудно-фазовую характеристику системы. Для простых выражений $W(j\omega)$ оба приведенные в примере 4.1 способа равноценны, для сложных же выражений $W(j\omega)$ предпочтение следует отдать второму способу, т. е. построению амплитудно-фазовой характеристики по характеристикам отдельных звеньев. Далее используется именно этот прием построения амплитудно-фазовой характеристики.

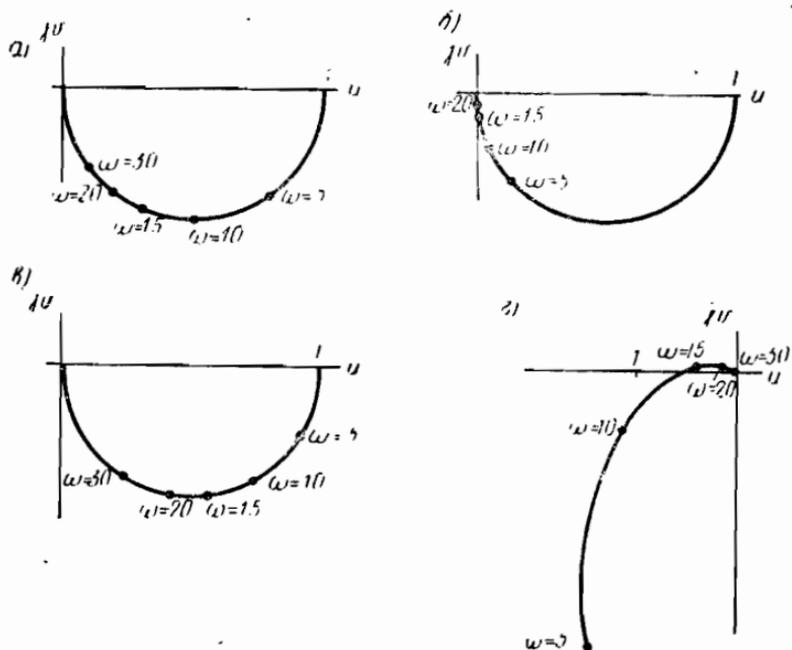


Рис. 4.3. Амплитудно-фазовые характеристики звеньев и системы

Пусть частотная характеристика

$$W(j\omega) = \frac{10}{(0,1j\omega + 1)(-0,03\omega^2 + 0,56j\omega + 1)}. \quad (4.2)$$

В приведенном выражении $W(s)$ корни двучлена знаменателя вещественные: $\lambda_1 = -1,95$ и $\lambda_2 = -16,6$. Введя вместо выражения $(0,03s^2 + 0,56s + 1)$ произведение двух членов вида $(0,52s + 1)(0,06s + 1)$, получим частотную характеристику, эквивалентную характеристике (4.2):

$$W(j\omega) = \frac{10}{(0,1j\omega + 1)(0,52j\omega + 1)(0,06j\omega + 1)}$$

Амплитудно-фазовая характеристика построена так же, как и в примере 4.1, по данным табл. 4.3. На рис. 4.3 показаны характеристики трех апериодических звеньев соответственно (рис. 4.3, а, б и в) и полная характеристика (рис. 4.3, г).

Пример 4.3. Построим амплитудно-фазовую характеристику для системы (рис. 4.4, а), состоящей из трех апериодических звеньев. Второе звено охвачено жесткой отрицательной обратной связью с коэффициентом $k_{o.c} = 3$. Параметры звеньев: $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 2$, $T_1 = 0,1$ сек, $T_2 = 0,2$ сек, $T_3 = 0,3$ сек.

ω	5	10	15	20	30
φ_1	-27°	-45°	-56°	-64°	-72°
φ_2	-69°	-79°	-83°	$-84,5^\circ$	$-86,3^\circ$
φ_3	-17°	-31°	-42°	-50°	-61°
R_1	0,9	0,72	0,54	0,44	0,32
R_2	0,4	0,2	0,1	0,06	0,01
R_3	0,96	0,86	0,75	0,66	0,48
$\varphi(\omega)$	-113°	-155°	-181°	-198°	-219°
$10 \cdot R(\omega)$	3,5	1,24	0,4	0,17	0,15

Для построения амплитудно-фазовой характеристики структурную схему приведем к одноконтурной (рис. 4.4, б).

Передаточная функция элемента, охваченного обратной связью,

$$W_{\text{о.с.}}(s) = \frac{W_2(s)}{1 + W_2(s) \cdot W_{\text{о.с.}}(s)}, \quad (4.3)$$

где

$$W_2(s) = \frac{k_2}{T_2 s + 1}; \quad W_{\text{о.с.}}(s) = k_{\text{о.с.}}$$

Передаточные функции двух других аperiodических звеньев равны:

$$W_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}; \quad W_3(s) = \frac{k_3}{T_3 s + 1}.$$

Для частотной характеристики имеем

$$\begin{aligned} W_1(j\omega) \cdot W_3(j\omega) &= \\ &= \frac{k_1 k_3}{(T_1 j\omega + 1)(T_3 j\omega + 1)} = \\ &= \frac{k_1 k_3}{4} = \\ &= \frac{1}{(0,1j\omega + 1)(0,3j\omega + 1)}. \end{aligned}$$

Амплитудно-фазовая характеристика (рис. 4.5, а) построена рассмотренным выше способом по данным табл. 4.4.

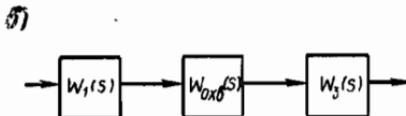
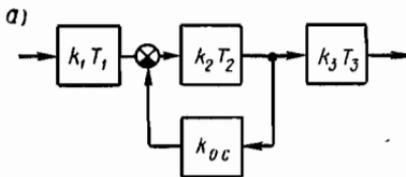


Рис. 4.4. Преобразование структуры системы

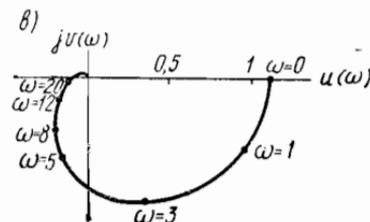
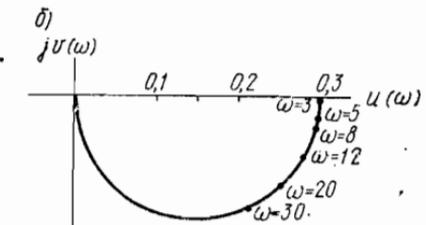
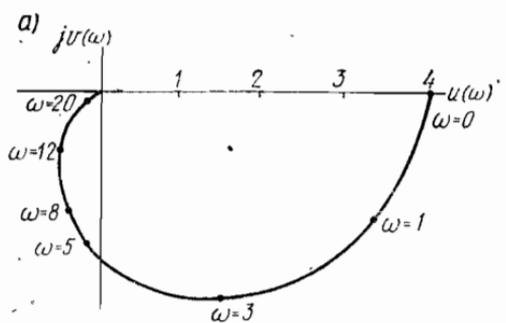


Рис. 4.5. Амплитудно-фазовые характеристики системы

Таблица 4.4

ω	1	3	5	8	12	20	30
$\varphi^\circ(\omega)$	-23	-59	-94	-106	-125	-145	-156
$R(\omega)$	3,7	2,8	1,8	1,44	0,62	0,23	0,06

Частотная характеристика элемента, охваченного обратной связью (рис. 4.5, б),

$$W_{\text{охв}}(j\omega) = \frac{W_2(j\omega)}{1 + W_2(j\omega)W_{\text{о.с}}(j\omega)}$$

построена по данным табл. 4.5.

Таблица 4.5

ω	1	3	5	8	12	20	30
$\varphi^\circ(\omega)$	-1,2	-4	-6	-9	-14	-22	-31
$R(\omega)$	0,29	0,29	0,285	0,28	0,27	0,26	0,25

Частотную характеристику системы в целом (см. рис. 4.4) получим перемножением характеристик:

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) \cdot W_3(j\omega) \cdot W_{\text{охв}}(j\omega).$$

Используя характеристики отдельных звеньев, составим табл. 4.6, по данным которой построим полную характеристику (рис. 4.5, в).

Таблица 4.6

ω	0	1	3	5	8	12	20	30
$\varphi^\circ(\omega)$	0	-24	-63	-100	-115	-139	-165	-187
$R(\omega)$	1,2	1,07	0,83	0,52	0,43	0,19	0,06	0,012

При исследовании систем автоматического регулирования часто целесообразно пользоваться обратными амплитудно-фазовыми характеристиками, простота построения которых (особенно для аperiodических звеньев первого порядка) облегчает расчет динамики систем автоматического управления. Это удобно особенно наглядно проявляется при выборе корректирующих устройств.

Пример 4.4. Рассмотрим построение обратной амплитудно-фазовой характеристики, соответствующей передаточной функции (см. пример 4.1):

$$W(s) = \frac{35}{s(0,15s + 1)(0,04s + 1)}.$$

Обратная частотная характеристика

$$\frac{1}{W(j\omega)} = \frac{j\omega(0,15j\omega + 1)(0,04j\omega + 1)}{35}. \quad (4.4)$$

Для построения обратной амплитудно-фазовой характеристики воспользуемся характеристиками отдельных звеньев. Характеристика $j\omega$ совпадает с мнимой осью (рис. 4.6, а), характеристики $(0,15j\omega + 1)$ и $(0,04j\omega + 1)$ изображают-

ся прямыми, параллельными мнимой оси и проходящими через точку 1 вещественной оси (рис. 4.6, б и в). В табл. 4.7 приведены значения модулей и фаз для одних и тех же значений частот ω . Перемножая векторы трех характеристик

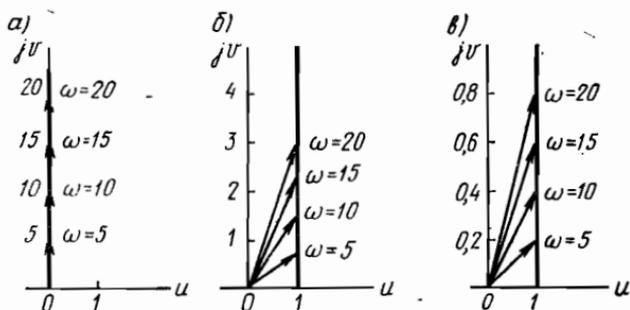


Рис. 4.6. Обратные амплитудно-фазовые характеристики звеньев

и постоянный множитель $1/35$, получим значения модулей R и фаз φ , по которым может быть построена обратная амплитудно-фазовая характеристика (рис. 4.7).

Таблица 4.7

ω	0	5	10	15	20	Множитель
R_1	0	5	10	15	20	$j\omega$
R_2	1	1,25	1,8	2,25	3,0	$0,15j\omega \mp 1$
R_3	1	1,02	1,08	1,18	1,28	$0,04j\omega \mp 1$
$\varphi_1^\circ(\omega)$	90	90	90	90	90	
$\varphi_2^\circ(\omega)$	0	37	57	66	71	
$\varphi_3^\circ(\omega)$	0	12	47	50	60,5	
$R(\omega)/35$	0	0,177	0,55	1,12	2,2	
$\varphi^\circ(\omega)$	90	139	194	206	221,5	

Характеристика не охватывает точку -1 на вещественной оси, что является признаком неустойчивости системы.

Пример 4.5. Построим логарифмические амплитудную и фазовую частотные характеристики для системы, передаточная функция которой

$$W(s) = \frac{35}{s(0,15s+1)(0,04s+1)}$$

Подставив $s = j\omega$, получим

$$W(j\omega) = \frac{35}{j\omega(0,15j\omega+1)(0,04j\omega+1)}$$

откуда

$$20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg 35 - 20 \lg |j\omega| - 20 \lg |0,15j\omega+1| - 20 \lg |0,04j\omega+1| \quad (4.5)$$

В практических расчетах целесообразно пользоваться асимптотическими характеристиками, которые представляют собой отрезки прямых линий, сопрягающиеся при частотах $\omega = 1/T$, где T — постоянная времени звена. Рассматриваемая система состоит из одного интегрирующего звена и двух апериодических звеньев первого порядка. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика интегрирующего звена при $\omega = 1$ — прямая с наклоном -20 дБ/дек, проходящая через точку $\omega = 1$ на оси частот. Логарифмические амплитудно-частотные характеристики апериодических звеньев при $k = 1$ состоят из двух прямых — одной, совпадающей с осью частот, и второй, проходящей с наклоном

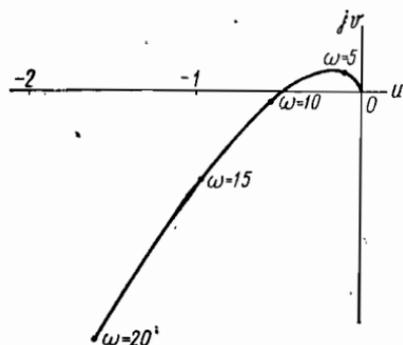


Рис. 4.7. Обратная амплитудно-фазовая характеристика системы

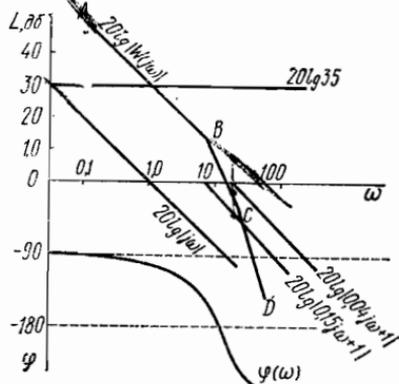


Рис. 4.8. Логарифмические амплитудно-частотные характеристики системы

-20 дБ/дек к оси частот. Обе прямые сопрягаются на оси частот в точке $\omega = 1/T$. Логарифмические амплитудно-частотные характеристики изображены на рис. 4.8. Сопрягающие частоты равны:

$$\omega_1 = 1/0,15 = 6,6 \text{ сек}^{-1}; \quad \omega_2 = 1/0,04 = 25 \text{ сек}^{-1}.$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика, соответствующая усилительному звену с коэффициентом передачи $k = 35$, представляет собой прямую, параллельную оси частот и отстоящую от нее на расстоянии $20 \lg 35 = 29,7$ дБ.

Складывая характеристики звеньев, получим искомую логарифмическую амплитудно-частотную характеристику системы (ломаная линия A-B-C-D на рис. 4.8).

Чтобы построить логарифмические фазовые частотные характеристики звеньев, следует определить фазовый угол φ для каждого звена:

$$\varphi = \arctg [v(\omega)/u(\omega)].$$

Фазовые характеристики апериодических звеньев можно также построить с помощью шаблона. Просуммировав фазовые углы звеньев в определенном диапазоне частот, получим фазовую характеристику системы $\varphi(\omega)$ (табл. 4.8).

Таблица 4.8

ω	0,1	1,0	10,0	20,0	60,0	100,0
$\varphi^\circ(\omega)$	91	101	167	205	230	245

незначительную величину, то такая теоретически устойчивая система может вести себя на практике неудовлетворительно, так как в процессе расчета всегда могут быть опущены некоторые малые параметры, вызывающие неустойчивость (см., например, рис. 4.1). В связи с этим оказывается целесообразным введение понятия о запасе устойчивости как по фазе, так и по модулю. Запас устойчивости по модулю задается

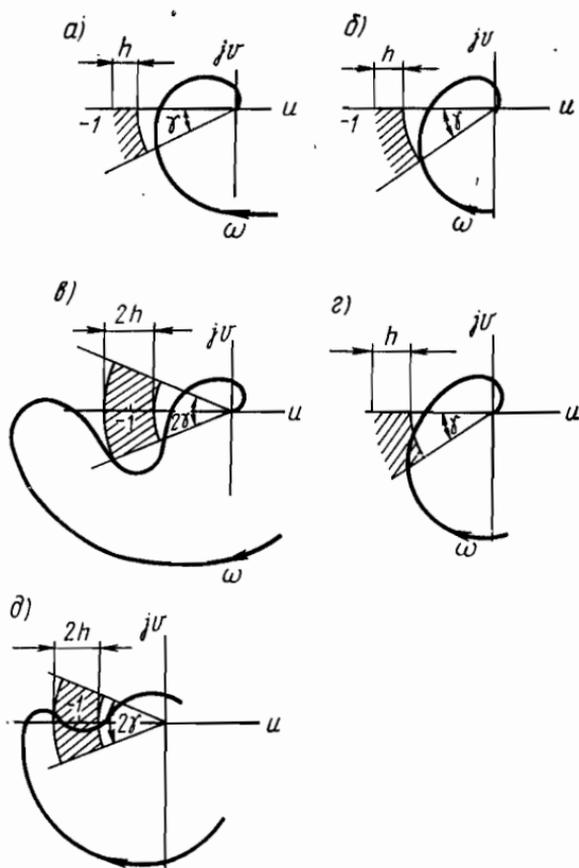


Рис. 4.10. Различные случаи устойчивости

некоторой величиной h , на которую должен отличаться модуль амплитудно-фазовой характеристики от единицы. Запас по фазе задается углом γ , представляющим собой разность между углом $-\pi$ и максимально допустимым углом поворота вектора при соблюдении запаса устойчивости по модулю.

Принято считать, что система обладает требуемым запасом устойчивости, если она при значениях модуля вектора амплитудно-фазовой характеристики, отличающихся от единицы не более чем на заданную величину $\pm h$, имеет фазу, отличающуюся от значения $-\pi$ не менее чем на величину $\pm \gamma$. Рис. 4.10 характеризует различные случаи, поясняющие высказанное положение. Во всех случаях запас устой-

чивости по модулю задан величиной h , запас устойчивости по фазе — величиной γ . Для амплитудно-фазовой характеристики, огибающей точку $(-1; j 0)$ слева и справа, запас устойчивости как по модулю, так и по фазе задается значениями $\pm h$ и $\pm \gamma$. Отмечая на координатной плоскости заданные величины h и γ , легко установить область, в которую не должна заходить амплитудно-фазовая характеристика, удовлетворяющая требуемому запасу устойчивости. Приведенная на рис. 4.10, *a* амплитудно-фазовая характеристика не попадает в заштрихованную область, следовательно, система обладает требуемым запасом устойчивости. Рис. 4.10, *б* и *в* характеризует систему, которая укладывается в запас устойчивости, заданный условиями проектирования. На рис. 4.10, *г* и *д* изображены характеристики системы хотя и устойчивой, но не имеющей требуемого запаса.

Указанные выше признаки устойчивости для систем, устойчивых и неустойчивых в разомкнутом состоянии, могут быть объединены в одно общее условие, особенно удобное для амплитудно-фазовых характеристик сложной формы. Это условие формулируется следующим образом. Система автоматического регулирования будет устойчивой, если разность между числом переходов амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы через отрезок отрицательной вещественной оси на участке $(-1; -\infty)$ сверху вниз и числом переходов через эту линию снизу вверх равно $m/2$, где m — число корней с положительной вещественной частью в характеристическом уравнении разомкнутой системы.

В ряде случаев удобно определять устойчивость системы по углу поворота вектора $[1 + W(j\omega)]$ при изменении ω от 0 до ∞ .

Замкнутая система устойчива, если суммарный угол поворота вектора $[1 + W(j\omega)]$ равен $m\pi$.

Пример 4.7. Исследуем устойчивость системы автоматического управления, передаточная функция которой

$$W(s) = \frac{k}{(T_1 T_2 s^2 + T_1 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)},$$

где $k = 190$; $T_1 = 0,13$ сек; $T_2 = 0,044$ сек; $T_3 = 0,009$ сек; $T_4 = 0,114$ сек. Частотная характеристика имеет вид

$$W(j\omega) = \frac{k}{(1 - T_1 T_2 \omega^2 + T_1 j\omega)(T_3 j\omega + 1)(T_4 j\omega + 1)} = kW_1(j\omega).$$

Строим характеристику $W_1(j\omega)$ (см. § 4.2) для звеньев, частотные характеристики которых равны

$$\frac{1}{1 - T_1 T_2 \omega^2 + T_1 j\omega}; \quad \frac{1}{T_3 j\omega + 1}; \quad \frac{1}{T_4 j\omega + 1}.$$

Результаты расчета сводим в табл. 4.9.

Амплитудно-фазовая характеристика $W(j\omega)$, построенная на рис. 4.11, охватывает точку с координатами $(-1; j 0)$. Характеристическое уравнение разомкнутой системы не имеет корней с положительной вещественной частью,

ω	R_1	R_2	R_3	$R_1 R_2 R_3$	φ_1°	φ_2°	φ_3°	$\Sigma\varphi^\circ(\omega)$	$R(\omega) = kR_1 R_2 R_3$
0	1	1	1	1	0	0	0	0	190,0
10	0,985	0,62	0,66	0,4	-5	-49	-86	-140	76,0
20	0,98	0,39	0,4	0,15	-10	-65	-100	-175	28,0
30	0,96	0,25	0,165	0,04	-15	-72	-120	-207	7,5
40	0,94	0,2	0,1	0,019	-19	-77	-133	-229	3,6
50	0,90	0,15	0,063	0,0085	-24	-80	-150	-254	1,62
70	0,86	0,1	0,033	0,0028	-31	-83	-160	-274	0,53
100	0,75	0,05	0,017	0,00063	-41	-85	-183	-309	0,12

т. е. разомкнутая система устойчива. Следовательно, замкнутая система неустойчива. Амплитудно-фазовая характеристика пересекает отрицательную ось в точке $(-25,5; j 0)$. Критическому значению коэффициента передачи $k_{кр}$ при $\varphi = -\pi$ соответствует модуль амплитудно-фазовой характеристики, равный единице. Это будет иметь место, если произведение всех модулей векторов $W(j\omega)$ уменьшить в 25,5 раза. Следовательно, критический коэффициент передачи

$$k_{кр} = k/25,5 = 190/25,5 \approx 7,5.$$

Пример 4.8. Исследуем устойчивость следующей системы, содержащей в своей структуре неустойчивое звено. Передаточная функция системы в разомкнутом состоянии

$$W(s) = \frac{k(T_2 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_3 s - 1)}$$

Рис. 4.11. Амплитудно-фазовая характеристика неустойчивой системы

где

$$T_1 = 0,01 \text{ сек}; T_3 = 0,05 \text{ сек}; \\ T_2 = 0,1 \text{ сек}; k = 30.$$

Знаменатель передаточной функции (характеристическое уравнение разомкнутой системы) имеет один нулевой, один отрицательный и один положительный $\lambda_3 = 1/T_3$ корни. Наличие положительного корня указывает на неустойчивость разомкнутой системы.

Чтобы исследовать устойчивость замкнутой системы, необходимо построить амплитудно-фазовую характеристику

$$W(j\omega) = \frac{k(T_2 j\omega + 1)}{j\omega(T_1 j\omega + 1)(T_3 j\omega - 1)}$$

Предварительно рекомендуется убедиться в том, что замкнутая система может быть устойчивой. Для этого следует записать характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$T_1 T_3 \lambda^3 + (T_3 - T_1) \lambda^2 + (kT_2 - 1) \lambda + k = 0.$$

где $T_3 - T_1 = 0,05 - 0,01 = 0,04$; $T_1 T_3 = 0,01 \cdot 0,05 = 0,0005$; $kT_2 - 1 = 30 \cdot 0,1 - 1 = 2$.

Все коэффициенты характеристического уравнения положительны и, следовательно, необходимое (но недостаточное) условие устойчивости системы выполнено.

Построим амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы, используя для этого амплитудно-фазовые характеристики отдельных звеньев,

частотные характеристики которых равны

$$T_2 j\omega + 1; 1/(T_1 j\omega + 1);$$

$$+ 1/(T_3 j\omega - 1) \text{ и } 1/j\omega$$

(см. соответственно рис. 4.12, а, б, в и г). Амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы получится делением амплитудно-фазовой характеристики характеристик, изображенных на рис. 4.12, а, в и г (рис. 4.12, д).

Результаты расчета приведены в табл. 4.10 и использованы для построения частотной характеристики.

Чтобы определить устойчивость замкнутой следящей системы, следует найти суммарный угол поворота вектора $[1+W(j\omega)]$ вокруг точки $(-1; j0)$. Из рис. 4.12, д видно, что этот угол равен π . Замкнутая система устойчива, если суммарный угол поворота равен $m\pi$, где m — число корней характеристического уравнения разомкнутой системы с положительной вещественной частью. В рассматриваемом случае $m = 1$. Таким образом, замкнутая система будет устойчива.

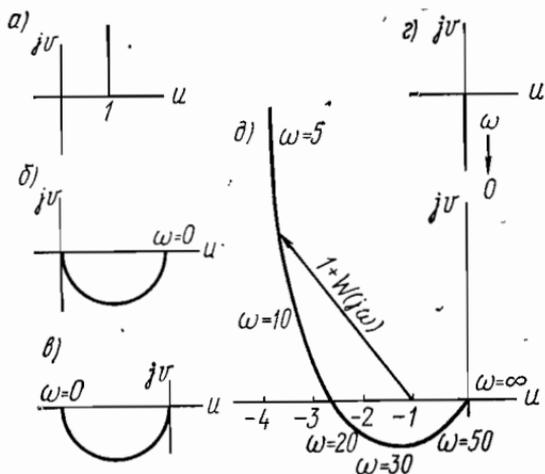


Рис. 4.12. Амплитудно-фазовые характеристики

Таблица 4.10

ω	0	5	10	20	30	50	∞
$R(\omega)$	∞	6,5	3,8	2,3	2,0	1,23	0
$\varphi^\circ(\omega)$	-270	-233	-204	-170	-156	-145	-90

Следует обратить внимание на особенности систем, содержащих неустойчивое звено. С уменьшением коэффициента передачи k система теряет устойчивость и при некотором критическом значении переходит в неустойчивый режим, т. е. влияние коэффициента передачи обратно тому, которое наблюдается в системах, устойчивых в разомкнутом состоянии.

Пример 4.9. Определим, устойчива ли система автоматического управления, рассмотренная в примере 4.4, используя обратную амплитудно-фазовую характеристику (см. рис. 4.7): Характеристика не охватывает точку с координатами $(-1; j0)$, что является признаком неустойчивой системы.

Исследование устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы. В случае устойчивой разомкнутой системы замкнутая система будет устойчива, если логарифмическая амплитудно-частотная характеристика разомкнутой системы принимает отрицательное значение раньше, чем фазовая характеристика достигает значения $\varphi = -\pi$. В более общих случаях следует пользоваться критерием, связанным с числом переходов фазовой характеристики через линии $-\pi, -3\pi, \dots$. Замкнутая система устойчива, если разность между числом переходов фазовой характеристики разомкнутой системы через линии $-\pi, -3\pi, \dots$ сверху вниз и числом переходов через эти линии снизу вверх во всех частях графика, в которых логарифмическая амплитудно-частотная характеристика принимает отрицательное значение, равна нулю.

рифмическая амплитудно-частотная характеристика проходит выше оси частот, равна $m/2$, где m — число корней с положительной вещественной частью.

Пример 4.10. Выясним, как следует изменить коэффициент передачи системы, рассмотренной в примере 4.5 (см. рис. 4.8), чтобы система обладала запасом устойчивости по модулю, равным 16 дБ.

Чтобы получить заданный запас устойчивости, переместим логарифмическую амплитудно-частотную характеристику параллельно самой себе вдоль оси ординат так, чтобы при значении фазы $\varphi = -\pi$ усиление было равно -16 дБ. Фазовая характеристика при этом не изменится. При заданном запасе устойчивости $20 \lg k = 14$ дБ, т. е. $k = 5,1$.

§ 4.4. Определение частотных характеристик корректирующих цепей

При разработке систем автоматического управления обычно не удается выполнить систему так, чтобы она, будучи составлена только из основных звеньев, работала устойчиво и удовлетворяла заданным при проектировании показателям качества. В большинстве случаев в систему приходится вводить корректирующие устройства.

Введение дополнительных корректирующих устройств усложняет систему, поэтому с практической точки зрения важно уметь использовать более простые корректирующие устройства и подбирать их параметры так, чтобы при меньшем их числе получить необходимый эффект.

Определение параметров корректирующих устройств аналитическим путем возможно только в простейших случаях и не может являться универсальным.

Один из эффективных способов выбора корректирующих устройств заключается в том, что, исходя из требуемых показателей качества системы, намечается желаемая форма амплитудно-фазовой или логарифмической амплитудно-частотной характеристики, по которой затем находят частотные характеристики корректирующего устройства.

При выборе корректирующих цепей с помощью частотных методов используется зависимость между качеством переходного процесса при ступенчатом воздействии на входе системы и видом вещественной частотной характеристики замкнутой системы. Рассмотренные ниже методы справедливы для минимально-фазовых систем, т. е. таких, для которых амплитудные и фазовые характеристики связаны однозначной зависимостью. Вид вещественной частотной характеристики определяется ее коэффициентами наклона и формы. Если расчет ведется на основе управляющего воздействия, что имеет место главным образом при проектировании следящих систем, то коэффициенты типовой вещественной частотной характеристики замкнутой системы (рис. 4.13) выражаются следующим образом:

основной коэффициент наклона $\kappa_1 = \omega_3/\omega_n$;

первый дополнительный коэффициент наклона $\kappa_2 = \omega_1/\omega_2$;

первый коэффициент формы $\lambda_1 = \omega_2/\omega_n$;

второй дополнительный коэффициент наклона $\kappa_3 = \omega_5/\omega_0$;

второй коэффициент формы $\lambda_2 = \omega_4/\omega_0$.

Для расчета корректирующего устройства, обеспечивающего требуемый переходный процесс, можно воспользоваться номограммами (рис. 4.14, а, б). Эти номограммы связывают между собой запасы устойчивости по модулю ΔR и по фазе $\Delta\varphi$, величину наибольшего отклонения σ_{\max} и время регулирования τ_{\max} и позволяют построить вещественную частотную характеристику $P(\omega)$ замкнутой системы, обеспечивающую заданное качество переходного процесса. Приведенные номограммы дают возможность построить вещественную частотную характеристику с параметрами $\kappa_1 = 0,5$ и $0,7$. Во всех случаях вспомогательные параметры равны:

$$\kappa_2 = \omega_1/\omega_2 = 0,5; \quad \kappa_3 = \omega_5/\omega_0 = 0,7;$$

$$\lambda_1 = \omega_2/\omega_{\Pi} = 0,5; \quad \lambda_2 = \omega_4/\omega_0 = 0,6.$$

С уменьшением основного коэффициента наклона κ_1 переходный процесс становится менее колебательным, однако при этом корректирующее устройство усложняется. Основной коэффициент наклона κ_1

вещественной частотной характеристики замкнутой системы не должен превышать значения $\kappa_1 = 0,8$. Если $\kappa_1 < 0,8$, а $\kappa_2 \geq 0,4$ и $\lambda_1 \geq 0,5$, то при $P_{\max}(\omega) = 1,4$ перерегулирование $\sigma_{\max} \leq 38\%$, а время переходного процесса $\tau_{\max} = 6\pi/\omega_{\Pi}$. При этом число колебаний за время переходного процесса $\mu \leq 3$.

При $P_{\max}(\omega) = 1,3$ имеем

$$\sigma_{\max} \leq 32\%; \quad \tau_{\max} \leq \frac{5\pi}{\omega_{\Pi}}; \quad \mu \leq 2.$$

Если $P_{\max}(\omega) = 1,2$, то $\sigma \leq 26\%$; $\tau_{\max} \leq \frac{4\pi}{\omega_{\Pi}}$; $\mu \leq 2$.

Если $P_{\max}(\omega) = 1$ и вещественная частотная характеристика является положительной невозрастающей функцией, а основной коэффициент наклона лежит в пределах $0,1 \leq \kappa_1 \leq 0,8$, то

$$\sigma_{\max} \leq 17\%; \quad \tau_{\max} \leq \frac{3\pi}{\omega_{\Pi}}; \quad \mu = 1.$$

Если при расчете пользоваться логарифмическими частотными характеристиками, то связь между усилением L , фазой φ и параметрами $P_{\max}(\omega)$ и $P_{\min}(\omega)$ вещественной частотной характеристики замкнутой системы может быть установлена номограммой (рис. 4.15). По оси абсцисс номограммы отложены значения фазы φ в градусах, а по оси ординат — значения усиления $L = 20 \lg |W(j\omega)|$ в децибеллах. Отметки на линиях, заполняющих номограмму, показывают величины $P(\omega)$ вещественной частотной характеристики замкнутой системы.

Построение желаемой логарифмической амплитудно-частотной характеристики. Как указано выше, при расчете корректирующего

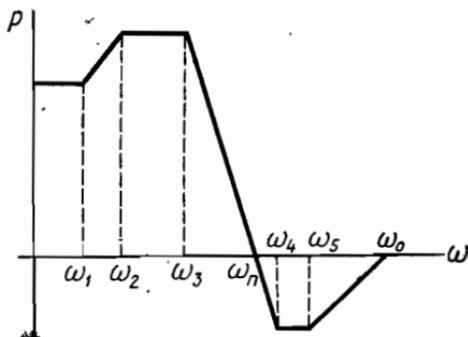


Рис. 4.13. Вещественная частотная характеристика

устройства необходимо в первую очередь наметить форму желаемой амплитудно-фазовой или логарифмической амплитудно-частотной характеристики, т. е. той, которая обеспечивает необходимые показатели качества системы управления.

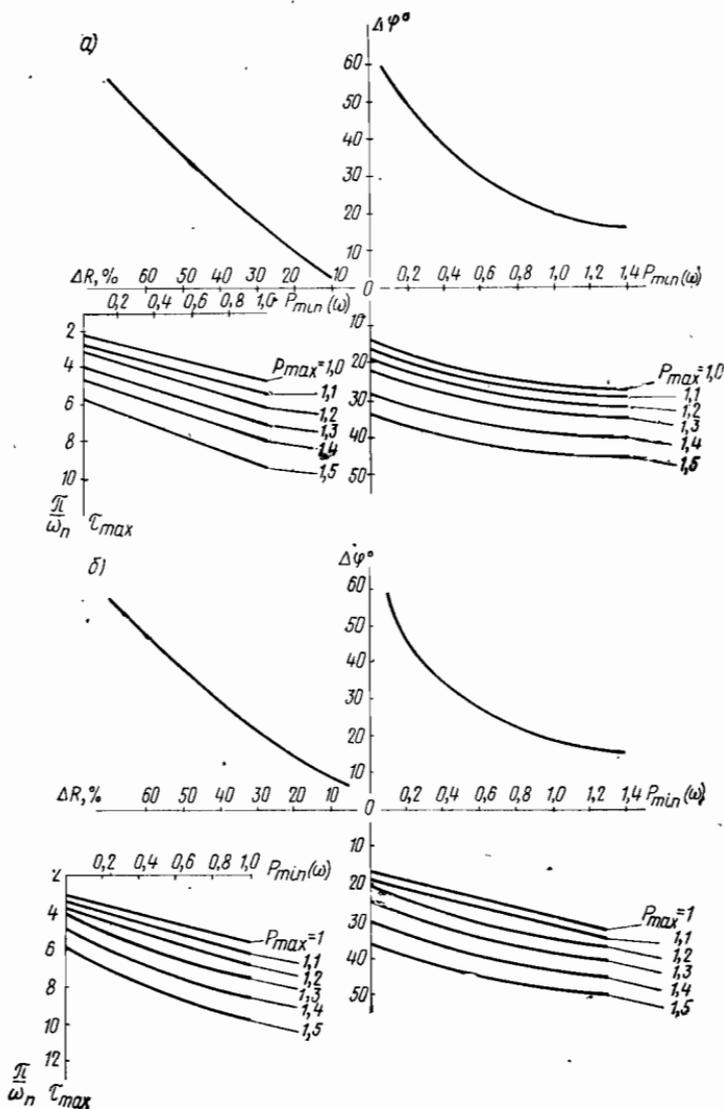


Рис. 4.14. Номограммы для определения качества системы:
 а — $\kappa_1 = 0,5$; б — $\kappa_1 = 0,7$

Участок, соответствующий низким частотам, проводится так, чтобы для статической системы он был параллелен оси частот и отстоял от нее на величину $20 \lg k$ децибел, где k — коэффициент передачи системы. Для астатических систем с астатизмом порядка ν этот участок

должен иметь наклон -20σ дБ/дек, а ордината, соответствующая $\omega = 1$, равна $20 \lg k_v$, где k_v — коэффициент передачи системы, соответствующий порядку ее астатизма. Область низких частот определяет точность воспроизведения входного сигнала.

Интервал средних частот определяет основные показатели переходного процесса — запас устойчивости, перерегулирование, время переходного процесса. Этот участок характеристики представляет собой

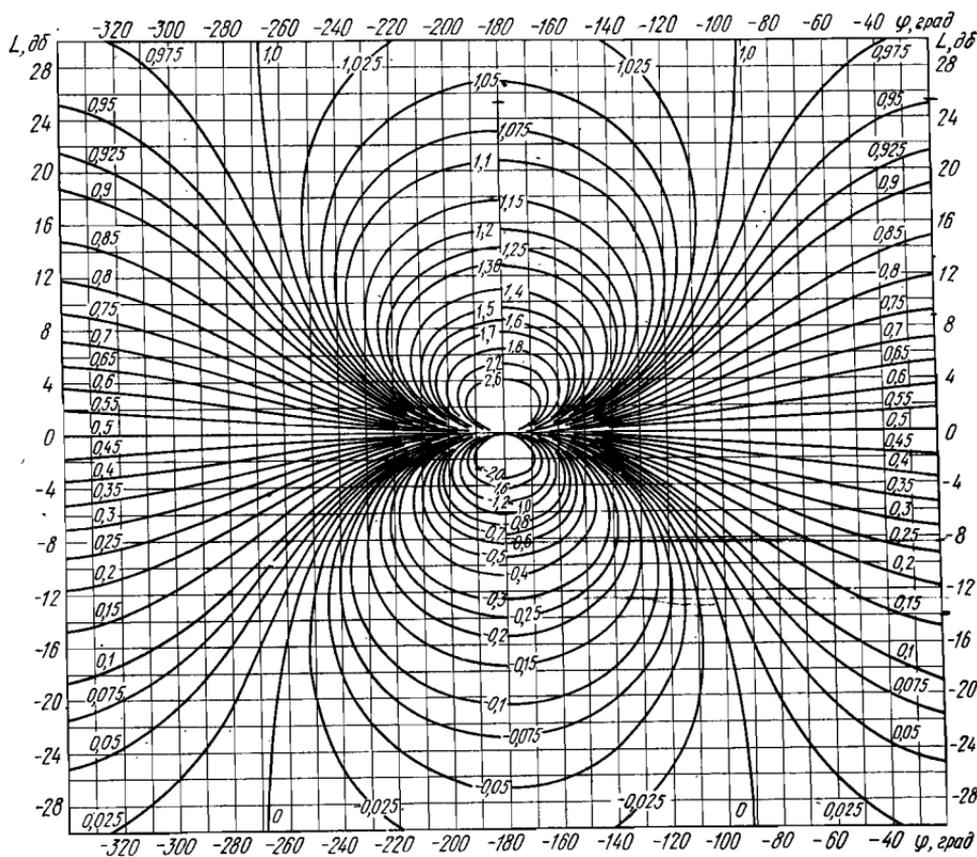


Рис. 4.15. Номограмма для построения вещественной частотной характеристики

прямую, проходящую через частоту среза ω_c с наклоном -20 дБ/дек. Чтобы определить частоту среза, следует предварительно найти интервал положительности $\omega_{п.}$, т. е. частоту, при которой вещественная частотная характеристика пересекает ось частот. Для этого можно воспользоваться кривыми, построенными В. В. Солодовниковым (рис. 4.16). Взяв заданное значение перерегулирования σ_{max} , определим по кривой σ_{max} требуемое значение максимума вещественной характеристики P_{max} , а по этому значению и кривой τ_{max} найдем время регулирования (сек):

$$t_p = m\pi/\omega_{п.} \quad (4.6)$$

откуда определится частота ω_{Π} . Так, например, если наибольшее перерегулирование $\sigma_{\max} = 30\%$, а время регулирования $t_p = 1,5$ сек, то согласно кривым $P_{\max}(\omega) = 1,3$, а $m = 4,8$.

Зная t_p , получим

$$\omega_{\Pi} = \frac{4,8 \cdot \pi}{1,5} = 7,2 \text{ сек}^{-1}.$$

При этом частота среза

$$\omega_c = \omega_{\Pi} \left[1 - \frac{0,5}{P_{\max}(\omega)} (1 - \kappa_1) \right], \quad (4.7)$$

где κ_1 выбирается исходя из указанных выше соображений [Л.3].

При более грубых подсчетах частота среза

$$\omega_c \approx (0,6 \div 0,9) \omega_{\Pi}. \quad (4.8)$$

Участок средних частот продолжается влево и вправо от частоты среза до тех пор, пока амплитудно-частотная характеристика меньше ΔL_1 и больше $-\Delta L_2$ (рис. 4.17), где ΔL_1 и ΔL_2 — запас устойчивости по амплитуде. После этого участки средних и низких частот сопрягаются прямой с наклоном -40 или -60 дб/дек.

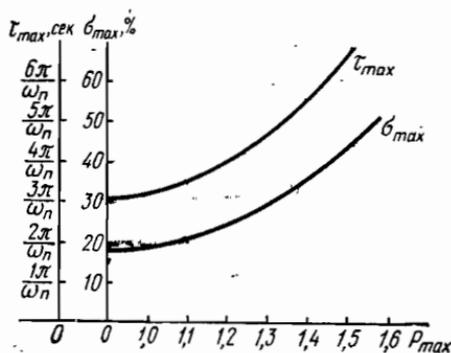


Рис. 4.16 Диаграмма, связывающая показатели качества

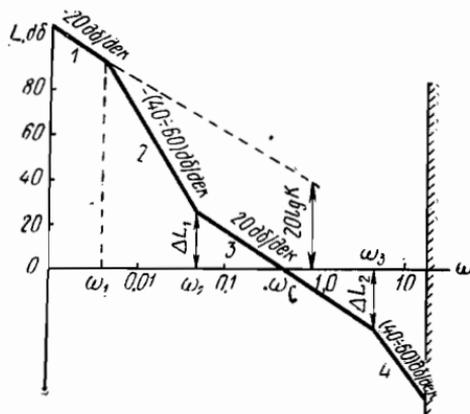


Рис. 4.17 Типовая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика

Область высоких частот содержит те сопрягающие частоты, пренебрежение которыми не изменяет существенного вида логарифмической характеристики системы в области средних частот. Можно считать, что «малыми» параметрами, не влияющими существенно на динамику системы, являются постоянные времени, удовлетворяющие условиям

$$T \ll \frac{1}{(5 \div 10) \omega_c}. \quad (4.9)$$

Расчет при помощи амплитудно-частотных логарифмических характеристик может быть облегчен, если воспользоваться типовыми логарифмическими амплитудно-частотными характеристиками. Передаточные функции этих характеристик приведены в табл. 4.11.

Передающая функция разомкнутой системы	Наклон участков характеристики, дБ/дек			
	1	2	3	4
$\frac{k(T_2 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_3 s + 1)}$	-20	-40	-20	-40
$\frac{k(T_2 s + 1)^2}{s(T_1 s + 1)^2(T_3 s + 1)}$	-20	-60	-20	-40
$\frac{k(T_2 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_3 s + 1)^2}$	-20	-40	-20	-60

Расчет последовательных корректирующих устройств. Преимущество последовательных корректирующих устройств заключается в том, что они улучшают динамические характеристики системы и лишь косвенно влияют на величину их ошибки.

К числу недостатков последовательных корректирующих устройств следует отнести существенное уменьшение эффективности действия из-за непостоянства параметров составных элементов системы. Поэтому к стабильности характеристик элементов системы необходимо предъявлять повышенные требования. При использовании последовательных корректирующих устройств постоянного тока необходимо устранять несущую частоту управляющего сигнала, что требует введения специальных фазочувствительных управляемых выпрямителей, усложняющих схему системы.

Структурная схема системы регулирования с последовательным корректирующим устройством показана на рис. 4.18. Передаточная функция $W(s)$ нескорректированной разомкнутой системы должна быть известна. Для системы (рис. 4.18) имеет место равенство

$$20 \lg |W_R(j\omega)| = 20 \lg |W_{\text{СК}}(j\omega)| - 20 \lg |W(j\omega)|, \quad (4.10)$$

где $20 \lg |W_{\text{СК}}(j\omega)|$ — логарифмическая амплитудно-частотная характеристика скорректированной системы.

Выражение (4.10) показывает, что для определения логарифмической амплитудно-частотной характеристики корректирующего устройства необходимо:

1) построить логарифмическую амплитудно-частотную характеристику нескорректированной разомкнутой системы $20 \lg |W(j\omega)|$;

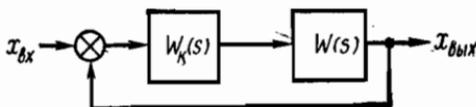


Рис. 4.18. Структурная схема системы

2) построить по заданным показателям качества логарифмическую амплитудно-частотную характеристику скорректированной системы $20 \lg |W_{ск}(j\omega)|$;

3) вычесть из желаемой характеристики $20 \lg |W_{ск}(j\omega)|$ характеристику $20 \lg |W(j\omega)|$ нескорректированной системы, что позволит найти требуемую характеристику корректирующего устройства;

4) по виду логарифмической характеристики корректирующего устройства определить его передаточную функцию и схему.

Пример 4.11. Определить вид и параметры последовательного корректирующего устройства системы, структурная схема которой показана на рис. 4.19. Необходимые показатели качества переходного процесса: перерегулирование

$\sigma_{max} < 25\%$; время регулирования $t_p < 0,7$ сек; число колебаний за время переходного процесса $\mu < 2$.

Параметры системы: постоянная времени электродвигателя

$T_d = 0,15$ сек; постоянная времени поперечной цепи электромашиного усилителя $T_{\text{эму}} =$

$= 0,04$ сек; коэффициент усиления электронного усилителя

$k_{\text{э.у}} = 30$ ма/в; коэффициент передачи двигателя по скорости

$k_d = 140$ град/с; коэффициент передачи измерительного элемента $k_{\text{и}} = 0,5$ в/град; коэффициент

передачи редуктора $k_p = 1/900$.

Постоянной времени обмоток управления электромашинного усилителя при питании их от электронного усилителя, а также постоянной времени цепи якоря двигателя можно пренебречь.

Следует построить амплитудно-частотную логарифмическую характеристику нескорректированной системы, а затем, исходя из заданных значений качественных показателей переходного процесса, — такую же характеристику скорректированной системы.

Передаточная функция нескорректированной системы

$W(s) = W_{\text{э.у}}(s) W_{\text{эму}}(s) W_p(s)$.

Запишем передаточные функции элементов системы:

электронного усилителя

$W_{\text{э.у}}(s) = k_{\text{э.у}}$;

электромашинного усилителя

$W_{\text{эму}}(s) = \frac{k_{\text{эму}}}{T_{\text{эму}} s + 1}$;

исполнительного двигателя

$W_d(s) = \frac{k_d}{s(T_d s + 1)}$;

редуктора

$W_p(s) = k_p$.

Общий коэффициент передачи системы

$k = k_{\text{э.у}} k_d k_{\text{эму}} k_p k_{\text{и}} = 30 \cdot 140 \cdot 15 \cdot \frac{1}{900} \cdot 0,5 = 35 \text{ сек}^{-1}$

Частотная характеристика

$$W(j\omega) = \frac{35}{j\omega (T_{\text{д}} j\omega + 1) (T_{\text{вм}} j\omega + 1)} = \frac{35}{j\omega (0,15j\omega + 1) (0,04j\omega + 1)}$$

и, следовательно,

$$20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg 35 - 20 \lg |j\omega| - 20 \lg |0,15j\omega + 1| - 20 \lg |0,04j\omega + 1|.$$

Определим сопрягающие частоты:

$$\omega_1 = \frac{1}{0,15} = 6,7 \text{ сек}^{-1}; \quad \omega_2 = \frac{1}{0,04} = 25 \text{ сек}^{-1}.$$

Логарифмические амплитудно-частотная $20 \lg |W(j\omega)|$ и фазо-частотная $\varphi(\omega)$ характеристики приведены на рис. 4.20, а. Из характеристик видно, что замкнутая система неустойчива. Чтобы построить желаемую логарифмическую

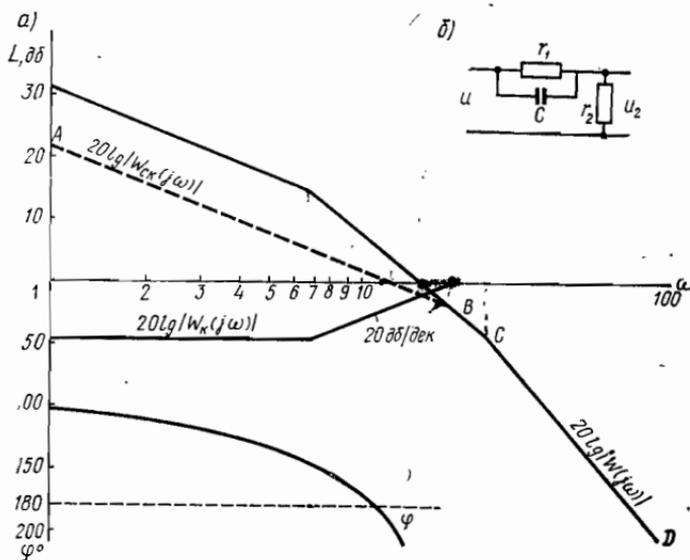


Рис. 4.20. Логарифмические частотные характеристики системы

характеристику, следует воспользоваться заданными показателями качества и формулами (4.6)–(4.9) либо номограммами (см. рис. 4.14). На основании рис. 4.16 получим, что при $\sigma = 25\%$ наибольшее значение вещественной частотной характеристики $P_{\text{max}}(\omega) = 1,2$, а время регулирования $t_p = 4\pi/\omega_{\text{п}}$, что при заданном значении $t_p = 0,7 \text{ сек}$ дает

$$\omega_{\text{п}} = 4\pi/t_p = 4\pi/0,7 = 18 \text{ сек}^{-1}.$$

Частота среза может быть найдена по (4.8). Однако более определенный результат получается при подсчете по (4.7). Чтобы воспользоваться этой формулой, следует выбрать значение $P_{\text{max}}(\omega)$ вещественной частотной характеристики и коэффициент κ_1 ее основного наклона.

Принимая значения $P_{\text{max}}(\omega) = 1,2$ и $\kappa_1 = 0,25$, получим по номограмме (см. рис. 4.16) $\omega_{\text{п}} = 18 \text{ сек}^{-1}$ и, следовательно,

$$\omega_{\text{с}} = \omega_{\text{п}} \left[1 - \frac{0,5}{P_{\text{max}}(\omega)} (1 - \kappa_1) \right] = 18 \left[1 - \frac{0,5}{1,2} \cdot 0,75 \right] = 12,5 \text{ сек}^{-1}.$$

Из номограммы (см. рис. 4.15) найдем, что величина запаса устойчивости по модулю при $P_{\max}(\omega) = 1,2$ равна -16 дб.

Далее построим логарифмическую амплитудно-частотную характеристику скорректированной системы $20 \lg |W_{\text{ск}}(j\omega)|$. Для этого проведем через частоту $\omega_c = 12,5 \text{ сек}^{-1}$ прямую с наклоном -20 дб/дек. Эту прямую следует ограничить вправо величиной -16 дб, однако для получения более простого корректирующего устройства продолжим эту характеристику до характеристики нескорректированной системы. Получим желаемую характеристику в виде ломаной ABCD.

На основании (4.10) произведем вычитание $20 \lg |W_{\text{ск}}(j\omega)| - 20 \lg |W(j\omega)|$ и получим характеристику $20 \lg |W_{\text{к}}(j\omega)|$.

Выбираем в качестве корректирующего устройства пассивное дифференцирующее устройство (рис. 4.20, б) с передаточной функцией

$$W_{\text{к}}(s) = \frac{r_2}{r_1 \div r_2} \cdot \frac{T_1 s \div 1}{T_2 s \div 1}.$$

Из характеристики корректирующего устройства находим сопрягающие частоты, а затем определяем постоянные времени:

$$T_1 = \frac{1}{\omega_1} = r_1 C = \frac{1}{6,7} = 0,15 \text{ сек};$$

$$T_2 = \frac{1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1 \div r_2} \cdot T_1 = \frac{1}{20} = 0,05 \text{ сек}.$$

Принимая $C = 15 \text{ мкф}$, получаем:

$$r_1 = \frac{T_1}{C} = \frac{0,15}{15 \cdot 10^{-6}} = 10 \text{ ком};$$

$$r_2 = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot r_1 = \frac{0,5}{0,1} = 5 \text{ ком}.$$

Структура корректирующего устройства зависит от характеристики скорректированной системы $20 \lg |W_{\text{ск}}(j\omega)|$, которая всегда может варьироваться. Следовательно, поставленная задача не имеет однозначного решения.

Расчет корректирующего устройства типа обратной связи Схема системы с корректирующей обратной связью показана на рис. 4.21.

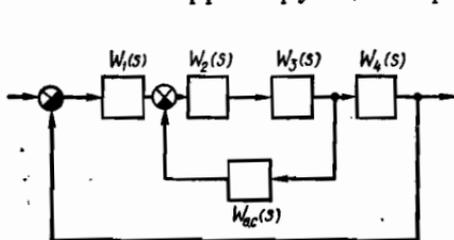


Рис. 4.21. Структурная схема системы

Передаточная функция скорректированной системы

$$W_{\text{ск}}(s) = \frac{W_1(s) W_2(s) W_3(s) W_4(s)}{1 \div W_{0.c}(s) W_2(s) W_3(s)} \quad (4.11)$$

Обозначим $W_2(s) W_3(s)$ через $W_{\text{охв}}(s)$, тогда передаточная функция внутреннего контура системы

$$W_0(s) = \frac{W_{\text{охв}}(s)}{1 \div W_{\text{охв}}(s) W_{0.c}(s)}$$

В астатических системах следует учитывать некоторые особенности действия обратной связи. Для того чтобы эта связь не понижала порядка астатизма, необходимо, чтобы порядок нуля передаточной функции $W_{0.c}(s)$ при $s \rightarrow 0$ был бы не ниже порядка полюса передаточной функции $W_{\text{охв}}(s)$ при $s \rightarrow 0$

Если кратность полюса функции $W_{\text{о.с.}}(s)$ равна кратности нуля функции $W_{\text{о.с.}}(s)$, то общий коэффициент усиления системы после введения обратной связи уменьшится в $(1 + k_{\text{о.с.}} \cdot k_{\text{о.с.в}})$ раз. Если кратность полюса функции $W_{\text{о.с.в}}(s)$ меньше кратности нуля функции $W_{\text{о.с.}}(s)$, то общий коэффициент усиления системы при введении обратной связи остается неизменным.

Выбор обратных связей с помощью логарифмических частотных характеристик выполняется для тех диапазонов частот, для которых справедливо неравенство

$$|W_{\text{о.с.в}}(j\omega) \cdot W_{\text{о.с.}}(j\omega)| \gg 1.$$

При этом выражение (4.11) запишется как

$$W_{\text{ср}}(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{W_{\text{о.с.в}}(j\omega) W_{\text{о.с.}}(j\omega)} = \frac{W_{\text{нео.с.в}}(j\omega)}{W_{\text{о.с.}}(j\omega)}, \quad (4.12)$$

где $W_{\text{нео.с.в}}(j\omega)$ — частотная характеристика звеньев, не охваченных обратной связью.

Переходя к логарифмическим амплитудно-частотным характеристикам, имеем

$$20 \lg |W_{\text{ср}}(j\omega)| = 20 \lg |W(j\omega)| - 20 \lg |W_{\text{о.с.в}}(j\omega)| - 20 \lg |W_{\text{о.с.}}(j\omega)|,$$

или

$$20 \lg |W_{\text{ср}}(j\omega)| = 20 \lg |W_{\text{нео.с.в}}(j\omega)| - 20 \lg |W_{\text{о.с.}}(j\omega)|,$$

откуда

$$20 \lg |W_{\text{о.с.}}(j\omega)| = 20 \lg |W(j\omega)| - 20 \lg |W_{\text{о.с.в}}(j\omega)| - 20 \lg |W_{\text{ср}}(j\omega)|, \quad (4.13)$$

или

$$20 \lg |W_{\text{о.с.}}(j\omega)| = 20 \lg |W_{\text{нео.с.в}}(j\omega)| - 20 \lg |W_{\text{ср}}(j\omega)|. \quad (4.14)$$

Которым из двух полученных выражений, (4.13) или (4.14), пользоваться, зависит от того, какие характеристики, входящие в правую часть уравнения, удобнее построить. В обоих случаях необходимо сначала получить желаемую логарифмическую характеристику $20 \lg |W_{\text{ср}}(j\omega)|$ методом, изложенным в § 4.4. Если пользоваться выражением (4.13), то следует построить характеристики $20 \lg |W_{\text{о.с.в}}(j\omega)|$ и $20 \lg |W(j\omega)|$, после этого сложить характеристики $20 \lg |W_{\text{о.с.в}}(j\omega)|$ и $20 \lg |W_{\text{ср}}(j\omega)|$ и полученную характеристику вычесть из характеристики $20 \lg |W(j\omega)|$ нескорректированной системы. Найдя характеристику $20 \lg |W_{\text{о.с.}}(j\omega)|$, поступают в дальнейшем так же, как и при выборе последовательного корректирующего устройства. Намечив структуру обратной связи, проверяют внутренний контур в замкнутом состоянии на устойчивость. Только при условии, что этот контур устойчив, можно считать выбор обратной связи законченным.

Определение амплитудно-частотной логарифмической характеристики $20 \lg |W_{\text{о.с.}}(j\omega)|$ по выражению (4.14) аналогично только что описанному в разделе о последовательных корректирующих устройствах.

Пример 4.12. Определить схему и параметры корректирующей обратной связи для системы (см. пример 4.11), положив в основу те же показатели качества.

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика скорректированной системы $20 \lg |W_{ск}(j\omega)|$ показана на рис. 4.20 в виде ломаной $ABCD$. Эта характеристика перенесена на рис. 4.22. Амплитудно-частотная характеристика $20 \lg |W_{охв}(j\omega)|$ звеньев, охваченных обратной связью, нанесена на том же рисунке в виде линии MEF .

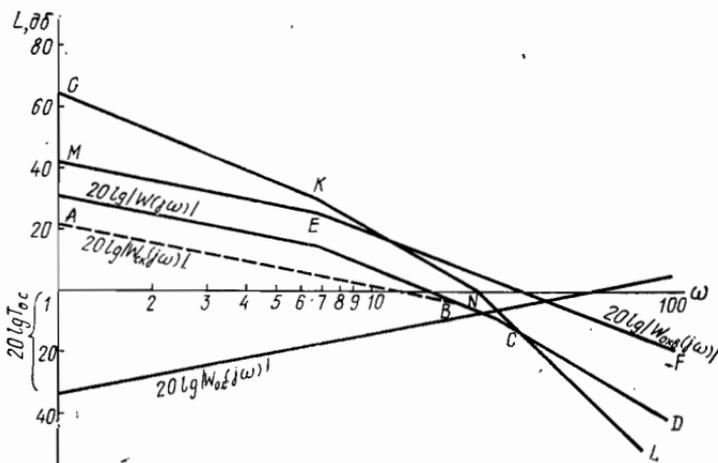


Рис. 4.22. Логарифмические амплитудно-частотные характеристики системы

Передаточная функция скорректированной системы

$$W_{ск}(s) = \frac{W_{в.у}(s) \cdot W_{ому}(s) W_{д}(s) W_{р}(s)}{1 \nabla W_{о.с}(s) W_{д}(s)} = \frac{W(s)}{1 \nabla W_{о.с}(s) W_{д}(s)}$$

Обратная связь охватывает двигатель с передаточной функцией

$$W_{д}(s) = \frac{k_{д}}{s(T_{д}s \nabla 1)}$$

и показана на рис. 4.19 (штриховая).

С учетом предыдущего имеем:

$$20 \lg |W_{ск}(j\omega)| = 20 \lg |W(j\omega)| - 20 \lg |W_{о.с}(j\omega)| - 20 \lg |W_{д}(j\omega)|;$$

$$20 \lg |W_{д}(j\omega)| = 20 \lg |W_{охв}(j\omega)|.$$

Складывая характеристики $20 \lg |W_{охв}(j\omega)|$ и $20 \lg |W_{ск}(j\omega)|$, получим суммарную характеристику $GKNL$. Далее вычтем из характеристики $20 \lg |W(j\omega)|$ нескорректированной системы характеристику $GKNL$ и получим характеристику $20 \lg |W_{о.с}(j\omega)|$ корректирующей обратной связи. Полученная характеристика указывает на то, что корректирующее устройство представляет собой дифференцирующее звено с передаточной функцией $W(s) = T_{о.с}(s)$. Уравнение логарифмической амплитудно-частотной характеристики этого звена запишется как

$$20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg T_{о.с} + 20 \lg \omega.$$

Величина $20 \lg T_{о.с}$ из графика равна -36 дБ, что соответствует постоянной времени $T_{о.с} = 0,016$ сек.

Проверим далее контур обратной связи на устойчивость Передаточная функция контура обратной связи

$$W_{o.c}(s) = \frac{W_{охв}(s)}{1 + W_{охв}(s) W_{o.c}(s)} = \frac{k_d}{s(T_d s + 1) + k_d T_{o.c} s}$$

Характеристическое уравнение для контура обратной связи

$$T_d \lambda^2 + (1 + k_d T_{o.c}) \lambda = 0,$$

Все коэффициенты характеристического уравнения положительны, что для системы второго порядка является признаком устойчивости системы. Таким образом, выбранная обратная связь обеспечивает требуемые показатели качества переходного процесса.

Пример 4.13. Определим схему и параметры корректирующей обратной связи для системы (см. пример 4.12), используя для этого формулу (4.14).

Чтобы выбрать обратную связь, необходимо иметь амплитудно-частотную характеристику $|W_{ск}(j\omega)|$ скорректированной системы и характеристику

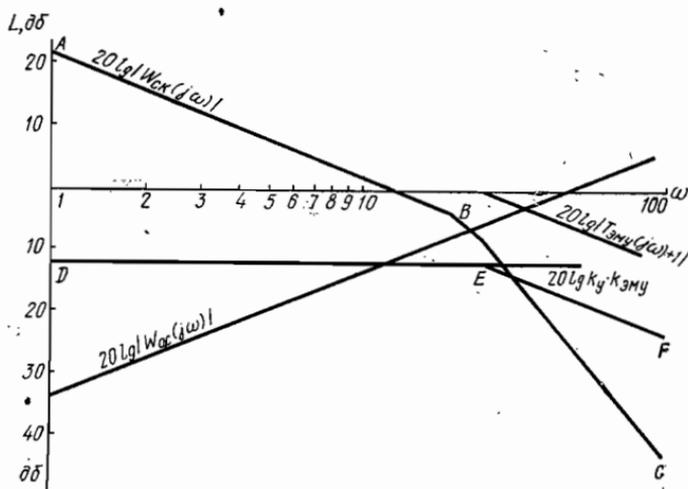


Рис. 4.23. Логарифмические амплитудно-частотные характеристики системы

$W_{неохв}(j\omega)$ звеньев, не охваченных обратной связью. Для диапазона частот, в котором $|W_{охв}(j\omega)| \cdot |W_{o.c}(j\omega)| \gg 1$, получим

$$W_{ск}(j\omega) = \frac{k_n k_{э.у} k_p W_{эму}(j\omega)}{W_{o.c}(j\omega)} = \frac{k_n k_{э.у} k_p k_{эму}}{W_{o.c}(j\omega) (T_{эму} j\omega + 1)}$$

или, переходя к логарифмическим амплитудно-частотным характеристикам,

$$20 \lg |W_{с.к}(j\omega)| = 20 \lg k_n k_{э.у} k_p k_{эму} - 20 \lg |W_{o.c}(j\omega)| - 20 \lg |T_{эму} j\omega + 1|,$$

откуда

$$20 \lg |W_{o.c}(j\omega)| = 20 \lg k_n k_{э.у} k_p k_{эму} - 20 \lg |T_{эму} j\omega + 1| - 20 \lg |W_{ск}(j\omega)|. \quad (4.15)$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика $20 \lg |W_{ск}(j\omega)|$ взята из расчетов примера 4.11 и изображена на рис. 4.23 линией ABC. На

том же графике показаны характеристики $20 \lg k_{и}k_{в.у}k_{р}k_{вму}$ и $20 \lg |T_{вму}(j\omega + 1)|$, а также их сумма, изображенная линией DEF . Произведение

$$k_{и}k_{в.у}k_{р}k_{вму} = 0,5 \cdot 30 \cdot \frac{1}{900} \cdot 15 = 0,25 a.$$

Выполняя вычитание согласно выражению (4.15), получим амплитудно-частотную логарифмическую характеристику звена обратной связи $20 \lg |W_{о.с}(j\omega)|$. Как видно, приведенный расчет близко совпадает по своим результатам с расчетом примера 4.11.

Расчет обратной связи по эквивалентному последовательному корректирующему устройству. Этот способ расчета основан на условии, что две системы с одинаковыми амплитудно-фазовыми характеристиками эквивалентны по своим динамическим свойствам. Если обозначить передаточную функцию системы с последовательным корректирующим устройством через $W_{п.к}(s)$, а передаточную функцию системы с обратной связью через $W_c(s)$, то

$$W_{п.к}(s) = W_c(s)$$

или

$$W(j\omega) W_{к}(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1 \mp W_{о.с}(j\omega) W_{оХВ}(j\omega)}.$$

Выбирая, как и раньше, интервал частот, для которого

$$|W_{о.с}(j\omega) W_{оХВ}(j\omega)| \gg 1,$$

получим выражение, на основании которого выбираем обратную связь:

$$W_{к}(j\omega) = \frac{1}{W_{о.с}(j\omega) W_{оХВ}(j\omega)},$$

откуда

$$W_{о.с}(j\omega) = \frac{1}{W_{к}(j\omega) W_{оХВ}(j\omega)}.$$

Следовательно,

$$20 \lg |W_{о.с}(j\omega)| = -20 \lg |W_{к}(j\omega)| - 20 \lg |W_{оХВ}(j\omega)|. \quad (4.16)$$

Чтобы получить логарифмическую амплитудно-частотную характеристику звена обратной связи, необходимо построить логарифмическую амплитудно-частотную характеристику $20 \lg |W_{оХВ}(j\omega)|$ звеньев, охваченных обратной связью, затем построить характеристику последовательного корректирующего устройства $20 \lg |W_{п.к}(j\omega)|$ и сложить обе характеристики. Характеристика, обратная суммарной характеристике, будет амплитудно-частотной характеристикой обратной связи.

Расчет корректирующих устройств при помощи амплитудно-фазовых характеристик. Так же как и при выборе корректирующих устройств

с помощью логарифмических характеристик, при расчете корректирующих устройств, использующем амплитудно-фазовые характеристики, основным условием является принадлежность систем к числу минимально-фазовых. По заданным показателям качества с помощью одной из номограмм (см. рис. 4.14) можно построить вещественную частотную характеристику замкнутой системы и далее использовать ее для получения желаемой амплитудно-фазовой характеристики. Поскольку поставлено условие о принадлежности системы к минимально-фазовой, то полученной вещественной частотной характеристике однозначно соответствует только одна мнимая частотная характеристика. Нали-

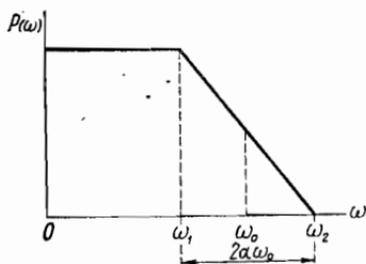


Рис. 4.24. Вещественная частотная характеристика

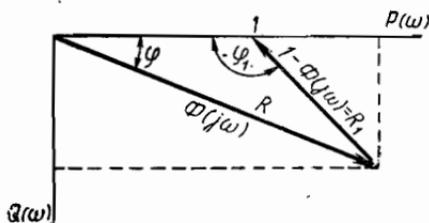


Рис. 4.26. Диаграмма, используемая при построении мнимой частотной характеристики

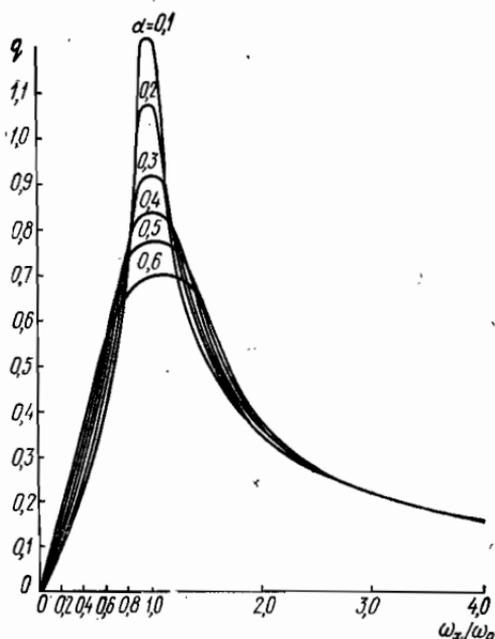


Рис. 4.25. Характеристика, служащая для построения мнимой частотной характеристики

чие вещественной и мнимой частотных характеристик позволяет получить амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы, отвечающей заданным показателям качества.

Чтобы построить мнимую частотную характеристику $Q(\omega)$, связанную с $P(\omega)$ однозначной зависимостью, необходимо разбить построенную вещественную частотную характеристику на трапеции (рис. 4.24) и для каждой из них определить значение

$$\alpha = (\omega_2 - \omega_1) / 2 \omega_0.$$

Найденным α на рис. 4.25 соответствуют кривые $q(\omega)$, где q — ординаты единичной мнимой частотной характеристики. Чтобы полу-

читать действительные ординаты $Q(\omega)$, необходимо умножить найденные из графика значения $q(\omega)$ на действительную высоту трапеции.

Мнимая частотная характеристика системы будет равна сумме отдельных характеристик. Чтобы воспользоваться характеристиками $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ при построении желаемой амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы, учтем выражение

$$W_{\text{ск}}(j\omega) = \frac{\Phi(j\omega)}{1 - \Phi(j\omega)} = \frac{R}{R_1} e^{j(\varphi - \varphi_1)}, \quad (4.17)$$

где $\Phi(j\omega)$ — частотная характеристика замкнутой системы.

В координатной системе $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ (рис. 4.26) для различных частот ω откладывают значения $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ и строят по ним вектор $\Phi(j\omega)$. Вычитая из единицы вектор $\Phi(j\omega)$, получают знаменатель формулы (4.17), а разделив вектор $\Phi(j\omega)$ на вектор $[1 - \Phi(j\omega)]$, находят вектор $W_{\text{ск}}(j\omega)$.

Вещественная $P(\omega)$ и мнимая $Q(\omega)$ частотные характеристики могут быть построены при помощи круговых диаграмм В. В. Солодовникова (рис. 4.27, а и б).

а)

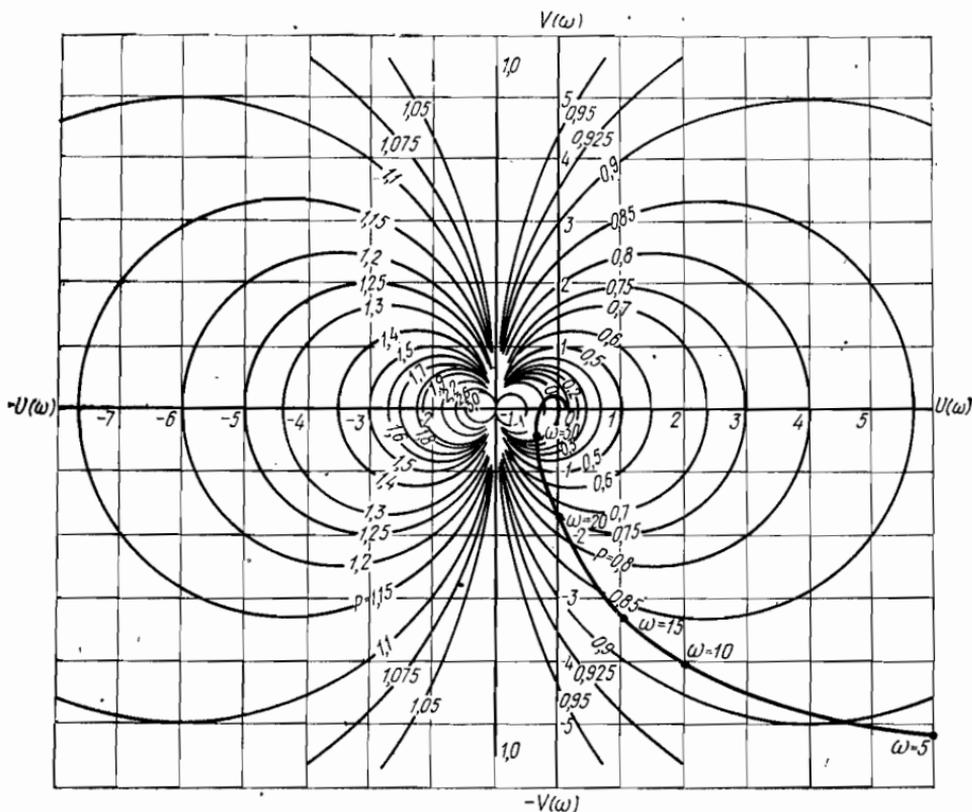


Рис. 4.27. Номограмма, служащая для

Частотная характеристика нескорректированной системы

$$W(j\omega) = \frac{35}{j\omega(T_d j\omega + 1)(T_{\text{эму}} j\omega + 1)} = \frac{35}{j\omega(0,15 j\omega + 1)(0,04 j\omega + 1)}$$

Как показали расчеты в примере 4.11, система неустойчива (см. рис. 4.20). Амплитудно-фазовая характеристика системы без коррекции построена на рис. 4.1 (см. пример 4.1). Характеристика указывает на необходимость введения корректирующего устройства.

Построим амплитудно-фазовую характеристику скорректированной системы, для чего определим вещественную частотную характеристику замкнутой системы, удовлетворяющей заданным показателям качества. При этом воспользуемся номограммой (см. рис. 4.14, а), построенной для $\kappa_1 = 0,5$.

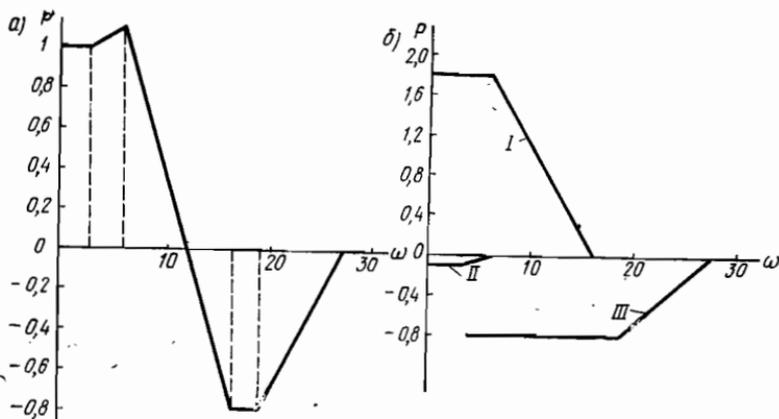


Рис. 4.28. Вещественная частотная характеристика

Коэффициенты, характеризующие типовую вещественную частотную характеристику $P(\omega)$, т. е. $\lambda_1 = 0,5$, $\lambda_2 = 0,6$, $\kappa_1 = 0,5$ и $\kappa_2 = 0,7$, могут быть использованы для построения вещественной частотной характеристики только для значений основного коэффициента наклона $\kappa_1 > 0,5$. Если $\kappa_1 < 0,5$, то при заданных коэффициентах λ_1 , λ_2 , κ_2 и κ_3 вещественная частотная характеристика будет отвечать физически не реализуемой системе. Выбрав $P_{\text{max}}(\omega) = 1,1$, при $\sigma_{\text{max}} = 25\%$ получим $P_{\text{min}}(\omega) = -0,8$. По нижней части номограммы при $P_{\text{max}}(\omega) = 1,1$ найдем значение $\tau_{\text{max}} = 5\pi/\omega_{\text{п}}$. При заданном времени $\tau_{\text{max}} = 1,3$ сек определим

$$\omega_{\text{п}} = 5 \cdot \pi / 1,3 = 12 \text{ сек}^{-1}.$$

Используя коэффициенты, характеризующие вещественную частотную характеристику (см. § 4.4), получим

$$\omega_3 = \kappa_1 \omega_{\text{п}} = 0,5 \cdot 12 = 6 \text{ сек}^{-1};$$

$$\omega_2 = \lambda \omega_{\text{п}} = 0,5 \cdot 12 = 6 \text{ сек}^{-1};$$

$$\omega_1 = \kappa_2 \omega_2 = 0,5 \cdot 6 = 3 \text{ сек}^{-1};$$

$$\omega_4 = 16 \text{ сек}^{-1} \text{ (из характеристики);}$$

$$\omega_5 = \omega_0 \kappa_3 = 27 \cdot 0,7 = 19 \text{ сек}^{-1}.$$

Вещественная частотная характеристика построена на рис. 4.28, а. Чтобы построить мнимую частотную характеристику, следует разбить вещественную

характеристику на трапеции (рис. 4.28, б). Согласно рис. 4.24, для каждой трапеции найдем значения

$$\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2 \quad \text{и} \quad \alpha = (\omega_2 - \omega_1)/2\omega_0.$$

Для трапеции I

$$\omega_0 = (16 + 6)/2 = 11 \text{ сек}^{-1}; \quad \alpha_1 = (\omega_2 - \omega_1)/2\omega_0 = 10/22 = 0,46.$$

Для трапеции II

$$\omega_0 = (6 + 3)/2 = 4,5 \text{ сек}^{-1}; \quad \alpha_2 = 3/9 = 0,34.$$

Для трапеции III

$$\omega_0 = (27 + 19)/2 = 23 \text{ сек}^{-1}; \quad \alpha_3 = 8/46 = 0,17.$$

Каждой величине α соответствует (см. рис. 4.25) кривая. Задавая различными значениями частоты ω , найдем по кривой для α значение q . Умножая q на высоту трапеции, получим значения ординат Q (табл. 4.12).

Сложив значения Q_1 , Q_2 , и Q_3 для одних и тех же частот, получим значения мнимой частотной характеристики $Q(\omega)$ (табл. 4.13). По данным табл. 4.12 и 4.13 построим характеристику (рис. 4.29).

Таблица 4.12

Номер трапеции	$\frac{\omega_x}{\omega_0}$	ω_x	q_1	$Q_1 < 0$	Заданные величины
I	0,2	2,2	0,15	0,29	$\omega_0 = 11 \text{ сек}^{-1};$ $\alpha_1 = 0,46;$ $P_{\max}(\omega) = 1,8$
	0,4	4,4	0,35	0,65	
	0,8	8,8	0,8	1,44	
	1,0	11,0	0,84	1,5	
	1,4	15,4	0,63	1,13	
	2,0	22,0	0,37	0,68	
	3,0	33,0	0,23	0,42	
II	$\frac{\omega_x}{\omega_0}$	ω_x	q_2	$Q_2 > 0$	$\omega_0 = 4,5 \text{ сек};$ $\alpha_2 = 0,34;$ $P_{\max}(\omega) = 0,1$
	0,2	0,9	0,15	0,015	
	0,4	1,8	0,28	0,028	
	0,8	3,6	0,82	0,082	
	1,0	4,5	0,90	0,09	
	1,4	6,9	0,65	0,065	
	2,0	9,8	0,37	0,037	
3,0	13,6	0,23	0,023		
III	$\frac{\omega_x}{\omega_0}$	ω_x	q_3	$Q_3 > 0$	$\omega_0 = 23 \text{ сек}^{-1};$ $\alpha_3 = 0,17;$ $P_{\max}(\omega) = -0,8$
	0,2	4,6	0,10	0,08	
	0,4	9,2	0,25	0,2	
	0,8	18,4	0,72	0,58	
	1,0	23,0	1,0	0,8	
	1,4	32,0	0,65	0,52	
	2,0	46,0	0,37	0,3	
3,0	69,0	0,23	0,18		

Таблица 4.13

ω	0	5	10	20	30	40	50
$Q(\omega)$	0	-0,5	-1,3	-0,3	+0,2	+0,18	+0,12

Располагая характеристиками $P(\omega)$ и $Q(\omega)$, найдем амплитудно-фазовую характеристику $W_{\text{ск}}(j\omega)$ скорректированной системы. Вычисленные на основании (4.17) значения модуля и фазы этой характеристики приведены в табл. 4.14, а сама характеристика $W_{\text{ск}}(j\omega)$ построена на рис. 4.30.

Таблица 4.14

ω	0	5	10	15	20	25
$P(\omega)$	1	1,05	0,3	-0,5	-0,8	-0,25
$Q(\omega)$	0	-0,6	-1,3	-0,9	-0,2	0,18
$R(\omega)$	∞	2,0	0,87	0,48	0,26	0,09
$\varphi^\circ(\omega)$	-90	-125	-138	-160	-177	-223

В основе расчета последовательного корректирующего устройства лежит равенство

$$W_{\text{ск}}(j\omega) = W(j\omega) W_{\text{к}}(j\omega),$$

где $W_{\text{ск}}(j\omega)$ — частотная характеристика скорректированной системы; $W(j\omega)$ — частотная характеристика нескорректированной систе-

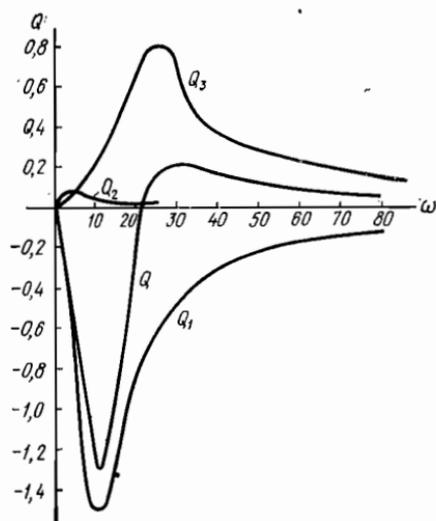


Рис. 4.29. Мнимые частотные характеристики

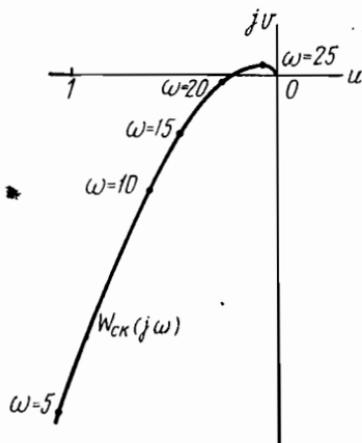


Рис. 4.30. Амплитудно-фазовая характеристика

мы; $W_R(j\omega)$ — частотная характеристика корректирующего устройства:

$$W_R(j\omega) = \frac{W_{СК}(j\omega)}{W(j\omega)} = \frac{R_{СК}}{R} e^{j(\varphi_{СК} - \varphi)}. \quad (4.18)$$

На амплитудно-фазовой характеристике скорректированной и нескорректированной систем выбираем точки, отвечающие одной и той же частоте ω_1 . Им соответствуют (рис. 4.31) векторы \overline{OB} и \overline{OA} . Находим

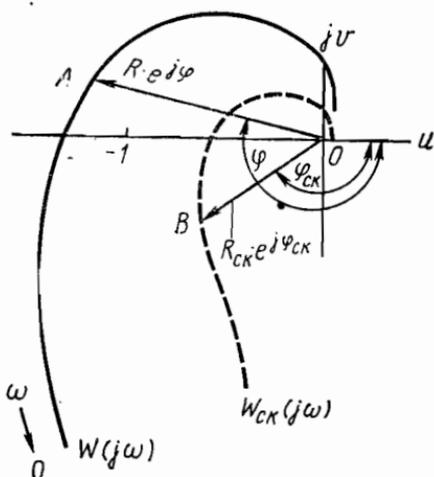


Рис. 4.31. Амплитудно-фазовые характеристики

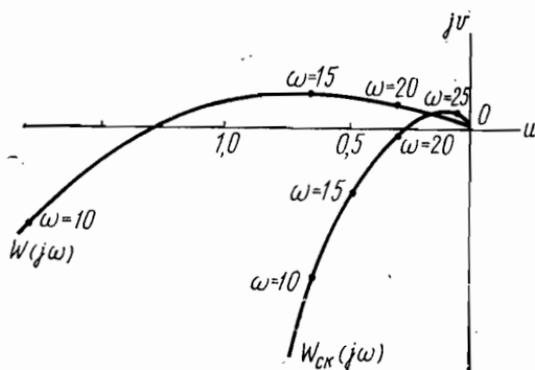


Рис. 4.32. Амплитудно-фазовые характеристики

модуль R_R и аргумент φ_R последовательного корректирующего устройства при $\omega = \omega_1$:

$$R_R = \overline{OB} / \overline{OA} = R_{СК} / R;$$

$$\varphi_R = \varphi_{СК} - \varphi.$$

Проделав аналогичный расчет для различных значений частот, получим ряд значений R_R и φ_R , по которым можно построить амплитудно-фазовую характеристику $W_R(j\omega)$ последовательного корректирующего устройства, а по ней выбрать структуру и параметры.

Пример 4.15. Выбрать корректирующее устройство для системы, рассмотренной в примере 4.14. Исходя из заданных показателей качества системы, построена скорректированная амплитудно-фазовая характеристика $W_{СК}(j\omega)$ (см. рис. 4.30). На рис. 4.32 эта характеристика нанесена вместе с характеристикой $W(j\omega)$ нескорректированной системы.

На основании (4.18) для различных частот находим отношение $R_{СК}/R$ и разность $\varphi_{СК} - \varphi$ (табл. 4.15). По данным табл. 4.15 построим амплитудно-фазовую характеристику $W_R(j\omega)$ корректирующего устройства (рис. 4.33, а) — полуокружность AB . Полученной характеристике отвечают передаточная функция

$$W_R(s) = \frac{r_2}{r_1 \nabla r_2} \cdot \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}$$

ω	5	10	15	20	25
$R_{СК}$	2	0,87	0,48	0,26	0,09
R	5,5	1,8	0,67	0,3	0,1
R_K	0,36	0,48	0,69	0,88	0,98
$\varphi_{СК}$	-125°	-138°	-160°	-177°	-223°
φ	-135°	-170°	-189°	-138°	
φ_K	$+10^\circ$	$+32^\circ$	$+29^\circ$	$+21^\circ$	

и схема, изображенная на рис. 4.33, б. При $\omega = 0$ характеристика отсекает на оси абсцисс отрезок OA , равный

$$r_2/(r_1 + r_2) = k = 0,34.$$

Постоянные времени равны:

$$T_1 = r_1 C, \quad T_2 = k T_1.$$

Постоянная времени T_1 может быть найдена по вещественной или мнимой составляющей при любом значении частоты. Представив выражение для $W_K(s)$ в несколько иной форме:

$$W_K(s) = [k(T_1 s + 1)] / (k T_1 s + 1),$$

получим

$$W_K(j\omega) = \frac{k^2 T_1^2 \omega^2 + k}{k_1^2 T_1^2 \omega^2 + 1} + j \frac{k_1 T_1 \omega (1 - k)}{k_1^2 T_1^2 \omega^2 + 1}.$$

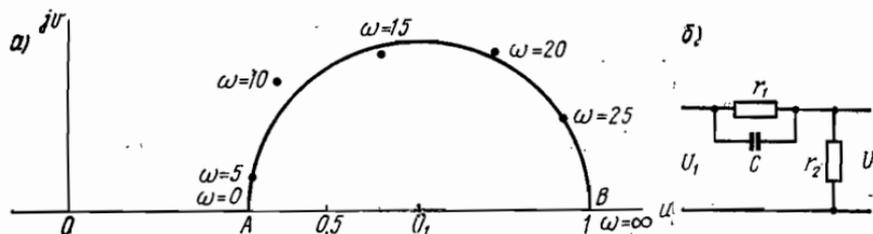


Рис. 4.33. Амплитудно-фазовая характеристика корректирующего устройства

Расчет можно сделать при любой частоте, например при $\omega = 20 \text{ сек}^{-1}$. При этом вещественная составляющая $u = 0,82$ и, следовательно,

$$\frac{(0,34 T_1 20)^2 + 0,34}{(0,34 T_1 20)^2 + 1} = 0,82,$$

откуда

$$T_1 = 0,24 \text{ сек} \text{ и } T_2 = 0,082 \text{ сек}.$$

Аналогичный результат получим при $\omega = 20 \text{ сек}^{-1}$ и $u = 0,3$. Если принять $C = 15 \text{ мкф}$, то

$$r_1 = \frac{T_1}{C} = \frac{0,24}{15 \cdot 10^{-6}} = 16 \text{ ком};$$

$$r_2 = \frac{k r_1}{1 - k} = \frac{0,34 \cdot 16}{0,66} = 8,2 \text{ ком}.$$

позволяют построить амплитудно-фазовую характеристику $W_{o.c}(j\omega)$ и определить параметры корректирующей цепи. После этого следует проверить контур обратной связи на устойчивость.

Пример 4.16. Определим параметры корректирующей обратной связи для системы, рассмотренной в примере 4.15, при $k_{э.у} = 30$ и $k_{эм.у} = 15$.

Для расчета воспользуемся амплитудно-фазовой характеристикой скорректированной и нескорректированной систем (см. рис. 4.32). Ниже приведен расчет для частоты $\omega = 15 \text{ сек}^{-1}$. Вектор скорректированной характеристики $W_{ск}(j\omega)$ при $\omega = 15 \text{ сек}^{-1}$ имеет модуль $R_{ск} = 0,48$ и фазу $\varphi_{ск} = -160^\circ$.

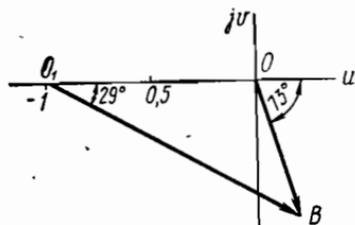


Рис. 4.35. К выбору корректирующего устройства

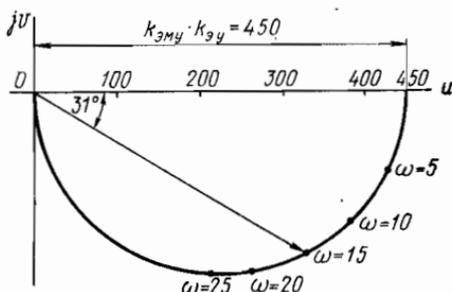


Рис. 4.36. Амплитудно-фазовая характеристика

Вектор нескорректированной системы при $\omega = 15 \text{ сек}^{-1}$ имеет модуль $R = 0,67$ и фазу $\varphi = -189^\circ$ (рис. 4.35). Тогда

$$R/R_{ск} = 1,4; \quad \varphi - \varphi_{ск} = -29^\circ.$$

Вектор

$$\overline{OB} = \frac{R}{R_{ск}} e^{j(\varphi - \varphi_{ск})}.$$

Соединив точку B с началом координат, получим вектор (см. рис. 4.35)

$$\overline{OB} = R_{OB} e^{j\varphi_{OB}}; \quad R_{OB} = 0,7; \quad \varphi_{OB} = -73^\circ.$$

Охватим обратной связью электронный и электромашинный усилители. Передаточная функция этих звеньев

$$W_{охв}(s) = \frac{k_{эм.у} k_{э.у}}{T_{эм.у} s + 1} = \frac{15 \cdot 30}{0,04s + 1}.$$

Амплитудно-фазовая характеристика изображена на рис. 4.36. При $\omega = 15 \text{ сек}^{-1}$ модуль вектора $R_{охв} = 375$, его фаза $\varphi_{охв} = -31^\circ$. При этом вектор цепи обратной связи

$$R_{o.c} = |\overline{OB}|/R_{охв} = 0,7/375 = 1,85 \cdot 10^{-3};$$

$$\varphi_{o.c} = \varphi_{OB} - \varphi_{охв} = -73 + 31 = 42^\circ.$$

По значениям $R_{o.c}$ и $\varphi_{o.c}$, вычисленным для других частот (табл. 4.16), построим амплитудно-фазовую характеристику обратной связи (рис. 4.37, а). Полученной характеристике соответствует стабилизирующий трансформатор (рис. 4.37, б), выход которого включен на сетку лампы электронного усилителя. Передаточная функция цепи обратной связи

$$W_{o.c}(s) = \frac{k_{o.c} T_1 s}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{U_{вх}(s)}{U_{вых}(s)},$$

где $k_{o.c} = k_T r_3 / (r_2 + r_3)$; k_T — коэффициент трансформации; $T_1 = L_1 / r_1$; $T_2 = L_2 / (r_2 + r_3)$.

ω	5	10	15	20	25
R	5,5	1,8	0,67	0,3	0,1
$R_{сн}$	2	0,87	0,48	0,26	0,09
$ \overline{OB} $	1,28	1,12	0,75	0,42	0,18
$R_{охв}$	440	415	375	345	300
φ°	-135	-170	-189	-198	-233
$\varphi_{сн}^\circ$	-125	-138	-160	-177	-223
$\varphi_{об}^\circ$	-17	-60	-73	-87	-120
$\varphi_{охв}^\circ$	-12	-22	-31	-39	-45
$R_{о.с} \cdot 10^3$	2,9	2,7	2	1,2	0,6
$\varphi_{о.с}^\circ$	-5	-38	-42	-46	-75

Параметры обратной связи могут быть определены по вектору любой частоты. Например, для $\omega = 15 \text{ сек}^{-1}$ диаметр окружности

$$d = k_{о.с} T_1 / (T_1 + T_2) = 3,0 \cdot 10^{-3}.$$

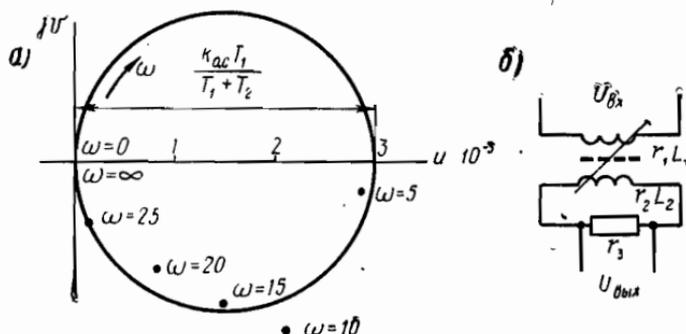


Рис. 4.37. Амплитудно-фазовая характеристика корректирующего трансформатора

Отложим на вещественной оси величину $1/d = 333$ (рис. 4.38) и из точки D опустим перпендикуляр. Продолжим вектор \overline{OB} до пересечения с перпендикуляром. Получим точку C . Величина $DC = b = -300$ (знак «—» означает направление отрезка согласно с отрицательной мнимой осью).

Определим T_2 из условия физической осуществимости обратной связи. Для осуществимости системы необходимо, чтобы удовлетворялось неравенство

$$T_2 > |bd|/\omega,$$

т. е.

$$T_2 > \frac{300 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{15} = 0,06 \text{ сек.}$$

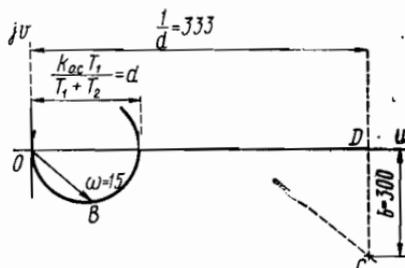


Рис. 4.38. К выбору корректирующего устройства

Примем $T_2 = 0,1$ сек; тогда постоянная времени

$$T_1 = \frac{1 - \omega T_2 b d}{\omega b d + \omega^2 T_2} = \frac{1 + 15 \cdot 0,1 \cdot 0,9}{-15 \cdot 300 \cdot 3 \cdot 10^{-3} + 15^2 \cdot 0,1} = 0,26 \text{ сек.}$$

Коэффициент обратной связи

$$k_{o.c.} = \frac{d(T_1 + T_2)}{T_1} = \frac{3 \cdot 10^{-3} \cdot 0,36}{0,26} = 4,0 \cdot 10^{-3} \text{ сек.}$$

Выбор корректирующих устройств при помощи обратных амплитудно-фазовых характеристик. Наряду с использованием прямых амплитудно-фазовых характеристик на практике иногда бывает удобно пользоваться обратными амплитудно-фазовыми характеристиками (см. пример 4.4).

Передаточная функция $W_{ск}(s)$ при наличии последовательного корректирующего устройства с передаточной функцией $W_K(s)$ [см. (4.18)]

$$W_{ск}(s) = W(s) W_K(s),$$

а частотная характеристика

$$W_{ск}(j\omega) = W(j\omega) W_K(j\omega).$$

Для построения обратной амплитудно-фазовой характеристики скорректированной системы с последовательной коррекцией используем соотношение

$$\frac{1}{W_{ск}(j\omega)} = Y_{ск}(j\omega) = \frac{1}{W(j\omega) W_K(j\omega)} = Y(j\omega) Y_K(j\omega),$$

откуда

$$Y_K(j\omega) = Y_{ск}(j\omega) / Y(j\omega). \quad (4.20)$$

Сравнивая формулы (4.20) и (4.18), видим, что принципиальной разницы в выборе последовательного корректирующего устройства с помощью прямых и обратных амплитудно-фазовых характеристик нет. Таким образом, пользование обратными амплитудно-фазовыми характеристиками может быть рекомендовано только тогда, когда их построение проще, чем построение прямых характеристик.

При использовании корректирующего устройства типа местной обратной связи частотная характеристика скорректированной системы определяется по (4.19).

Переходя к обратным амплитудно-фазовым характеристикам, получим

$$\frac{1}{W_{ск}(j\omega)} = Y_{ск}(j\omega) = \frac{1}{W(j\omega)} + \frac{W_{o.c.}(j\omega) W_{охв}(j\omega)}{W(j\omega)},$$

или

$$Y_{ск}(j\omega) = Y(j\omega) + \frac{W_{o.c.}(j\omega)}{W_{неохв}(j\omega)},$$

откуда получается выражение для выбора обратной связи

$$Y_{\text{ср}}(j\omega) = Y(j\omega) + Y_{\text{неохв}}(j\omega) W_{\text{о.с}}(j\omega) \quad (4.21)$$

или

$$W_{\text{о.с}}(j\omega) = \frac{Y_{\text{ср}}(j\omega) - Y(j\omega)}{Y_{\text{неохв}}(j\omega)}. \quad (4.22)$$

Выражение (4.22) на первый взгляд проще, чем (4.19). Однако трудоемкость расчетов по определению корректирующего устройства может быть не меньшей.

§ 4.5. Расчет переходных процессов линейных систем частотными методами

Частотные характеристики и их использование при расчетах переходных процессов. Зная передаточную функцию замкнутой системы и изображение входного воздействия, можно найти переходный процесс, пользуясь обратным преобразованием Лапласа. Принимая во внимание сложность подобного приема, в практических расчетах пользуются им только для систем невысокого порядка и обычно прибегают к частотным методам вычисления переходного процесса, основанным на двух выражениях:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \cdot \sin \omega t \cdot d\omega; \quad (4.23)$$

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega)}{\omega} \cdot \cos \omega t \cdot d\omega + P(0). \quad (4.24)$$

В (4.23) и (4.24) $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ — вещественная и мнимая частотные характеристики замкнутой системы; $P(0)$ — начальное значение вещественной частотной характеристики.

Непосредственный путь определения переходных процессов по приведенным формулам связан с трудностями, вследствие чего разработан ряд методов, позволяющих получить кривую переходного процесса с помощью графиков $P(\omega)$ или $Q(\omega)$.

Частотная характеристика системы, замкнутой единичной обратной связью по управляющему воздействию,

$$\Phi(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega).$$

Подставляя в выражения для $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ значения различных частот, можно найти эти характеристики.

Пример 4.17. Построить вещественную и мнимую частотные характеристики по управляющему воздействию для системы с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{10}{(0,1s + 1)(0,05s + 1)}.$$

ω	0	5	10	15	20	30	35	40	45	50	70	100
$P(\omega)$	0,91	0,915	0,92	0,93	1,0	1,05	0,88	0,5	0,1	-0,26	-0,45	-0,016
$Q(\omega)$	0	-0,067	-0,13	-0,22	-0,34	-0,72	-0,75	-1,1	-1,25	-1,3	-0,36	-0,06

Частотная характеристика замкнутой системы

$$\Phi(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)}$$

Подставляя значения $W(j\omega)$, получим

$$\Phi(j\omega) = \frac{10}{(11 - 0,005\omega^2) + 0,15j\omega}$$

Отделив вещественную и мнимую части, найдем:

$$P(\omega) = \frac{110 - 0,05\omega^2}{(11 - 0,005\omega^2)^2 + (0,15\omega)^2}$$

$$Q(\omega) = \frac{-1,5\omega}{(11 - 0,005\omega^2)^2 + (0,15\omega)^2}$$

Задаваясь различными значениями частоты ω , вычислим значения $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ (табл. 4.17), после чего построим частотные характеристики (рис. 4.39).

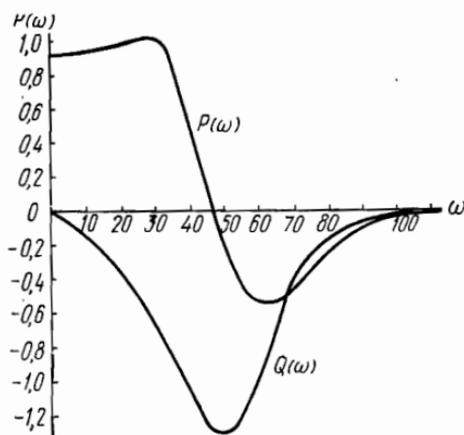


Рис. 4.39. Вещественная и мнимая частотные характеристики системы

Изложенный метод построения частотных характеристик связан с большой вычислительной работой и становится особенно трудоемким для систем, описываемых уравнениями высокого порядка.

Использование амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы значительно сокращает объем вычислительной работы, так как частотные характеристики $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ получаются непосредственно из амплитудно-фазовой характеристики графическим путем.

Рассмотрим случай, когда частотная характеристика замкнутой системы

$$\Phi(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)} = R_{\Phi} e^{j\varphi_{\Phi}}$$

Требуется для любой частоты ω_1 найти значения $P(\omega_1)$ и $Q(\omega_1)$. Проведем из начала координат вектор \overline{Oa} , соединим точку a с точкой O_1 , координаты которой равны $(-1, j0)$, а из точки O опустим перпендикуляр на вектор $\overline{O_1a}$. При этом получим значения $P(\omega_1)$ и $Q(\omega_1)$ (рис. 4.40, б):

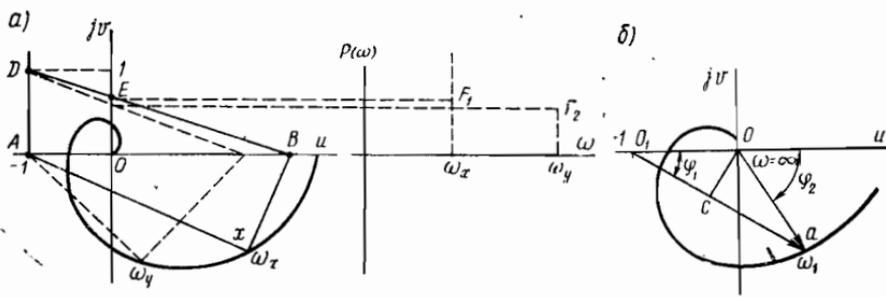


Рис. 4.40. К построению частотной характеристики

Рассмотрим теперь случай, когда частотная характеристика замкнутой системы

$$P(\omega_1) = ca/O_1a; \quad Q(\omega_1) = Oc/O_1a. \quad (4.25)$$

где $W_0(j\omega)$ — частотная характеристика объекта управления.

$$\Phi(j\omega) = \frac{W_0(j\omega)}{1 + W(j\omega)},$$

Подобное выражение для $\Phi(j\omega)$ получается, если поведение системы управления оценивается по отношению к возмущающему воздействию. Чтобы определить вещественные частотные характеристики, нужно иметь кроме частотной характеристики системы $W(j\omega)$ еще и частотную характеристику объекта $W_0(j\omega)$. Допустим, что обе характеристики построены (рис. 4.41). Для удобства подсчета рекомендуется обе характеристики строить в одинаковом масштабе. Выбираем на обеих характеристиках одну и ту же частоту ω_1 . Проведем из начала координат вектор \overline{Oa} в точку с частотой ω_1 . Затем проведем векторы \overline{Ob} и $\overline{O_1b}$ в точку ω_1 характеристики $W(j\omega)$. Взяв в качестве радиуса длину вектора \overline{Oa} , проведем окружность из точки O_1 и найдем угол $\varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2$. Из точки c опустим перпендикуляр cd . После этого вещественная $P(\omega)$ и мнимая $Q(\omega)$ частот-

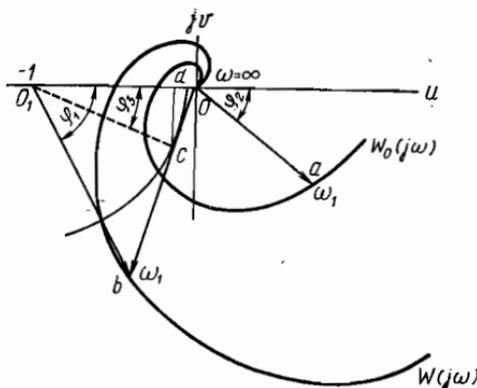


Рис. 4.41. Амплитудно-фазовые характеристики

в качестве радиуса длину вектора \overline{Oa} , проведем окружность из точки O_1 и найдем угол $\varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2$. Из точки c опустим перпендикуляр cd . После этого вещественная $P(\omega)$ и мнимая $Q(\omega)$ частот-

ные характеристики определяются отношениями:

$$P(\omega) = O_1 d / O_1 b;$$

$$Q(\omega) = dc / O_1 b.$$

Подобный, но несколько измененный способ построения вещественной частотной характеристики $P(\omega)$ при исследовании поведения системы по управляющему воздействию описывается в литературе [15]. При этом исходной кривой является амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы; ординаты вещественной частотной характеристики определяются графически.

Амплитудно-фазовую характеристику следует построить в координатной системе с одинаковым по обеим осям масштабе (см. рис. 4.40, б), наметить на ней ряд частот ω_i , для которых необходимо получить значения вещественной частотной характеристики, и, продолжив вправо вещественную ось u , нанести на продолжение ее значения частот ω_1 . Чтобы построить точки вещественной частотной характеристики, соответствующей какой-то частоте ω_x , следует соединить точку x с точкой A ,

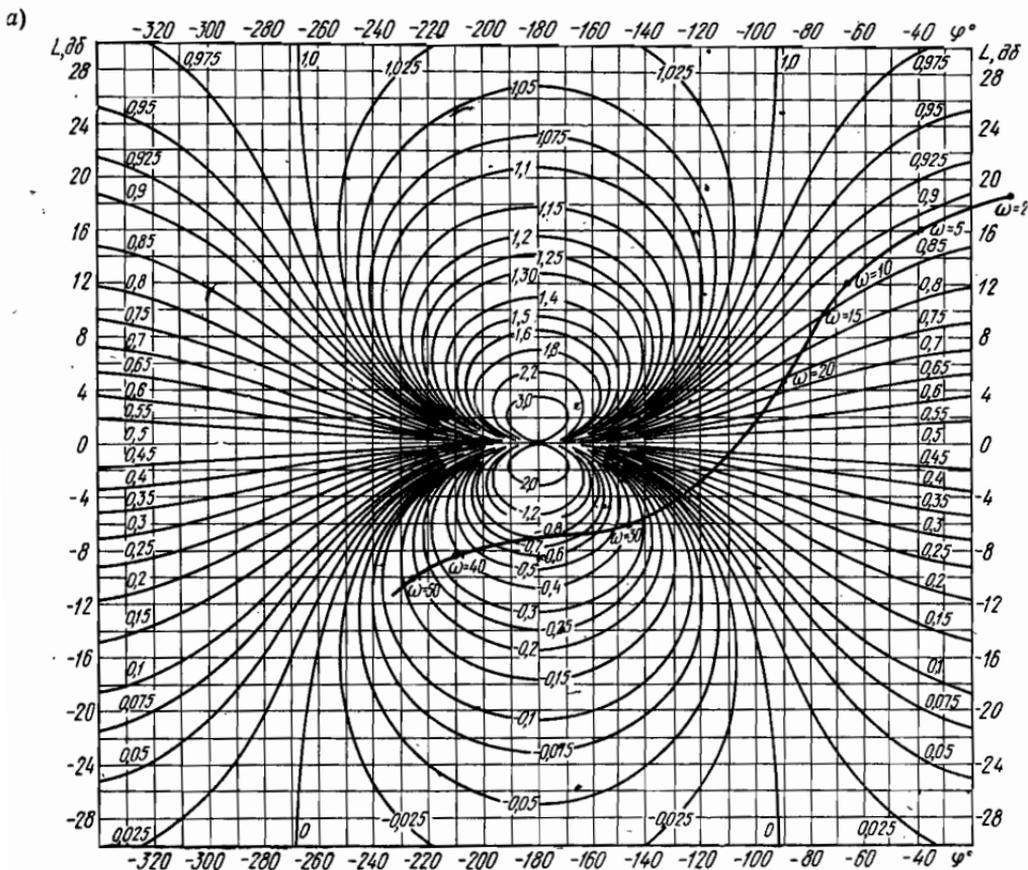
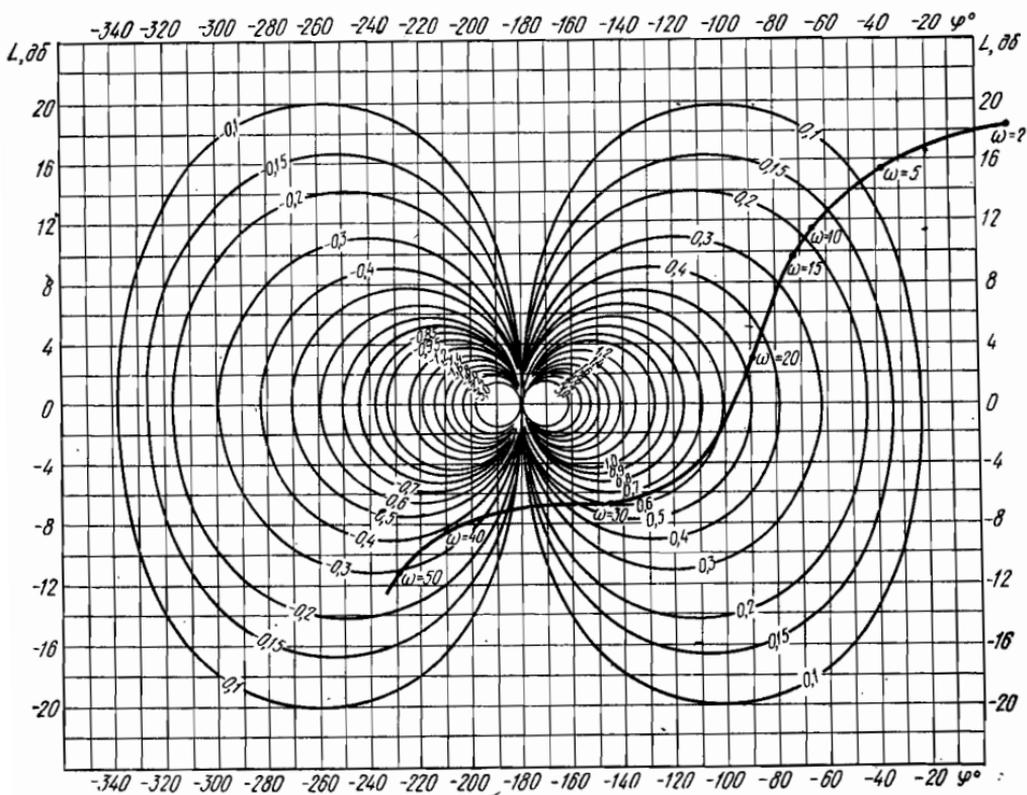


Рис. 4.42. Номограммы, служащие для построения вещественной (а) и мнимой (б)

имеющей координаты $(-1; j0)$. Восстановить в точке x перпендикуляр и провести его до пересечения с осью абсцисс (точка B). Соединить точку B с точкой D , лежащей на перпендикуляре (восстановленном в точке A) и имеющей ординату, равную единице. Пересечение линии BD с осью ординат даст точку E , которую следует перенести на перпендикуляр $\omega_x F_1$ в правой части рисунка. Отрезок $\omega_x F_1$ будет равен значению вещественной частотной характеристики при ω_x . Прделав указанное построение для нескольких частот ω_x , можно получить полную кривую $P(\omega)$. На рисунке показано построение для частот ω_x и ω_y .

В тех случаях, когда поведение системы управления оценивается по отношению к управляющему воздействию, получить вещественную и мнимую частотные характеристики можно при помощи круговых диаграмм, построенных В. В. Солодовниковым (см. рис. 4.27). Цифры, поставленные около окружностей, соответствуют ординатам вещественной и мнимой частотных характеристик. Если на круговую диаграмму нанести амплитудно-фазовую характеристику $W(j\omega)$ разомкнутой системы, то точки пересечения этой характеристики с окружностями укажут значения ординат $P(\omega)$ и $Q(\omega)$.

б)



частотных характеристик по логарифмической амплитудно-фазовой характеристике

Окружности, центры которых расположены на вещественной оси, относятся к вещественной частотной характеристике. Окружности, центры которых расположены на смещенной мнимой оси, служат для построения мнимой частотной характеристики по амплитудно-фазовым характеристикам.

При использовании логарифмических характеристик круговые диаграммы изменяют свой вид — окружности превращаются в кривые. Диаграмма, служащая для определения вещественной частотной характеристики по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы, показана на рис. 4.42, а, а диаграмма, служащая для определения мнимой частотной характеристики, — на рис. 4.42, б.

На диаграммах по оси абсцисс отложены значения фазы в градусах, а по оси ординат — значения усиления в децибелах. Чтобы получить значения $P(\omega)$ и $Q(\omega)$, следует на диаграмму нанести значения фазы в градусах и усиления в децибелах, соответствующих одной и той же частоте. Найдя таким образом ряд точек и соединив их плавной кривой, получим амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы. Точки пересечения этой характеристики с кривыми диаграммы дадут значения частотной характеристики $P(\omega)$ или $Q(\omega)$ замкнутой системы.

Пример 4.18. По амплитудно-фазовой характеристике, значения которой приведены в табл. 4.18, построим вещественную и мнимую частотные характеристики замкнутой системы.

Т а б л и ц а 4.18

$\omega, \text{сек}^{-1}$	0	2	5	10	15	20	30	40	50
$u(\omega)$	11,5	10,4	6,0	2,0	1,0	0	-0,4	-0,3	0,1
$v(\omega)$	0	-2	-5,2	-4	-3,2	-1,8	-0,3	0,48	0,15

Амплитудно-фазовая характеристика приведена на рис. 4.27. Взяв отметки в точках пересечения, получим цифры для построения вещественной и мнимой частотных характеристик (табл. 4.19).

Обе характеристики изображены на рис. 4.43.

Пример 4.19. Построим вещественную и мнимую частотные характеристики по логарифмическим характеристикам $L(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, изображенным на рис. 4.44. На рисунке приведены две амплитудные характеристики. Штриховая характеристика построена на основании точно вычисленных данных (табл. 4.20); сплошная характеристика — асимптотическая.

Для построения вещественной и мнимой частотных характеристик замкнутой системы воспользуемся номограммами (см. рис. 4.42, а и б), на которые нанесем значения амплитуд и фаз для одних и тех же частот. Для

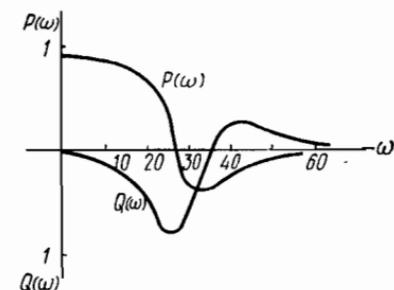


Рис. 4.43. Вещественная и мнимая частотные характеристики

амплитудно-частотной характеристики используем точные значения (см. табл. 4.20). Соединив точки плавной кривой, получим амплитудно-фазовую характеристику, наложенную на диаграмму. Точки пересечения амплитудно-

Таблица 4.19

$\omega, \text{сек}^{-1}$	0	2	5	10	15	20	30	40	50
$P(\omega)$	0,92	0,9	0,91	0,87	0,83	0,75	-0,35	-0,3	-0,15
$Q(\omega)$	0	-0,02	-0,07	-0,13	-0,24	-0,45	-0,5	0,3	0,25

Таблица 4.20

$\omega, \text{сек}^{-1}$	2	5	10	15	20	30	40	50
$L, \text{дБ}$	18,3	16	12	10	5	-6	-8	-10
$\varphi, \text{град}$	-5	-40	-66	-75	-90	-125	-140	-180

Таблица 4.21

$\omega, \text{сек}^{-1}$	2	5	10	15	20	30	40	50
$P(\omega)$	0,88	0,87	0,86	0,85	0,75	-0,4	-0,4	-0,17
$Q(\omega)$	—	-0,03	-0,18	-0,23	-0,47	-0,7	0,43	0,35

фазовой характеристики с кривыми диаграмм дадут значения вещественной частотной характеристики замкнутой системы (табл. 4.21), по которым построим вещественную частотную характеристику (рис. 4.45). Аналогично получим значения (табл. 4.21) для мнимой частотной характеристики (рис. 4.45).

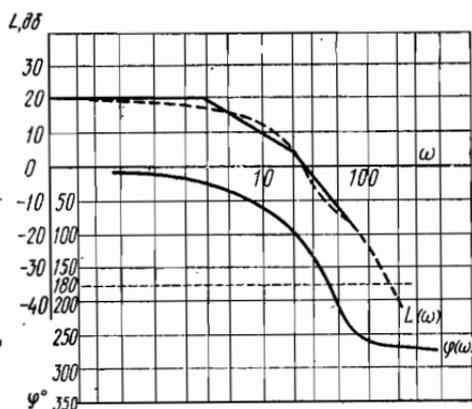


Рис. 4.44. Логарифмические частотные характеристики

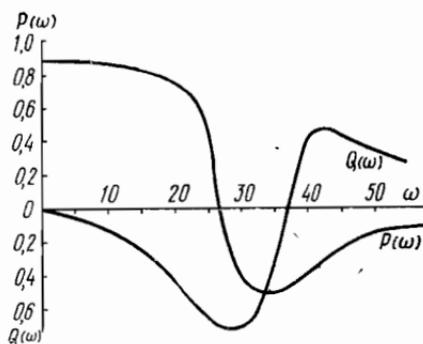


Рис. 4.45. Вещественная и мнимая частотные характеристики

Построение кривой переходного процесса. Приближенный метод построения переходного процесса по вещественной частотной характеристике замкнутой системы.

В основу этого метода положена формула (4.23). Из всех методов, использующих вещественную частотную характеристику, наиболь-

шее распространение на практике получил метод трапецеидальных частотных характеристик. Этот метод основан на замене действительной частотной характеристики типовой (рис. 4.46). Замену действительной характеристики типовой, состоящей из участков прямых, следует особенно тщательно производить на начальном участке. В случае неправильной аппроксимации начального участка результат расчета будет ошибочным.

Вычисление кривой переходного процесса основано на замене типовой вещественной частотной характеристики суммой трапеций. Для каждой трапеции находится кривая переходного процесса при

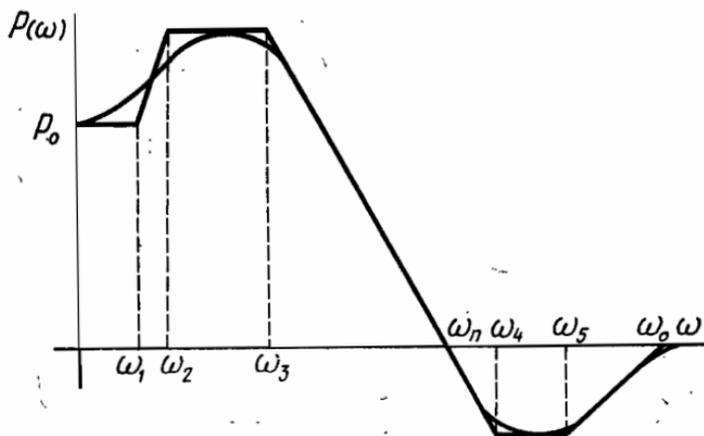


Рис. 4.46. Вещественная частотная характеристика системы

помощи таблиц h -функций (см. П. 1). Сумма кривых, полученных из отдельных трапеций, дает кривую переходного процесса системы. Поскольку таблица h -функций вычислена для трапеции с высотой $P(\omega) = 1$ и $\omega_0 = 1$, то для получения истинного значения ординат и абсцисс кривой переходного процесса следует ординаты кривых умножить на действительную высоту трапеции, а время разделить на действительное значение частоты ω_0 .

Пример 4.20. Построим кривую переходного процесса $x(t)$ для системы автоматического управления, вещественная частотная характеристика которой (табл. 4.22) в замкнутом состоянии изображена на рис. 4.47, а.

Таблица 4.22

ω	0	5	10	12,5	20	30	40	50
$P(\omega)$	1	0,88	0,4	0	-0,3	-0,2	-0,18	-0,1

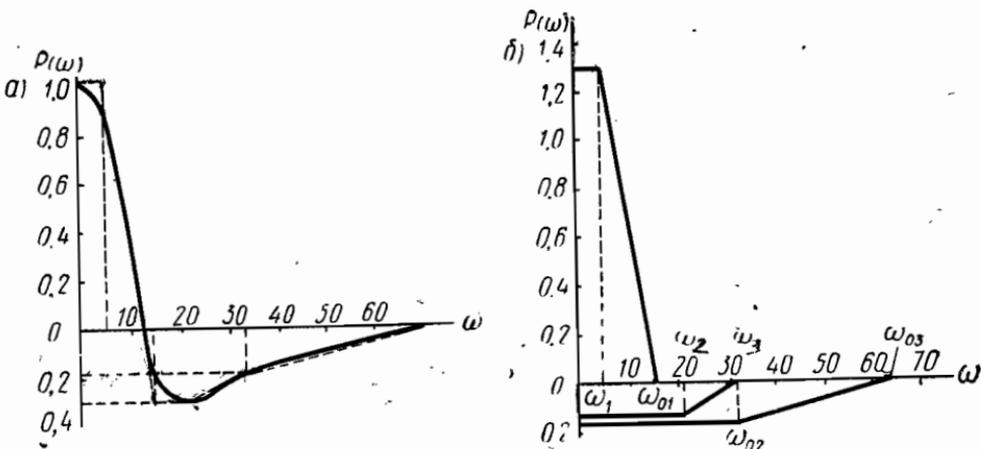


Рис. 4.47. Вещественная частотная характеристика

На рис. 4.47, б показана разбивка характеристики на трапеции. Параметры этих трапеций:

$$P_0(\omega) = 1,3; \quad \omega_1 = 5; \quad \omega_{01} = 15,5; \quad \kappa_1 = \frac{\omega_1}{\omega_{01}} = \frac{5}{15,5} = 0,37;$$

$$P_0(\omega) = 0,13; \quad \omega_2 = 21; \quad \omega_{02} = 31,5; \quad \kappa_2 = \frac{\omega_2}{\omega_{02}} = \frac{21}{31,5} = 0,67;$$

$$P_0(\omega) = -0,17; \quad \omega_3 = 31,5; \quad \omega_{03} = 65; \quad \kappa_3 = \frac{\omega_3}{\omega_{03}} = \frac{31,5}{65} = 0,485.$$

По таблице h -функций для каждого значения времени находят значения переходной функции для единичных трапеций (табл. 4.23).

Умножая ординаты на начальную высоту трапеций и деля времена на частоты ω_0 , равные соответственно 15,5; 31,5 и 65, получим три кривые переходного процесса, сумма которых соответствует переходному процессу системы (табл. 4.24). Кривые для трех трапеций и общая кривая переходного процесса показаны на рис. 4.48.

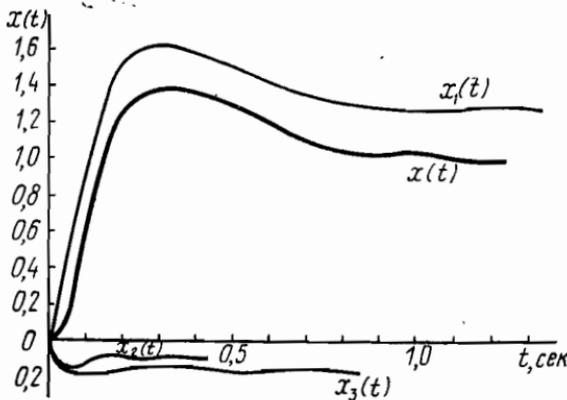


Рис. 4.48. Характеристика переходного процесса

Таблица 4.23

Трапеции	Значения времени							
	0	1	2	4	10	15	20	25
I трапеция ($x_1=0,32$)	0	0,4	0,84	1,1	1,11	0,99	1,0	1,01
II трапеция ($x_1=0,67$)	0	0,5	0,9	1,17	1,1	1,0	0,99	1,01
III трапеция ($x_1=0,47$)	0	0,45	0,83	1,15	1,0	1,1	1,1	0,99

Таблица 4.24

$t, \text{сек}$	0	0,06	0,13	0,26	0,65	1,0	1,3	1,6
$x_1(t)$	0	0,53	1,09	1,41	1,43	1,29	1,3	1,3
$t, \text{сек}$	0	0,004	0,01	0,19	0,48	0,7	0,95	1,2
$x_2(t)$	0	0,065	0,12	0,15	0,14	0,13	0,11	0,13
$t, \text{сек}$	0	0,003	0,065	0,126	0,32	0,48	0,63	0,8
$x_3(t)$	0	0,08	0,14	0,19	0,17	0,175	0,175	0,16

Литература к главе IV

1. Д. В. Васильев, В. Г. Чуич. Расчет систем автоматического управления. Машгиз, 1959.
2. Б. Н. Наумов. Переходные процессы в линейных системах автоматического регулирования. Госэнергоиздат, 1960.
3. Д. В. Васильев и др. Проектирование и расчет следящих систем. «Судостроение», 1964.
4. В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. Теория систем автоматического регулирования. «Наука», 1966.
5. В. М. Кейн, В. А. Тимофеев. Графический способ построения вещественной частотной характеристики замкнутой системы автоматического регулирования по амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы. Сб. статей «Автоматизация отопительных котельных». «Недра», 1966.
6. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования (под ред. В. В. Солодовникова), ч. 1 и 2. «Машиностроение», 1967.
7. Н. Т. Кузовков. Динамика систем автоматического управления. «Машиностроение», 1968.
8. К. В. Егоров. Основы теории автоматического регулирования. «Энергия», 1967.

РАСЧЕТ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ТРАЕКТОРИЙ КОРНЕЙ

§ 5.1. Общие сведения о методе траекторий корней

Достоинствами метода траекторий корней являются большая наглядность, простота исследования влияния отдельных параметров на динамику системы, возможность синтеза и оценки ее качества, а также построение кривых переходного процесса и частотных характеристик без применения вспомогательных графиков, номограмм и таблиц.

Запишем передаточную функцию одноконтурной замкнутой системы с единичной обратной связью:

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)}, \quad (5.1)$$

где $W(s)$ — передаточная функция разомкнутой системы, представляющая собой отношение двух полиномов:

$$W(s) = K \frac{B(s)}{A(s)} = K \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}, \quad m < n. \quad (5.2)$$

Отметим, что при использовании метода траекторий корней удобно записывать передаточные функции таким образом, чтобы после вынесения постоянного множителя K коэффициенты старших членов полиномов числителя и знаменателя функции (5.2) были равны единице. Индексы коэффициентов членов полиномов полагаем равными степени s соответствующего члена.

Как следует из (5.2), между коэффициентом передачи k разомкнутой системы и параметром K существует следующая зависимость:

$$k = Kb_0/a_v, \quad (5.3)$$

где v — порядок астатизма системы.

Подставив (5.2) в (5.1), получим

$$\Phi(s) = \frac{KB(s)}{A(s) + KB(s)}. \quad (5.4)$$

Нули передаточной функции (5.4) замкнутой системы совпадают с нулями передаточной функции (5.2) разомкнутой системы. Отыскание их не составляет труда, поскольку легко выделяются элементарные множители полинома $B(s)$, порядок которых обычно не превышает двух.

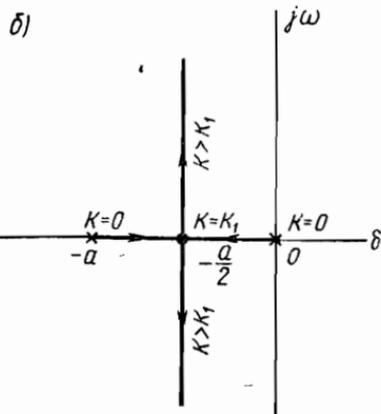
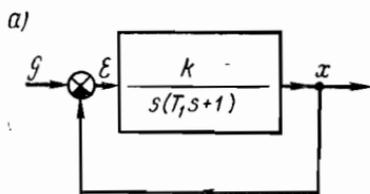
Чтобы определить полюса функции (5.4), необходимо найти корни характеристического уравнения замкнутой системы

$$A(s) + KB(s) = 0, \quad (5.5)$$

где s — неизвестная переменная.

Нули полинома $A(s)$, являющиеся полюсами передаточной функции разомкнутой системы, как правило, также находятся без труда. С помощью метода траекторий корней оказывается возможным определение корней уравнения (5.5) по известным нулям полиномов $A(s)$ и $B(s)$.

При использовании метода траекторий корней обычно один из параметров разомкнутой системы полагают изменяющимся, «свободным» (чаще всего в качестве такого параметра выбирают K), и, следуя определенным правилам, строят на комплексной плоскости s кривые, показывающие, как перемещаются (мигрируют) корни уравнения (5.5) при изменении свободного параметра. Эти кривые называются *траекториями корней* (или *корневым годографом*).



В некоторых случаях оказывается целесообразным в качестве свободного параметра выбрать не K , а какой-нибудь другой параметр системы, линейно входящий в уравнение (5.5).

В простейших случаях, когда порядок уравнения, описывающего динамику исследуемой системы, не превышает двух, траектории корней построить несложно, что иллюстрируется далее примерами. В более сложных случаях применяются специальные графические и аналитические способы построения (см. § 5.2).

Рис. 5.1. Структурная схема и траектории корней системы второго порядка

Пример 5.1. Пусть передаточная функция разомкнутой следящей системы (рис. 5.1, а)

$$W(s) = \frac{k}{s(T_1 s + 1)} = K \frac{1}{s(s+a)}, \quad (5.6)$$

где $K = k/T_1$, $a = 1/T_1$.

Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$s^2 + as + K = 0 \quad (5.7)$$

имеет корни

$$s_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - K}.$$

При $K = 0$ имеем $s_1 = 0$, $s_2 = -a = -1/T_1$, и, следовательно, корни уравнения (5.7) совпадают с полюсами функции (5.6) (они обозначены крестиками на рис. 5.1, б). Если $0 < K < a^2/4$, то корни перемещаются по вещественной оси и при $K = K_1 = a^2/4$ сливаются в двойной корень в кратной точке. При дальнейшем увеличении K корни уходят в бесконечность по двум комплексно сопряженным траекториям, параллельным мнимой оси.

Из траекторий корней рассматриваемой системы видно, что при любых значениях параметра $K > 0$ система устойчива, поскольку корни характеристического уравнения замкнутой системы располагаются всегда в левой половине плоскости s .

При комплексно-сопряженных корнях ($K > a^2/4$) затухание в системе одинаково ($\delta = -a/2 = -0,5/T_1$) для разных значений K . Величина коэффициента демпфирования ζ , очевидно, уменьшается при увеличении K , а собственная частота системы ω_0 увеличивается.

Сравним стандартное уравнение свободного движения звена второго порядка

$$T^2 \ddot{x} + 2\zeta T \dot{x} + x = 0,$$

или

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\omega_0 = 1/T),$$

и уравнение (5.7), найдем:

$$\zeta = \frac{a}{2\sqrt{K}} = \frac{1}{2\sqrt{kT_1}}; \quad \omega_0 = \sqrt{K} = \sqrt{\frac{k}{T_1}}.$$

Пример 5.2. Охватим следящую систему (см. пример 5.1) гибкой обратной связью, передаточная функция которой $W_{o.c} = \tau s$ (рис. 5.2). Разомкнув систему справа от второго элемента суммирования, запишем передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(s) = \frac{k(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)} = \frac{K(s + b)}{s(s + a)}, \quad (5.8)$$

где

$$K = k\tau/T_1, \quad a = 1/T_1, \quad b = 1/\tau.$$

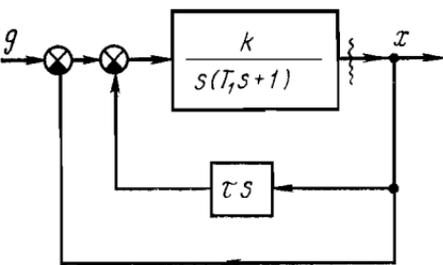


Рис. 5.2. Структурная схема системы второго порядка при введении гибкой обратной связи

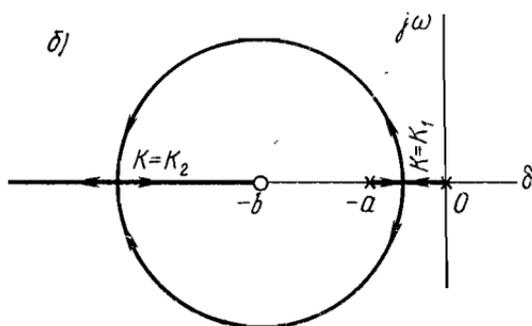
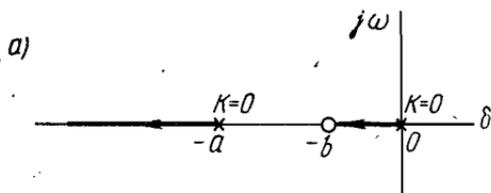


Рис. 5.3. Траектории корней системы

Решив характеристическое уравнение замкнутой системы

$$s^2 + (a + K)s + Kb = 0, \quad (5.9)$$

получим

$$s_{1,2} = -\frac{a+K}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+K}{2}\right)^2 - Kb}. \quad (5.10)$$

При $K = 0$ имеем $s_1 = 0$ и $s_2 = -a = -1/T_1$, т. е. корни совпадают с полюсами функции (5.8). Пусть $a > b$, тогда корни могут быть только вещественными, что легко установить, исследовав дискриминант уравнения (5.9). Следовательно, при увеличении K корни будут перемещаться по вещественной оси (рис. 5.3, а), причем при $K \rightarrow \infty$ первый корень движется к предельной точке $-b = -1/\tau$, совпадающей с нулем функции (5.8) (он обозначен кружком), а второй корень уходит в бесконечность по отрицательной вещественной оси.

Если $a < b$, то исследование дискриминанта уравнения (5.9) показывает, что при $K_1 < K < K_2$, где

$$K_{1,2} = 2b(1 \mp \sqrt{1-a/b}) - a,$$

корни оказываются комплексно-сопряженными. Таким образом, при $0 < K < K_1$ корни движутся по вещественной оси до первой кратной точки ($K = K_1$), где они сливаются в один двойной корень (рис. 5.3, б). При дальнейшем увеличении K пара комплексно-сопряженных корней перемещается по двум полуокружностям до встречи во второй кратной точке ($K = K_2$). Действительно, при $K_1 < K < K_2$ на основании (5.10) имеем

$$\delta = -\frac{a+K}{2}; \quad \omega = \sqrt{Kb - \left(\frac{a+K}{2}\right)^2},$$

следовательно,

$$(\delta \mp b)^2 \mp \omega^2 = \left(-\frac{a+K}{2} \mp b\right) \mp Kb - \left(\frac{a+K}{2}\right)^2 = b(b-a),$$

а значит, траектории корней являются дугами окружности, центр которой находится в предельной точке $-b = -1/\tau$, а радиус $r = \sqrt{b(b-a)}$.

При $K > K_2$ корни вновь движутся по вещественной оси, причем при $K \rightarrow \infty$ первый корень стремится к предельной точке $-b = -1/\tau$, а второй корень уходит в бесконечность.

§ 5.2. Построение траекторий корней

Рассмотрим графо-аналитический метод построения траекторий корней [1, 2, 3]. Характеристическое уравнение замкнутой системы (5.5) перепишем в виде

$$1 + KB(s)/A(s) = 0,$$

откуда с учетом (5.2)

$$W(s) = -1. \quad (5.11)$$

Поскольку $W(s)$ — функция комплексного переменного $s = \delta + j\omega$, то на основании (5.11) получим два уравнения:

$$\arg W(s) = \pm \pi(2r + 1), \quad r = 0, 1, 2, \dots; \quad (5.12)$$

$$\text{mod } W(s) = 1, \quad (5.13)$$

первое из которых (записанное для $K > 0$, т. е. для отрицательной обратной связи) называется *уравнением фаз*, а второе — *уравнением модулей*.

Обычно в числителе и знаменателе передаточной функции разомкнутой системы легко выделить элементарные множители, порядок которых не превышает двух, что позволяет найти сразу же нули N_j и полюса q_i функции $W(s)$ и записать ее в следующем виде:

$$W(s) = K \prod_{j=1}^m (s - N_j) / \prod_{i=1}^n (s - q_i).$$

Геометрически модули $l_j^N = \text{mod}(s - N_j)$ и $l_i = \text{mod}(s - q_i)$ представляют собой векторы, проведенные из соответствующих нулей и полюсов в некоторую точку s комплексной плоскости, а аргументы

$\vartheta_j = \arg(s - N_j)$ и $\vartheta_i = \arg(s - q_i)$ — углы, между этими векторами и осью δ . Если эта точка принадлежит траектории корней, то согласно уравнениям (5.12) и (5.13) имеем:

$$\sum_{i=1}^m \vartheta_i^N - \sum_{i=1}^n \vartheta_i = \pm(2r+1)\pi; \quad (5.14)$$

$$K = \prod_{i=1}^n l_i / \prod_{j=1}^m l_j^N. \quad (5.15)$$

Найдя, например, путем подбора с помощью транспортира и линейки семейство точек комплексной плоскости, удовлетворяющих уравнению (5.14), можно построить траектории корней замкнутой системы при изменении параметра K от 0 до ∞ . Значение параметра K для любой точки траектории легко определяется графо-аналитически с использованием выражения (5.15).

При решении практических задач в большинстве случаев достаточно ограничиться приближенным построением траекторий корней, причем существенно выяснить прохождение их на отдельных участках, а не во всем интервале $0 \leq K \leq \infty$. В связи с этим перед построением целесообразно наметить приближенно конфигурацию траекторий корней для исследуемой системы. Такая наметка, а также дальнейшее построение траекторий корней существенно облегчаются, если иметь в виду некоторые простые правила и соотношения, приводимые ниже без доказательства.

1. Число траекторий равно степени характеристического уравнения системы. Так, в примерах 5.1 и 5.2 рассматривались системы второго порядка, соответственно чему число траекторий корней для этих систем (см. рис. 5.1, б и 5.3) равно двум.

2. При $K = 0$ траектории корней начинаются в полюсах передаточной функции разомкнутой системы. Если $K \rightarrow \infty$, то m траекторий корней вливаются в предельные точки, соответствующие нулям передаточной функции разомкнутой системы, а остальные $(n - m)$ траекторий уходят в бесконечность.

Для примера 5.1 значения $n = 2, m = 0$, и поэтому обе траектории, начавшись в точках $s_1 = 0$ и $s_2 = -1/T_1$, уходят при $K \rightarrow \infty$ в бесконечность (см. рис. 5.1, б). В примере 5.2 значения $n = 2, m = 1$ и только одна траектория уходит в бесконечность, другая же стремится к предельной точке $-1/\tau$ (рис. 5.3, а и б).

3. Асимптоты траекторий корней при $K \rightarrow \infty$ представляют собой полупрямые, исходящие из точки на вещественной оси с абсциссой

$$\delta_a = \frac{\sum_{i=1}^n q_i - \sum_{j=1}^m N_j}{n - m}, \quad (5.16)$$

где q_i и N_j — соответственно полюса и нули передаточной функции разомкнутой системы.

Углы наклона асимптот относительно вещественной оси

$$\gamma_a = \frac{2i+1}{n-m} \pi, \quad i = 0, 1, \dots, n-m-1. \quad (5.17)$$

В примере 5.1 значения $q_1 = 0$, $q_2 = -1/T$ и по формуле (5.16) $\delta_a = -0,5/T_1$, что совпадает с ранее найденным значением (см. рис. 5.1, б). Углы наклона асимптот [см. (5.17)] равны $\gamma_{a1} = \pi/2$ и $\gamma_{a2} = 3\pi/2$.

Пусть

$$W(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+5)} \quad (5.18)$$

По формулам (5.16) и (5.17) получаем

$$\delta_a = \frac{-2-5}{3} = -2,33; \quad \gamma_{ai} = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}i, \quad i=0, 1, 2$$

и, следовательно, асимптоты занимают положение, показанное на рис. 5.4.

4. Траектории корней являются непрерывными и кривыми (или отрезками прямых), причем участки траекторий, соответствующие комплексно-сопряженным корням, симметричны относительно вещественной оси. Это свойство иллюстрируется, в частности, траекториями, показанными на рис. 5.1, б и 5.3.

5. Траектории на вещественной оси (при $K \geq 0$) совпадают с теми ее отрезками, справа от которых общее число вещественных нулей и полюсов передаточной функции разомкнутой системы нечетно. Так, на рис. 5.1, б траекториям корней принадлежит отрезок вещественной оси, имеющей справа один полюс ($q_1 = 0$). В случае, показанном на рис. 5.3, а и б, имеется два участка траекторий корней, для одного из них справа находится один полюс ($q_1 = 0$), а для второго справа находятся два полюса ($q_1 = 0, q_2 = -a$) и один нуль ($N_1 = -b$).

Рис. 5.4. Асимптоты траекторий корней системы третьего порядка

При расположении полюсов функции $W(s)$, показанном на рис. 5.4, траекториям корней принадлежит участок вещественной оси между $q_1 = 0$ и $q_2 = -2$, а также участок слева от $q_3 = -5$.

6. Точки пересечения с вещественной осью, где траектории покидают вещественную ось, соответствуют кратным корням уравнения (5.5). Для определения кратного корня $s = \delta_m$ используем известное из алгебры условие [4], согласно которому кратный корень удовлетворяет производной от основного уравнения, и, следовательно, в дополнение к уравнению (5.5) можно записать

$$\frac{dA(s)}{ds} + K \frac{dB(s)}{ds} = 0. \quad (5.19)$$

Исключив из (5.5) и (5.19) величину K , получим уравнение для определения координат кратных точек:

$$A(s) \frac{dB(s)}{ds} - B(s) \frac{dA(s)}{ds} = 0. \quad (5.20)$$

Найденные из уравнения (5.20) значения $s = \delta_m$ должны также удовлетворять уравнению фаз (5.14).

В случае, когда передаточная функция определяется уравнением (5.18),

$$A(s) = s^3 + 7s^2 + 10s;$$

$$B(s) = 1$$

и, следовательно, уравнение (5.20) имеет вид

$$3s^2 + 14s + 10 = 0,$$

откуда

$$s_1 = \delta_{m1} = -3,77;$$

$$s_2 = \delta_{m2} = -0,89.$$

Траектории корней принадлежат, а значит, удовлетворяют

уравнению фаз только точка с координатой $\delta_m = -0,89$, она и будет в данном случае кратной точкой (рис. 5.5).

7. Точки пересечения с мнимой осью (критические точки) можно определить, используя критерии устойчивости. Так, например, воспользовавшись критерием Михайлова, подставим в уравнение (5.5) значение $s = j\omega$. При этом, приравняв нулю отдельно мнимую и вещественную части, получим:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} A(j\omega) + K \operatorname{Re} B(j\omega) &= 0; \\ \operatorname{Im} A(j\omega) + K \operatorname{Im} B(j\omega) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

Исключив K , находим уравнение для определения величины $\omega = \omega_{кр}$ в критической точке:

$$\operatorname{Re} A(j\omega) \operatorname{Im} B(j\omega) - \operatorname{Re} B(j\omega) \operatorname{Im} A(j\omega) = 0. \quad (5.22)$$

Если, в частности, $m + n \leq 8$, то уравнение (5.22) относительно ω^2 имеет степень, не превышающую трех, а именно:

$$\begin{aligned} (a_3 b_4 - a_4 b_3 + a_5 b_2 - a_6 b_1) \omega^6 + (-a_1 b_4 + a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_4 b_1 - \\ - a_5 b_0) \omega^4 + (-a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0) \omega^2 + \\ + (a_0 b_1 - a_1 b_0) = 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

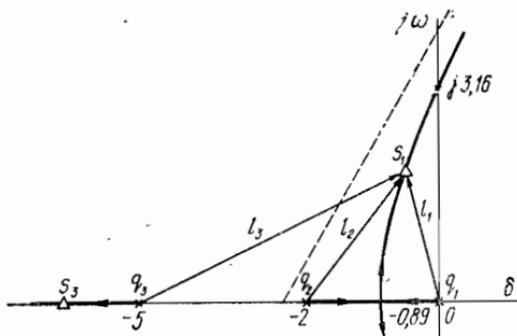


Рис. 5.5. Построение траекторий корней для системы третьего порядка

Величину K в критических точках можно определить графически, воспользовавшись формулой (5.15), или аналитически, записав на основании (5.21) выражение

$$K = - \frac{\operatorname{Re} A(j\omega)}{\operatorname{Re} B(j\omega)} = - \frac{\operatorname{Im} A(j\omega)}{\operatorname{Im} B(j\omega)}. \quad (5.24)$$

При $m + n \leq 8$ выражение (5.24) можно представить как

$$K = - \frac{a_0 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - a_6 \omega^6 + a_8 \omega^8}{b_0 - b_2 \omega^2 + b_4 \omega^4} = \quad (5.25)$$

$$= - \frac{a_1 - a_3 \omega^2 + a_5 \omega^4 - a_7 \omega^6}{b_1 - b_3 \omega^2}.$$

В качестве примера определим критические частоты для случая, когда передаточная функция разомкнутой системы выражается формулой (5.18). При этом в (5.25) $a_0 = 0$, $a_1 = 10$, $a_2 = 7$; $a_3 = 1$ и $b_0 = 1$, а остальные коэффициенты a_i и b_j равны нулю. В этом случае уравнение (5.23) имеет вид

$$\omega^2 - a_1 b_0 = 0,$$

откуда после подстановки значений коэффициентов найдем

$$\omega = \omega_{кр} = \pm 3,16.$$

8. Углы выхода траекторий из полюса и входа в нули получим с помощью выражения (5.14), записав его для исследуемого полюса или нуля. Покажем на примере определение угла выхода траекторий из комплексных полюсов, предположив, что передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s) = K \frac{s \diamond 5}{s(s \diamond 4)(s^2 \diamond 5s \diamond 8,5)}, \quad (5.26)$$

т. е. $q_1 = 0$; $q_{2,3} = -2,5 \pm j1,5$; $q_4 = -4$; $N_1 = -5$ (рис. 5.6).

Найдем угол выхода траекторий из полюса q_2 при $i = 0$ [см. (5.14)]:

$$\vartheta_2 = 180^\circ - (\vartheta_1 + \vartheta_3 + \vartheta_4) + \vartheta_1^N.$$

Непосредственно из рис. 5.6 найдем значения $\vartheta_1 = 143,5^\circ$; $\vartheta_3 = 90^\circ$; $\vartheta_4 = 36^\circ$; $\vartheta_1^N = 26,5^\circ$. Подставив их в выражение для ϑ_2 , определим $\vartheta_2 = -63^\circ$.

Углы выхода из вещественного полюса и входа в вещественный нуль равны 0 или $\pm 180^\circ$.

9. Сумма координат точек на траекториях при одинаковых K , согласно формуле Виета, равна взятому с обратным знаком коэффициенту при s^{n-1} в уравнении (5.5).

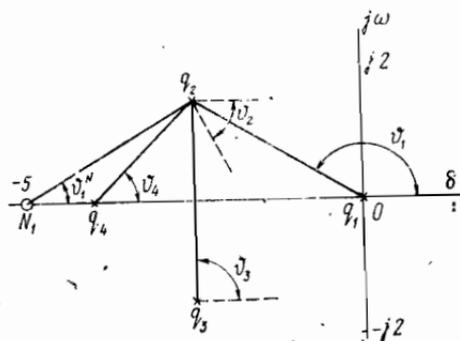


Рис. 5.6. Определение угла выхода траектории из полюса q_2

Рис. 5.6. Определение угла выхода траекторий из комплексных полюсов, предположив, что передаточная функция разомкнутой системы

10. Произведение координат точек на траекториях при одинаковых K равно по формуле Виета $(-1)^n a_0$ (при $a_n = 1$).

Из асимптотических свойств траекторий корней вытекает, что если $n - m > 2$, то при $K \rightarrow \infty$ часть этих траекторий уходит в правую половину, а другая часть — в левую половину плоскости s . Удаляющиеся влево от мнимой оси корни при сравнительно больших K оказывают незначительное влияние на динамику системы, определяющуюся в основном теми корнями, которые приближаются к мнимой оси плоскости s и называются *преобладающими*, или *доминирующими*. Число этих корней не превышает обычно трех, а чаще всего равно двум, вследствие чего динамические характеристики исследуемых систем близки к соответствующим характеристикам систем третьего, иногда первого, а чаще всего второго порядка.

В связи с этим может возникнуть необходимость в более точном построении отдельных участков траекторий преобладающих корней. Это построение можно выполнить графо-аналитически или аналитически.

В работе [4] получено уравнение

$$\left[A(\delta) - \frac{\omega^2}{2!} A''(\delta) + \dots \right] \left[B'(\delta) - \frac{\omega^3}{3!} B'''(\delta) + \dots \right] - \left[A'(\delta) - \frac{\omega^3}{3!} A'''(\delta) + \dots \right] \left[B(\delta) - \frac{\omega^2}{2!} B''(\delta) + \dots \right] = 0, \quad (5.27)$$

позволяющее, задавшись величиной δ , определить значения ω , соответствующие точкам траекторий корней. При этом значения параметра K могут быть вычислены по формулам

$$K = - \frac{A(\delta) - \frac{\omega^2}{2!} A''(\delta) + \dots}{B(\delta) - \frac{\omega^2}{2!} B''(\delta) + \dots} = - \frac{A'(\delta) - \frac{\omega^3}{3!} A'''(\delta) + \dots}{B'(\delta) - \frac{\omega^3}{3!} B'''(\delta) + \dots}, \quad (5.28)$$

вторая из которых пригодна только для определения K на комплексно-сопряженных участках траекторий корней.

В работе [4] даны развернутые формулы (5.27) и (5.28) для различных сочетаний степеней полиномов $A(s)$ и $B(s)$. При этом оказывается, что для $m + n \leq 8$ уравнение (5.27) имеет степень не выше третьей.

Удобно строить аналитически траектории корней, используя метод смещения мнимой оси [4]. Можно доказать, что конфигурация траекторий корней не зависит от положения мнимой оси на плоскости s . Сместив мнимую ось влево на расстояние α , введем новую переменную $s^* = s + \alpha$ и перепишем характеристическое уравнение (5.5):

$$A(s^* - \alpha) + KB(s^* - \alpha) = 0,$$

или

$$A^*(s^*) + KB^*(s^*) = 0, \quad (5.29)$$

где $A^*(s^*)$ и $B^*(s^*)$ — полиномы от s^* , имеющие тот же порядок, что и полиномы $A(s)$ и $B(s)$ соответственно, но отличающиеся коэффициентами. Теперь точки, принадлежащие траекториям корней основного уравнения (5.5) при $s = -\alpha$, можно найти, определив точки пересечения

чения смещенной мнимой оси с траекториями корней уравнения (5.29). При этом удобно использовать ранее записанное уравнение (5.23). Задаваясь значениями α и используя метод смещения мнимой оси, определим соответствующие точки, принадлежащие траекториям корней.

Для систем с запаздыванием траектории корней можно строить, используя методику, указанную в книге [1].

Пример 5.3. Построим траектории корней, если передаточная функция разомкнутой системы выражается формулой (5.18). Ранее для этого случая было найдено положение асимптот (см. рис. 5.4), абсцисса кратной точки ($\delta_m = -0,89$) и критические частоты ($\omega_{кр} = \pm 3,16$).

Из уравнения (5.27) имеем:

$$A'(\delta) = 3\delta^2 + 14\delta + 10; \quad A'' = 0; \quad A'''(\delta) = 6; \quad B'(\delta) = B''(\delta) = 0$$

и, следовательно,

$$\omega^2 = 3\delta^2 + 14\delta + 10.$$

Задаваясь значениями δ , вычислим соответствующие величины ω и построим по точкам искомые траектории (см. рис. 5.5). Как видно из рисунка, при увеличении K корень s_1 (а также s_2) характеристического уравнения замкнутой системы перемещается вправо, а корень s_3 — влево. Определим K при $s_{1,2} = -0,5 \pm j1,93$. Непосредственно из рис. 5.5 получим $l_1 = 2,0$; $l_2 = 2,45$; $l_3 = 4,9$. В соответствии с (5.15)

$$K = 2,0 \cdot 2,45 \cdot 4,9 = 24,0.$$

Найдем корень s_3 при $K = 24$. Согласно формуле Виета, имеем $s_1 s_2 s_3 = -K$ и, следовательно,

$$s_3 = -\frac{K}{s_1 s_2} = -\frac{24}{0,5^2 + 1,93^2} \approx -6,0.$$

Пример 5.4. Пусть передаточная функция $W(s)$ имеет вид (5.26). Наметим приближенно конфигурацию траекторий корней, воспользовавшись приведенными выше правилами и соотношениями.

Общее число траекторий в данном случае равно четырем ($n = 4$), причем траектории начинаются в точках $q_1 = 0$; $q_{2,3} = 2,5 \pm j1,5$; $q_4 = -4$; одна траектория заканчивается в точке $N_1 = -5$, а три остальных при $K \rightarrow \infty$ уходят в бесконечность.

Число асимптот равно трем ($n - m = 3$), центр их находится в точке, абсцисса которой

$$\delta_a = \frac{-4 - 2 \cdot 2,5 + 5}{3} = -1,33,$$

а углы между асимптотами составляют 120° .

На вещественной оси траекториям принадлежит участок между полюсами $q_1 = 0$ и $q_2 = -4$ и участок слева от полюса $N_1 = -5$.

Точки пересечения с мнимой осью найдем с помощью уравнения (5.23). В рассматриваемом случае

$$A(s) = s^4 + 9s^3 + 28,5s^2 + 34s; \quad B(s) = s + 5, \quad \text{т. е. } a_4 = 1; \quad a_3 = 9; \quad a_2 = 28,5; \quad a_1 = 34; \quad a_0 = 0; \quad b_1 = 1; \quad b_0 = 5.$$

Следовательно, уравнение (5.23) имеет вид $\omega^4 + 16,5\omega^2 - 170 = 0$, откуда

$$\omega = \omega_{кр} = \pm 2,68.$$

Угол выхода траекторий из комплексно-сопряженных полюсов был определен ранее ($\phi_2 = 63^\circ$).

Теперь можно наметить общую картину расположения траекторий корней на плоскости s . Ясно, что левее точки $N_1 = -5$ непременно должно быть одно пересечение траекторий с вещественной осью. Между полюсами $q_1 = 0$ и $q_2 = -4$ возможна одна кратная точка или три. Для первого случая ориентировочное расположение траекторий корней показано на рис. 5.7, а, а для второго — на рис. 5.7, б.

Чтобы определить кратные точки, воспользуемся уравнением (5.20), приняв во внимание, что

$$A'(s) = (s+4)(s^2+5s+8,5) + s(s^2+5s+8,5) + s(s+4)(2s+5);$$

$$B'(s) = 1.$$

Следовательно, в данном случае уравнение (5.20) имеет следующий вид:

$$s(s+4)(s^2+5s+8,5) - (s+5) \times$$

$$\times (s+4)(s^2+5s+8,5) - s(s+5) \times$$

$$\times (s^2+5s+8,5) - s(s+5)(s+4) \times$$

$$\times (2s+5) = 0.$$

Корни этого уравнения проще всего найти методом проб. Предварительно наметив конфигурацию траекторий, выберем вещественные значения s , близкие к возможным значениям корней записанного уравнения. После двух-трех проб получим $s_1 = -1,3$; $s_2 = -2,2$. Как видно, обе кратные точки находятся между полюсами $q_1 = 0$ и $q_2 = -4$ и, следовательно, расположение траекторий корней отвечает рис. 5.7, б.

Найдем две других кратных точки, воспользовавшись формулами Виета. Коэффициенты уравнения (5.20) для рассматриваемого случая равны $a_4 = 3$; $a_3 = 38$; $a_0 = 170$ и, следовательно, корни связаны соотношениями

$$s_3 + s_4 = -\frac{a_3}{a_4} - (s_1 + s_2) = -9,15;$$

$$s_3 s_4 = \frac{a_0}{a_4 s_1 s_2} = 19,8.$$

Таким образом, для определения корней s_3 и s_4 можно записать квадратное уравнение

$$s^2 + 9,15s + 19,8 = 0,$$

откуда $s_3 = -3,5$; $s_4 = -5,67$.

Заметим, что в большинстве случаев достаточно приближенно определить положение кратных точек, поскольку обычно преобладающие корни замкнутой системы выбирают достаточно удаленными от кратных значений.

Траектории преобладающей пары комплексно-сопряженных корней строим, используя метод смещения мнимой оси. Переместив начало координат в точку $s = -1,0$, запишем

$$A^*(s^*) = (s^* - 1)(s^* + 3)[(s^* - 1)^2 + 5(s^* - 1) + 8,5] = s^{*4} + 5s^{*3} + 1,5s^{*2} +$$

$$+ 9s^{*2} - 13,5; B^*(s^*) = s^* + 4,$$

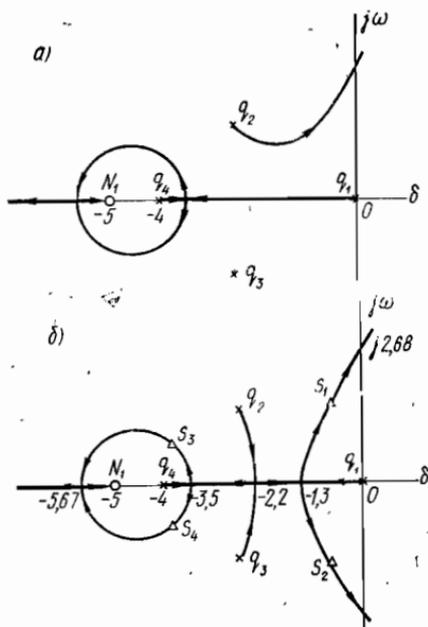


Рис. 5.7. Расположение траекторий корней четвертого порядка в случае одной или трех кратных точек

после чего используем уравнение (5.23), дающее в данном случае значение ω при $\delta = -1,0$. При этом имеем

$$\omega^4 + 18,5\omega^2 - 13,5 = 0,$$

откуда $\omega_{1,2} = \pm 0,805$.

Аналогично находим несколько точек при других значениях δ .

Остальные комплексно-сопряженные траектории также можно построить, используя метод смещения мнимой оси. Однако в большинстве случаев достаточно ограничиться приближенным графо-аналитическим построением, добиваясь путем нескольких проб выполнения соотношения (5.14). Построенные траектории корней показаны на рис. 5.7, 6.

Выберем на траектории преобладающей пары корни $s_{1,2} = -0,63 \pm j1,6$ (отмечены треугольными значками) и определим соответствующее значение параметра K . Из рис. 5.8 определяем:

$$l_1 = 1,72; \quad l_2 = 1,86; \quad l_3 = 3,64;$$

$$l_4 = 3,72 \text{ и } l_1^N = 4,64;$$

следовательно, согласно (5.15)

$$K = \frac{1,72 \cdot 1,86 \cdot 3,64 \cdot 3,72}{4,64} = 9,3.$$

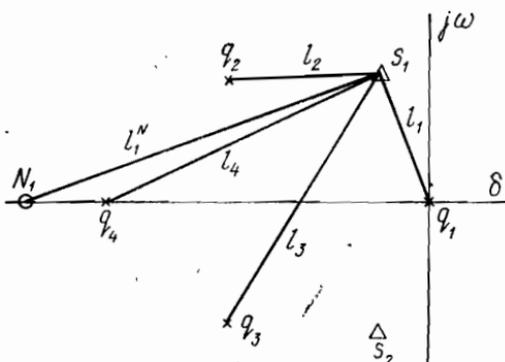


Рис. 5.8. Определение параметра K

Два других корня $s_{3,4}$ при найденном значении K можно в данном случае вычислить, используя формулы Виета. Коэффициент при s^3 в характеристическом уравнении системы $a_3 = 9$, свободный член $a_0 = 5 \cdot 9,3 = 46,5$, поэтому

$$s_3 + s_4 = -9 - (s_1 + s_2) = -9 + 1,26 = -7,74;$$

$$s_3 s_4 = \frac{46,5}{s_1 s_2} = \frac{46,5}{2,96} = 15,7.$$

Следовательно,

$$s^2 + 7,74s + 15,7 = 0,$$

откуда

$$s_{3,4} = -3,87 \pm j0,835.$$

Корни $s_{3,4}$ обозначены на рис. 5.7 также треугольными значками.

§ 5.3. Анализ автоматических систем методом траекторий корней

Как уже указывалось, часто в характеристическом уравнении замкнутой системы имеется преобладающая пара комплексно-сопряженных корней, определяющих в основном ее динамику. Соответствующая этой паре корней $s_{1,2} = -\delta_1 \pm j\omega_1$ (рис. 5.9) передаточная функция

$$\Phi(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}, \quad (5.30)$$

где $\zeta = \sin \psi$ — коэффициент демпфирования; ω_0 — собственная частота колебаний.

Если система имеет только эту пару корней и не имеет нулей, то при единичном ступенчатом воздействии переходный процесс (переходная функция) выражается формулой

$$x(t) = 1 - \frac{1}{\cos \psi} e^{-\delta_1 t} \cos(\omega_1 t - \psi), \quad (5.31)$$

где $\delta_1 = \omega_0 \zeta$; $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$.

При этом перерегулирование (в относительных единицах)

$$\sigma = e^{-\delta_1 t_{\max}}, \quad (5.32)$$

где t_{\max} — время достижения первого максимума:

$$t_{\max} = \pi / \omega_1. \quad (5.33)$$

Продолжительность переходного процесса (время управления)

$$t_y \approx 3 / \delta_1. \quad (5.34)$$

Резонансную частоту и показатель колебательности можно представить соответственно как

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}; \quad M_{\max} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}. \quad (5.35)$$

При этом полоса пропускания $\omega_{пз}$ (на уровне -3 дб)

$$\omega_{пз} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}. \quad (5.36)$$

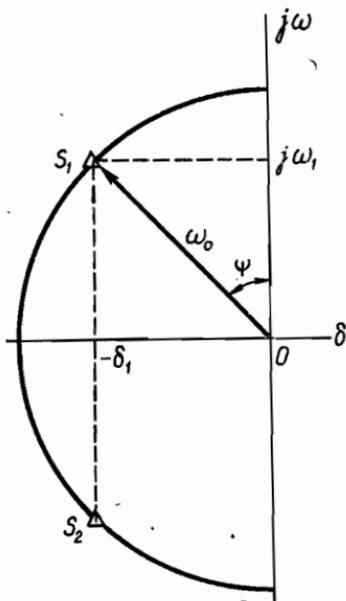


Рис. 5.9. Преобладающая пара корней характеристического уравнения системы

Значения σ , t_y и M_{\max} для системы второго порядка при различных значениях ζ можно определить по кривым, показанным соответственно на рис. 5.10, 5.11 и 5.12. Наименьшая продолжительность переходного процесса будет при $\zeta = 0,7$, при этом перерегулирование $\sigma = 0,05$, а максимум частотной характеристики замкнутой системы $M_{\max} = 1$ при $\omega = 0$. В связи с этим значение коэффициента демпфирования $\zeta = 0,7$ называют иногда оптимальным и стремятся обеспечить его близким к указанной величине.

В том случае, когда помимо преобладающей пары комплексно-сопряженных полюсов передаточная функция замкнутой системы будет иметь другие полюса, а также нули, в кривой переходного процесса появятся другие составляющие. Однако при достаточном удалении остальных полюсов и нулей от мнимой оси (или взаимной компенсации близко расположенных друг к другу полюсов и нулей) можно в первом приближении для оценки качества системы также использовать

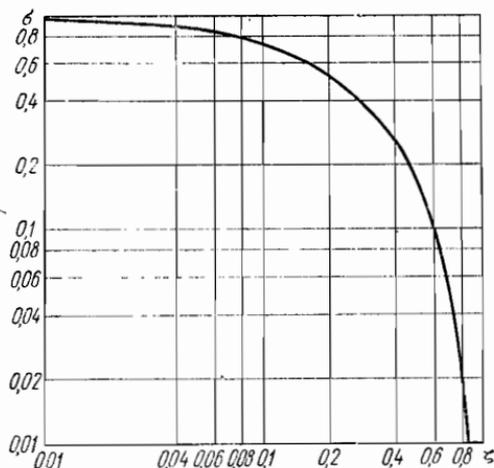


Рис. 5.10. Зависимость относительного перерегулирования σ в системе второго порядка от коэффициента демпфирования ζ

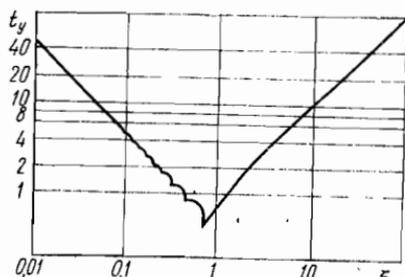


Рис. 5.11. Зависимость продолжительности переходного процесса t_y в системе второго порядка от ζ

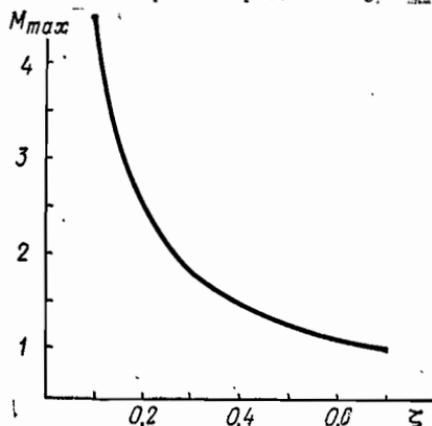


Рис. 5.12. Зависимость показателя колебательности M_{\max} для системы второго от ζ порядка

приведенные выше соотношения. Выражения (5.32) ÷ (5.34) в этом случае уточняются следующим образом [3]:

$$\sigma \approx 2R_1 \frac{\omega_1}{\omega_0} e^{-\delta_1 t_{\max}}; \quad (5.37)$$

$$t_{\max} = \frac{1}{\omega_1} \left(\pi + \sum_{i=3}^n \gamma_i - \sum_{i=1}^m \gamma_i^N \right); \quad (5.38)$$

$$t_y \approx \frac{3 + \ln 2R_1}{\sigma_1}. \quad (5.39)$$

В формулах (5.37)–(5.39) $2R_1$ — амплитуда составляющей переходного процесса, обусловленного преобладающей парой корней; γ_i — углы остальных полюсов замкнутой системы относительно преобладающей комплексно-сопряженной пары; γ_i^N — углы нулей относительно преобладающей комплексно-сопряженной пары.

Следует иметь в виду, что наличие близких к мнимой оси не преобладающих полюсов уменьшает перерегулирование, а наличие близких к мнимой оси нулей, наоборот, его увеличивает.

Зная траектории корней, легко найти кривую переходного процесса для исследуемой системы. Рассмотрим решение во временной области, предположив, что передаточная функция замкнутой системы выражается формулой (5.4), которую перепишем в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \\ &= K \frac{(s-N_1)(s-N_2)\dots(s-N_m)}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n)} = \\ &= K \frac{B(s)}{P(s)}, \end{aligned} \quad (5.40)$$

где N_j — нули передаточной функции разомкнутой системы; s_k — корни характеристического уравнения замкнутой системы.

При выбранном значении K величины s_k определяются по траекториям корней, нули N_j известны, поэтому переходный процесс, вызванный скачкообразным изменением управляющего воздействия, согласно теореме разложения вычисляется по формуле

$$x(t) = \Phi(0) + \sum_{k=1}^n \frac{B(s_k) e^{s_k t}}{s_k P'(s_k)}. \quad (5.41)$$

Множитель

$$\frac{B(s_k)}{s_k P'(s_k)} = R_k e^{i\psi_k}, \quad (5.42)$$

стоящий перед каждой из экспоненциальных функций, легко определить графически по траекториям корней. При этом

$$R_k = K \prod_{j=1}^m L_j^N / \prod_{i=1}^n L_i, \quad (5.43)$$

где L_j^N — длина вектора от j -го нуля до k -го полюса; L_i — длина вектора от i -го полюса до k -го полюса ($L_k = \text{mod } s_k$);

$$\psi_k = \sum_{j=1}^m \gamma_j^N - \sum_{i=1}^n \gamma_i, \quad (5.44)$$

где γ_j^N — угол вектора от i -го нуля до k -го полюса; γ_i — угол вектора от i -го полюса до k -го полюса ($\gamma_k = \vartheta_k = \arg s_k$).

В случае отсутствия нулей числитель (5.43) равен единице. Если система имеет неединичную обратную связь (в частности, это относится к расчету переходного процесса, вызванного скачкообразным изменением возмущающего воздействия), то передаточная функция замкнутой системы (5.40) имеет нули, не равные нулям передаточной функции разомкнутой системы, и в общем случае другое значение параметра K . После учета этого обстоятельства дальнейший расчет выполняется аналогично описанному выше.

Амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы в соответствии с (6.40) может быть построена с помощью выражения

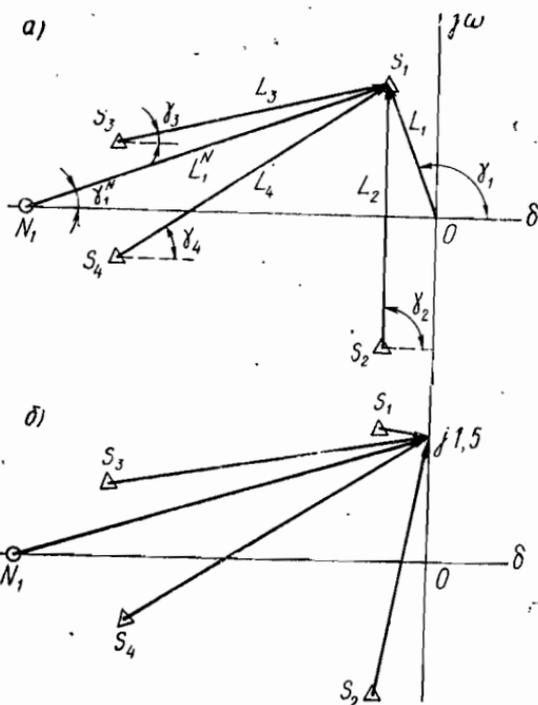
$$M(\omega) = K \frac{\prod_{j=1}^m \text{mod}(j\omega - N_j)}{\prod_{i=1}^n \text{mod}(j\omega - s_i)}, \quad (5.45)$$

где множители $\text{mod}(j\omega - N_j)$ и $\text{mod}(j\omega - s_i)$ легко определяются графически как длины векторов, проведенных из выбранной на мнимой оси точки до соответствующих нулей и полюсов.

Пример 5.5. Предположим, что передаточная функция разомкнутой системы выражается формулой (5.26). Замкнем систему единичной обратной связью и вычислим переходный процесс, вызванный скачкообразным изменением управляющего воздействия при $K = 9,3$.

В примере 5.4 были определены значения корней характеристического уравнения при выбранном значении K : $s_{1,2} = -0,63 \pm j1,6$; $s_{3,4} = -3,87 \pm j0,835$. Соответствующая плоскость корней показана на рис. 5.13.

Для построения переходного процесса используем формулу (5.41), где $\Phi(0) = 1$. Множители перед экспоненциальными функциями определим по (5.43). Для корня s_1 согласно рис. 5.13, а имеем



$$R_1 = \frac{KL_1^N}{L_1 L_2 L_3 L_4} = \frac{9,3 \cdot 4,65}{1,72 \cdot 3,20 \cdot 3,30 \cdot 4,0} = 0,595;$$

при этом величина соответствующего угла согласно (5.44)

$$\Psi_1 = \gamma_1^N - (\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) = 20^\circ - (112^\circ + 90^\circ + 37^\circ + 14^\circ) = -233^\circ.$$

Очевидно, что для комплексно-сопряженного корня s_2 получим $R_2 = R_1$; $\Psi_2 = -\Psi_1 = 233^\circ$. Следовательно, составляющая в (5.41), обусловленная корнями $s_{1,2}$, имеет вид

$$x_{1,2}(t) = 2R_1 e^{-\delta_1 t} \times \frac{e^{j(\omega_1 t + \Psi_1)} + e^{-j(\omega_1 t + \Psi_1)}}{2},$$

или

$$x_{1,2}(t) = 1,19 e^{-0,63t} \times \cos\left(\frac{180^\circ}{\pi} 1,6t - 233^\circ\right).$$

Рис. 5.13. К построению переходного процесса и частотной характеристики в системе четвертого порядка

Аналогично находим составляющую, соответствующую корням $s_{3,4}$:

$$x_{3,4}(t) = 0,316 e^{-3,87t} \cos\left(\frac{180}{\pi} 0,835t - 201^\circ\right).$$

Построенная с учетом полученных выражений кривая переходного процесса (сплошная) показана на рис. 5.14. Как видно, составляющая $x_{3,4}(t)$ быстро затухает, вследствие чего качество переходного процесса определяется в основном составляющей $x_{1,2}(t)$, т. е., иными словами, преобладающей парой корней $s_{1,2}$.

Определим перерегулирование и продолжительность переходного процесса по приближенным формулам. Время достижения первого максимума по формуле (5.38)

$$t_{\max} = \frac{1}{1,6} \left[\pi + \frac{\pi}{180^\circ} (14^\circ + 37^\circ - 20^\circ) \right] = 2,3 \text{ сек};$$

перерегулирование по формуле (5.37)

$$\sigma = 1,19 \frac{1,6}{\sqrt{0,63^2 + 1,6^2}} e^{-0,63 \cdot 2,3} = 0,26.$$

Согласно (5.39) продолжительность переходного процесса

$$t_y = \frac{3 + \ln 1,19}{0,63} \approx 5 \text{ сек.}$$

Вычисленные значения t_{\max} , σ и t_y практически совпадают с соответствующими значениями, определенными из рис. 5.14. По формулам (5.32) и (5.34) находим

$$\sigma = e^{-0,63 \frac{\pi}{1,6}} = 0,29; t_y = \frac{3}{0,63} = 4,76 \text{ сек.},$$

что подтверждает возможность приближенной оценки качества по данным для системы второго порядка при достаточной удаленности остальных (не преобладающих) нулей и полюсов.

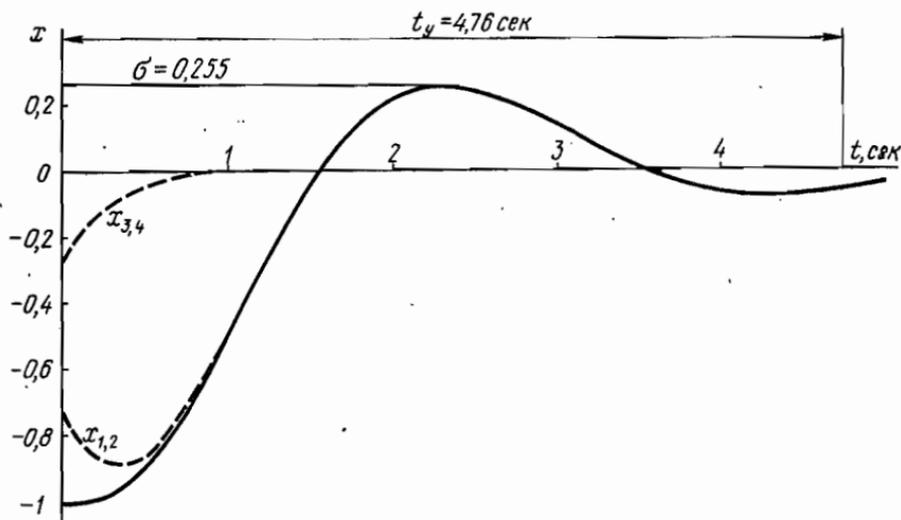


Рис. 5.14. Построение кривой переходного процесса в системе четвертого порядка

Найдем частотную характеристику замкнутой системы, используя выражение (5.45) и определяя множители числителя и знаменателя графически. Соответствующее построение для $\omega_1 = 1,5$ показано на рис. 5.13, б. Непосредственно из рисунка получим:

$$\begin{aligned} \text{mod}(j\omega_1 - N_1) &= 5,20; \\ \text{mod}(j\omega_1 - s_1) &= 0,64; \\ \text{mod}(j\omega_1 - s_2) &= 3,16; \\ \text{mod}(j\omega_1 - s_3) &= 3,90; \\ \text{mod}(j\omega_1 - s_4) &= 4,6. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$M(\omega_1) = \frac{9,3 \cdot 5,20}{0,64 \cdot 3,16 \cdot 3,90 \cdot 4,6} = 1,33.$$

По кривой $M(\omega)$ (рис. 5.15) определяем $M_{\max} = 1,5$ и $\omega_r = 1,4$; $\omega_{пз} = 2,3$.

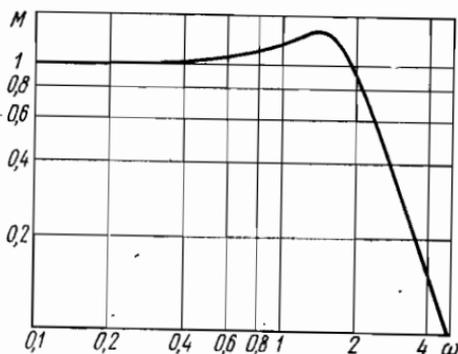


Рис. 5.15. Частотная характеристика системы четвертого порядка

С учетом того, что коэффициент демпфирования, соответствующий преобладающей паре полюсов

$$\zeta = \frac{\delta_1}{\omega_0} = \frac{0,63}{\sqrt{0,63^2 + 1,6^2}} = 0,365$$

по формулам (5.35) и (5.36) для системы второго порядка найдем:

$$\omega_r = 1,73 \sqrt{1 - 2 \cdot 0,365^2} = 1,49;$$

$$M_{\max} = \frac{1}{2 \cdot 0,365 \sqrt{1 - 0,365^2}} = 1,48;$$

$$\omega_{пз} = 1,73 \sqrt{1 - 2 \cdot 0,365^2 + \sqrt{2 - 4 \cdot 0,365^2 + 4 \cdot 0,365^4}} = 2,4.$$

Таким образом, значения ω_r , M_{\max} и $\omega_{пз}$ близки к определенным ранее.

§ 5.4. Расчет корректирующих цепей по заданным показателям качества

Расчет корректирующих цепей при помощи метода траекторий корней проводится в следующие три этапа:

1) на основании заданных показателей качества, используя записанные выше формулы для системы второго порядка, а также рис. 5.10, 5.11 и 5.12, приближенно намечают «желаемое» положение

преобладающей пары корней скорректированной системы;

2) вводя дополнительные нули или полюса, добиваются прохождения траектории корней скорректированной системы вблизи желаемой точки с таким расчетом, чтобы в окрестности этой точки коэффициент передачи системы удовлетворял требованиям, предъявляемым к ее точности.

Дополнительно введенные нули и полюса позволяют непосредственно определить передаточную функцию W_K (рис. 5.16, а) последовательно

введенной корректирующей цепи. При определении передаточной функции $W_{o.c}(s)$ (рис. 5.16, б) корректирующей цепи типа местной обратной связи можно воспользоваться приближенным выражением, записанным на основании соотношения (4.12):

$$W_{cк}(s) \approx W_{неохв}(s) / W_{o.c}(s); \quad (5.46)$$

3) после выбора структуры корректирующей цепи и уточнения ее параметров проводится поверочный расчет заданных показателей качества. При использовании местной обратной связи поверочный расчет выполняется с учетом не приближенного [см. (5.46)], а точ-

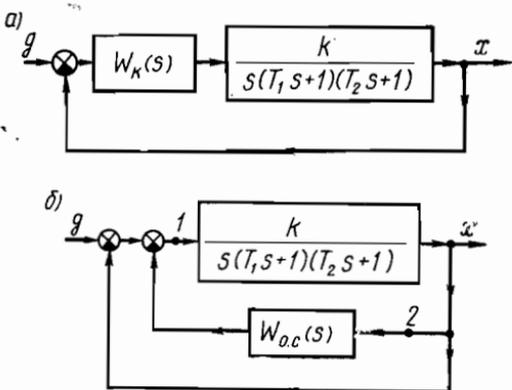


Рис. 5.16. Структурные схемы системы

ного выражения для передаточной функции разомкнутой скорректированной системы, а именно:

$$W_{\text{ск}}(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)W_{\text{o.c}}(s)}$$

Необходимо также проверить, устойчив ли внутренний контур, образованный после введения корректирующей цепи.

При выборе структуры корректирующей цепи следует стремиться к ее наибольшей простоте, облегчающей схемную реализацию.

Если расчет даст результаты, существенно отличающиеся от исходных требований, то необходимо внести соответствующие поправки в структуру и параметры корректирующей цепи и провести новую проверку показателей качества.

В некоторых случаях может оказаться целесообразным исследовать показатели качества системы при различных значениях какого-либо параметра τ корректирующей цепи (например, коэффициента передачи или постоянной времени обратной связи). Тогда величину τ принимают в качестве параметра траекторий и строят траектории корней в предположении, что величина τ меняется в назначенных пределах. Остальные параметры системы, естественно, считают постоянными.

Пример 5.6. Рассчитаем последовательное корректирующее устройство W_K для маломощной следящей системы (см. рис. 5.16, а), параметры которой заданы: $k = 36 \text{ сек}^{-1}$; $T_1 = 0,2 \text{ сек}$; $T_2 = 0,04 \text{ сек}$. Требуемые показатели качества: перегулирование $\sigma\% \leq 25\%$, продолжительность переходного процесса $t_y \leq 0,7 \text{ сек}$, число колебаний выходной величины за время переходного процесса не более двух.

Полюса передаточной функции разомкнутой системы равны: $q_1 = 0$; $q_2 = -5$; $q_3 = -25$.

Перегулированию $\sigma = 0,25$, согласно рис. 5.10, в системе второго порядка соответствует $\zeta = 0,4$. Положив $t_y \approx 0,7 \text{ сек}$, с помощью (5.34) найдем

$$\delta_1 = 3/0,7 \approx 4,3.$$

Выбрав положение преобладающей пары в соответствии с найденными величинами ζ и δ_1 , отметим положение корня s_1 на плоскости s (рис. 5.17).

Непосредственно из рис. 5.17 найдем $\vartheta_1 = 114^\circ$; $\vartheta_2 = 85^\circ$; $\vartheta_3 = 25^\circ$, т. е.

$$-(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3) = -(114^\circ + 85^\circ + 25^\circ) = -224^\circ.$$

Следовательно, точка s_1 не может принадлежать траектории корней нескорректированной системы. Введем дополнительно полюс q_4 и нуль N_1 с таким расчетом, чтобы в точке s_1 удовлетворялось уравнение фаз (5.14). Положим $N_1 = q_2 = -5$, т. е. полностью компенсируем полюс q_2 нулем N_1 . Тогда из уравнения фаз получим

$$\vartheta_4 = -\pi + (\vartheta_1 + \vartheta_3) = -180^\circ + (114^\circ + 25^\circ) = -41^\circ.$$

Проведя прямую через точку s_1 под углом ϑ_4 , найдем на вещественной оси точку $q_4 = -14,4$.

Определим величину коэффициента передачи k с учетом дополнительно введенных нуля и полюса. Согласно рис. 5.17,

$$K = l_1 l_3 l_4 = 10,5 \cdot 22,6 \cdot 13,2 = 3,14 \cdot 10^3$$

и, следовательно,

$$k = \frac{K}{q_3 q_4} = \frac{3,14 \cdot 10^3}{25 \cdot 14,4} = 8,72.$$

Нескорректированная система имела коэффициент передачи $k = 36$, теперь точность системы значительно снизилась. Чтобы восстановить прежние значения величин k , введем около начала координат так называемый диполь, т. е. близко расположенные друг к другу нуль N_2 и полюс q_5 , из-за близости которых множители l_3^N и l_5 , входящие в (5.15), будут практически одинаковы, и значение K

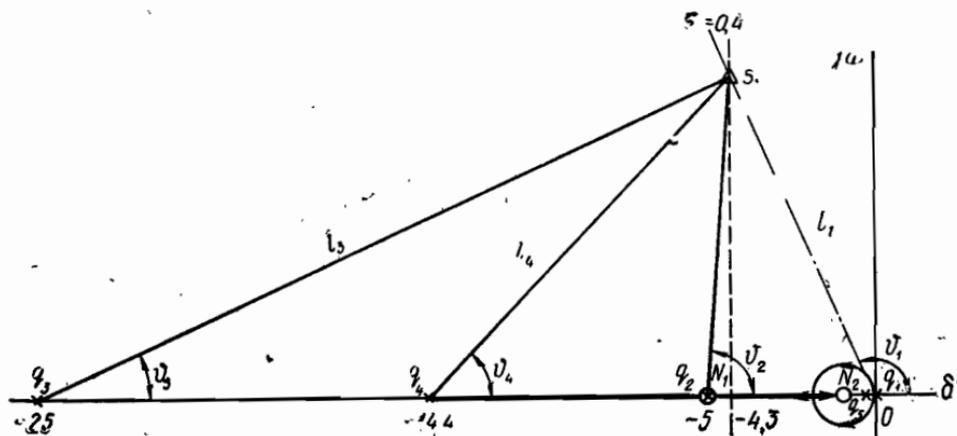


Рис. 5.17. Определение параметров последовательного корректирующего устройства

можно считать не изменившимся. Однако для определения коэффициента передачи k имеем уже другую формулу:

$$k = K \frac{N_2}{q_3 q_4 q_5}$$

откуда

$$\frac{q_5}{N_2} = \frac{K}{k q_3 q_4}$$

Подставив сюда значения k , K , q_3 , q_4 и положив $N_2 = -1$, найдем $q_5 = -0,25$.

Итак, получены значения дополнительных нулей и полюсов, обеспечивающих прохождение траектории корней скорректированной системы в окрестности «желаемой» точки s_1 . Очевидно, что коррекция системы обеспечивается введением пассивной интегро-дифференцирующей цепи, имеющей передаточную функцию

$$W_k(s) = \frac{q_4 q_5}{N_1 N_2} \cdot \frac{(s - N_1)(s - N_2)}{(s - q_4)(s - q_2)} = \frac{(0,2s \mp 1)(s \mp 1)}{(0,07s \mp 1)(4s \mp 1)} \quad (5.47)$$

и реализуемой на RC-элементах (см. рис. 7.2).

Если параметры корректирующей цепи выбраны из условия реализации выражения (5.47), то тогда передаточная функция скорректированной системы

$$W_{\text{ск}}(s) = \frac{3,14 \cdot 10^3 (s \mp 1)}{s(s \mp 0,25)(s \mp 14,4)(s \mp 25)}$$

Вясним положение остальных корней замкнутой системы. Введение нуля $N_2 = -1$ и полюса $q_5 = -0,25$ даст корень s_3 , перемещающийся с увеличением K к нулю N_2 , поэтому с некоторым приближением можно считать, что этот корень и нуль N_2 компенсируют друг друга. Для определения корня s_4 пренебрежем величиной корня s_3 и в соответствии с формулой Виета запишем приближение

$$s_4 \approx -a_3 + 2\delta_1 = -39,6 + 8,6 = -31,$$

где a_3 — коэффициент при s^3 в характеристическом уравнении замкнутой системы.

Поскольку $|s_4| \gg \delta_1$, то составляющая переходного процесса, вызванная этим корнем, очень быстро затухает, и, следовательно, скорректированная система практически имеет те же динамические показатели, что и система второго порядка с передаточной функцией

$$\Phi_{\text{СК}}(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 \mp 2\zeta\omega_0 s \mp \omega_0^2} = \frac{1}{0,0087s^2 \mp 0,0745s \mp 1}$$

Пример 5.7. Осуществим коррекцию следящей системы, рассмотренной в примере 5.6, с помощью тахометрической обратной связи (см. рис. 5.16, б), передаточная функция которой $W_{\text{о.с}} = \tau s$. Задача заключается в выборе параметра τ , обеспечивающего необходимые показатели качества.

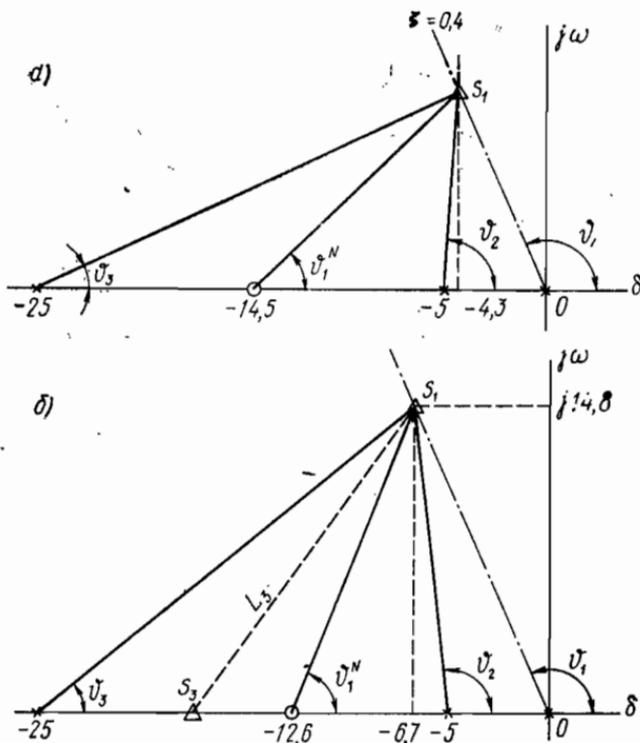


Рис. 5.18. Определение параметров корректирующей обратной связи при двух положениях преобладающей пары корней

Разомкнув систему справа от обоих суммирующих элементов (точка 1 на рис. 5.16, б), запишем передаточную функцию разомкнутой системы после коррекции:

$$W_{\text{СК}}(s) = \frac{k(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = K \frac{s - N_1}{s(s + 5)(s + 25)},$$

где $K = k/T_1 T_2$.

Следовательно, обратная связь в данном случае обеспечивает введение дополнительного нуля в выражение $W_{\text{СК}}(s)$.

Выбрав, как и ранее, положение преобладающей пары корней (рис. 5.18, а), определим угол, соответствующий нулю N_1 :

$$\theta_1^N = -\pi + (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = -180^\circ + 224^\circ = 44^\circ,$$

после чего графически найдем положение нуля $N_1 = -14,5$. При этом коэффициент передачи системы

$$k = \frac{|N_1|}{q_2 q_3} \cdot \frac{l_1 l_2 l_3}{l_1^N} = \frac{14,5}{5 \cdot 25} \cdot \frac{10,5 \cdot 9,6 \cdot 22,7}{14} = 19,0,$$

что меньше коэффициента передачи нескорректированной системы. Следовательно, положение преобладающей пары корней, соответствующее приведенному на рис. 5.18, а, при $k = 36$ с помощью используемой обратной связи не обеспечивается.

Сохраним выбранное значение $\zeta = 0,4$ и будем перемещать корень s_1 (а также s_2) влево, что, очевидно, даст увеличение быстродействия системы. После двух проб найдем новое положение преобладающей пары корней, показанное на рис. 5.18, б ($s_{1,2} = -6,7 \pm j14,8$). В этом случае

$$\vartheta_1^N = -\pi + (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3) = -180^\circ + (114^\circ + 96^\circ + 38^\circ) = 68^\circ.$$

Определенная графически величина $N_1 = -12,6$. В то же время значение

$$k = \frac{12,6}{5 \cdot 25} \cdot \frac{16,2 \cdot 15,0 \cdot 23,6}{16,0} = 36,0$$

равно требуемому значению. В данном случае $\tau = 1/12,6 = 0,0793$ сек. Выясним показатели качества системы при новом положении преобладающей пары корней. Для этого найдем вначале третий корень характеристического уравнения замкнутой системы, воспользовавшись формулой Виета. Коэффициент при s^2 в характеристическом уравнении $a_2 = 30$, поэтому

$$s_3 = -30 - (s_1 + s_2) = -30 + 13,4 = -16,6.$$

Передаточная функция замкнутой системы после коррекции, согласно рис. 5.16, б,

$$W_{\text{ск}}(s) = \frac{\frac{k}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}}{1 + \frac{k\tau s}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}} = \frac{K_{\text{ск}}}{(s + s_1)(s + s_2)(s + s_3)},$$

$$\frac{k}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k\tau s}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}}$$

т. е. не содержит нулей, и, следовательно, качество системы определяется только корнями характеристического уравнения.

Определяя из рис. 5.18, б значение $\gamma_3 = 57^\circ$ и учитывая, что $\omega_1 = 14,8$, по (5.38) вычислим

$$t_{\text{max}} = \frac{1}{14,8} \left(\pi + 57 \frac{\pi}{180} \right) = 0,279.$$

Подставив в (5.43) значения $K = K_{\text{ск}} = k \frac{1}{T_1 T_2}$; $L_1 = l_1 = 16,2$; $L_2 = 2\omega_1 = 29,6$ и $L_3 = 17,8$, получим

$$R_1 = \frac{K_{\text{ск}}}{L_1 L_2 L_3} = \frac{36 \cdot 5 \cdot 25}{16,2 \cdot 29,6 \cdot 17,8} = 0,525.$$

При этом

$$\omega_0 = \sqrt{6,7^2 + 14,8^2} = 16,3.$$

По формулам (5.37) и (5.39) найдем:

$$\sigma \approx 2 \cdot 0,525 \cdot \frac{4,8}{16,3} e^{-6,8 \cdot 0,279} \approx 0,14;$$

$$t_y \approx \frac{3 + \ln 2 \cdot 0,525}{6,7} = 0,455 \text{ сек.}$$

Период собственных колебаний системы во время переходного процесса $2\pi/\omega_1 = 0,423$; следовательно, за время t_y будет не более одного колебания.

Таким образом, система удовлетворяет предъявляемым к ней требованиям. Можно более подробно изучить влияние параметра τ на расположение корней характеристического уравнения замкнутой системы. Для этого следует разомкнуть систему в точке 2 на рис. 5.16, б и, записав передаточную функцию

$$W(s) = \tau s \frac{\overbrace{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}^k}{1 + \frac{k}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}} = \tau \frac{ks}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k}, \quad (5.48)$$

построить траектории корней, считая параметром траектории величину τ .

§ 5.5. Расчет систем с компенсацией ошибок методом траекторий корней

При построении систем с компенсацией ошибок удобно проводить расчет, используя методы траекторий корней. При этом целесообразно придерживаться следующей последовательности:

- 1) ориентировочно наметить положение преобладающей пары корней замкнутой системы в соответствии с заданными показателями качества и провести расчет корректирующих цепей;
- 2) выбрать способ введения и структуру компенсирующей цепи и определить ее параметры с учетом требований, предъявляемых к установившимся ошибкам;
- 3) провести поверочный расчет, определяющий показатели качества системы после введения корректирующих и компенсирующих цепей.

Если показатели качества отличаются от заданных в сторону ухудшения, то тогда следует необходимым образом изменить параметры (а иногда и структуру) корректирующих и компенсирующих цепей и снова выполнить поверочный расчет.

Пример 5.8. Рассмотренную в примере 5.7 систему дополним компенсирующей цепью (рис. 5.19) с таким расчетом, чтобы коэффициенты ошибок по отношению к управляемому воздействию были равны $C_0 = C_1 = 0$ и $\frac{C}{2l} \leq 0,014$.

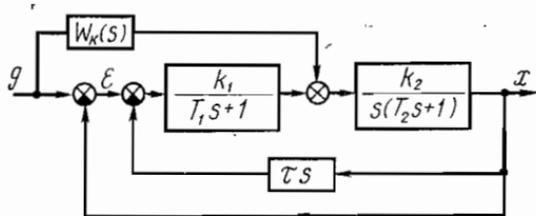


Рис. 5.19. Структурная схема системы с компенсацией ошибки

Выберем положение преобладающей пары корней таким же, как и в примере 5.7. Величина коэффициента передачи гибкой обратной связи, как определено в примере 5.7 (без учета компенсирующей цепи), $\tau = 0,0793$ сек.

Предположим, что передаточная функция компенсирующей цепи

$$W_R(s) = \tau_1 s \frac{\tau_2 s + 1}{\tau_3 s + 1} \quad (5.49)$$

После введения компенсирующей цепи передаточная функция ошибки

$$\Phi_{eg}(s) = \frac{1 - W(s) W_R(s)}{1 + W(s)}, \quad (5.50)$$

где

$$W(s) = \frac{k}{s[(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k\tau]} \quad (5.51)$$

После подстановки выражений (5.49) и (5.51) в (5.50) запишем

$$\Phi_{eg}(s) = \frac{1 - \frac{k\tau_1 s(\tau_2 s + 1)}{s[(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k\tau](\tau_3 s + 1)}}{1 + \frac{k}{s[(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k\tau]}}$$

или

$$\Phi_{eg}(s) = \frac{s[(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k\tau](\tau_3 s + 1) - k\tau_1 s(\tau_2 s + 1)}{s[(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k\tau] + k} \quad (5.52)$$

Из формулы (5.52) следует, что $C_0 = 0$. Для выполнения условия $C_1 = 0$ необходимо, чтобы

$$1 + k\tau - k\tau_1 = 0,$$

откуда

$$\tau_1 = \frac{1 + k\tau}{k} = \frac{1 + 36 \cdot 0,0793}{36} = 0,107 \text{ сек.}$$

На основании (5.52) коэффициент ошибки

$$\frac{C_2}{2l} = \frac{T_1 + T_2 + (1 + k\tau)\tau_3 - k\tau_1\tau_2}{k} \quad (5.53)$$

Положив $\frac{C_2}{2l} = 0,014$, получим одно уравнение для двух неизвестных τ_2 и τ_3 . Таким образом, значениями τ_2 и τ_3 можно варьировать. При их выборе следует прежде всего иметь в виду обеспечение требуемых показателей качества системы в переходном процессе.

После введения компенсирующей цепи передаточная функция замкнутой системы по управляющему воздействию

$$\Phi_g(s) = [1 + W_R(s)] \frac{W(s)}{1 + W(s)},$$

или

$$\Phi_g(s) = \frac{K_R(s - N_1)(s - N_2)}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)}, \quad (5.54)$$

где $s_4 = -1/\tau_3$, а нули числителя являются корнями уравнения

$$1 + W_R(s) = 0$$

или

$$\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_3) s + 1 = 0. \quad (5.55)$$

Чтобы нули передаточной функции (5.54) не ухудшали показателей качества, целесообразно их расположить в удалении от мнимой оси. Выберем N_1 так, чтобы этим нулем компенсировался полюс s_3 , т. е. $N_1 = s_3 = -16,6$. Положив $N_2 = -10$, с учетом уравнения (5.55) запишем

$$\frac{\tau_1 + \tau_3}{\tau_1 \tau_2} = -(N_1 + N_2) = 26,6. \quad (5.56)$$

Выберем $\tau_3 = 0,1$ сек так, чтобы нуль N_2 и полюс s_4 были взаимно скомпенсированы. Далее из (5.56) найдем

$$\tau_2 = \frac{\tau_1 + \tau_3}{(-N_1 - N_2) \tau_1} = \frac{0,107 + 0,10}{26,6 \cdot 0,107} = 0,0726 \text{ сек.}$$

По формуле (5.53)

$$\frac{C_2}{2l} = \frac{0,2 + 0,0726 + (1 + 36 \cdot 0,0793) 0,1 - 36 \cdot 0,107 \cdot 0,04}{36} = 0,013,$$

что удовлетворяет заданным условиям.

Требования, предъявляемые к динамике системы, также удовлетворяются, поскольку после введения компенсирующей цепи передаточная функция $\Phi_g(s)$ мало отличается от передаточной функции системы второго порядка, имеющей корни $s_{1,2}$.

Литература к главе V

1. Дж. Траксел. Синтез систем автоматического регулирования. Машгиз, 1959.
2. В. Дель Торо, С. Р. Паркер. Принципы проектирования систем автоматического управления. Машгиз, 1963.
3. Э. Г. Удерман. Метод корневого годографа в теории автоматического управления. Госэнергоиздат, 1963.
4. Г. А. Бендриков, К. Ф. Теодорчик. Траектории корней линейных автоматических систем. «Наука», 1964.

Глава VI

РАСЧЕТ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

§ 6.1. Математический аппарат теории линейных импульсных систем

Наиболее простым и распространенным методом расчета импульсных систем является метод z -преобразования. Рассмотрим кратко основные положения этого метода.

Анализ импульсных систем существенно упрощается, если величины, описывающие поведение системы, рассматриваются в дискретные равноотстоящие друг от друга моменты времени. Поэтому непрерывная функция времени $x(t)$ (рис. 6.1) может быть заменена так называемой решетчатой функцией $x(nT_0)$, значения которой определены только в дискретные моменты времени $t = nT_0$, где T_0 — интер-

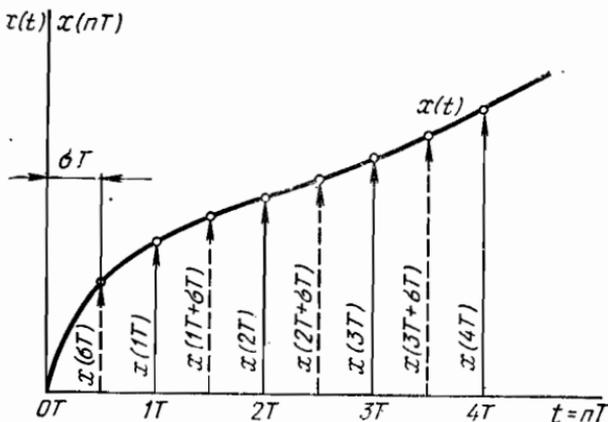


Рис. 6.1. Решетчатая $x(nT_0)$ и смещенная решетчатая $x(nT_0 + \sigma T_0)$ функции

вал дискретности (или период дискретности), а n — натуральное число ($n = 0, 1, 2, \dots$). В дальнейшем для краткости решетчатую функцию $x(nT_0)$ будем обозначать через $x(n)$.

Смещенной решетчатой функцией называется функция $x(n, \sigma) = x(nT_0 + \sigma T_0)$, полученная в результате выборки значений непрерывной функции $x(t)$ в дискретные моменты времени $t = nT_0 + \sigma T_0$ (см. рис. 6.1), где σ — постоянное число в интервале $0 \leq \sigma \leq 1$. Параметр σ отсчитывается от начала очередного n -го интервала.

Z -преобразованием смещенной решетчатой функции $x(n, \sigma)$ называется функция комплексного переменного $X(z, \sigma)$, определяемая равенством

$$X(z, \sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n, \sigma) z^{-n}. \quad (6.1)$$

При этом предполагается, что бесконечный ряд в правой части соотношения (6.1) сходится. Функция $x(n, \sigma)$ называется *оригиналом*, а функция $X(z, \sigma)$ — *изображением*, или *прямым z-преобразованием* функции $x(n, \sigma)$. Выражение (6.1) сокращенно записывается в виде

$$X(z, \sigma) = Z \{x(n, \sigma)\}. \quad (6.2)$$

Функция $X(z, \sigma)$, определяемая соотношением (6.1), называется *z-преобразованием непрерывной функции времени $x(t)$* и обозначается как

$$X(z, \sigma) = Z_{\sigma} \{x(t)\}; \quad (6.3)$$

z-преобразование функции $x(t)$ можно также представить следующим образом:

$$X(z, \sigma) = Z_{\sigma} \{X(s)\}, \quad (6.4)$$

где $X(s)$ — преобразование Лапласа от $x(t)$. В этом случае подразумевается, что преобразованию подвергается временная функция и запись (6.4) имеет чисто формальный характер.

Функция $X(z, \sigma)$ при $\sigma \neq 0$ называется также модифицированным z-преобразованием функции $x(t)$, а функция $X(z)$, получаемая из (6.4) при $\sigma = 0$, — просто z-преобразованием.

Для нахождения изображения $X(z, \sigma)$ по заданному оригиналу $x(n, \sigma)$ или $x(t)$, и наоборот, целесообразно использовать табл. 6.1. Отметим, что все функции времени, имеющие одинаковое значение в дискретные моменты времени $t = nT_0 + \sigma T_0$ (одинаковые решетчатые функции), обладают одинаковыми z-преобразованиями $X(z, \sigma)$ и поэтому связь между функцией времени $x(t)$ и ее z-изображением $X(z, \sigma)$ не является взаимно однозначной. Функция $X(z, \sigma)$ определяет только поведение решетчатой функции $x(n, \sigma)$ и не позволяет судить о поведении оригинала (при фиксированном $\sigma = \sigma_1$) внутри интервалов $(n + \sigma_1, n + 1 + \sigma_1, \dots)$.

Таблица 6.1

z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУНКЦИЙ ВРЕМЕНИ

$x(t)$	$X(s)$	$X(z)$	$X(z, \sigma)$
$\delta(t)$	1	1	—
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{T_0 z}{(z-1)^2}$	$\frac{T_0 z}{(z-1)^2} + \frac{T_0 \sigma z}{z-1}$

$x(t)$	$X(s)$	$X(z)$	$X(z, \sigma)$
$\frac{t^m}{m!}$	$\frac{1}{s^{m+1}}$	$\frac{T_0^m z}{(z-1)^{m+1}} D_m(z),$ где $D_m(z) = \frac{a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \dots + a_m}{m!},$ $a_k = \sum_{i+1}^k (-i)^{k-i} i^m C_{m+1}^{k-i}$	$\sum_{i=0}^m \frac{T_0^m \sigma^{m-i} D_i(z)}{(m-i)! (z-1)^{i+1}} =$ $= \frac{T_0^m z B_m(z, \sigma)}{(z-1)^{m+1}},$ где $B_m(z, \sigma) = \begin{vmatrix} 1 & 1-z & 0 & \dots & 0 \\ \sigma & 1 & 1-z & \dots & 0 \\ \frac{\sigma^2}{2!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma^m}{m!} & \frac{1}{m!} & \frac{1}{(m-1)!} & \dots & 1 \end{vmatrix}$
e^{-dt}	$\frac{1}{s \mp \alpha}$	$\frac{z}{z-d}$	$\frac{z}{z-d} d^\sigma,$ где $d = e^{\alpha T}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z \sin \omega T_0}{z^2 - 2z \cos \omega T_0 \mp 1}$	$\frac{z^2 \sin \sigma \omega T_0 + z \sin (1-\sigma) \omega T_0}{z^2 - 2z \cos \omega T_0 \mp 1}$
$\cos \omega t$	$\frac{P}{s^2 \mp \omega^2}$	$\frac{z^2 - z \cos \omega T_0}{z^2 - 2z \cos \omega T_0 \mp 1}$	$\frac{z^2 \cos \sigma \omega T_0 - z \cos (1-\sigma) \omega T_0}{z^2 - 2z \cos \omega T_0 \mp 1}$

§ 6.2. Передаточные функции разомкнутых импульсных систем

Линейная импульсная система с амплитудно-импульсной модуляцией (АИМ) может быть представлена в виде последовательного соединения импульсного элемента и непрерывной части. В свою очередь импульсный элемент, преобразующий непрерывный сигнал в последовательность импульсов (амплитуда которых пропорциональна сигналу), может быть заменен последовательным соединением идеального импульсного элемента и специально выбранного непрерывного фильтра, который называется *формирующим элементом*, или *фиксирующей цепью*. Идеальный импульсный элемент преобразует непрерывный сигнал в мгновенные импульсы в виде δ -функций, модулированных по площади. Формирующий элемент формирует импульс заданной формы из δ -импульсов.

Импульсная характеристика формирующего элемента $h(t)$ определяется формой импульса реального импульсного элемента. Следовательно, передаточная функция формирующего элемента может быть найдена как изображение формы импульса по Лапласу, т. е.

$$H(s) = L\{h(t)\}. \quad (6.5)$$

Таким образом, линейную импульсную систему с амплитудно-импульсной модуляцией можно привести к импульсной системе, состоящей из последовательного соединения идеального импульсного элемента, формирующего элемента и непрерывной части (рис. 6.2). Формирующий элемент и непрерывная часть образуют так называемую приведенную непрерывную часть, передаточная функция которой

$$W_{\text{пр}}(s) = H(s) W(s). \quad (6.6)$$

Если внешнее воздействие g приложено ко входу идеального импульсного элемента, то на его выходе появляется последовательность

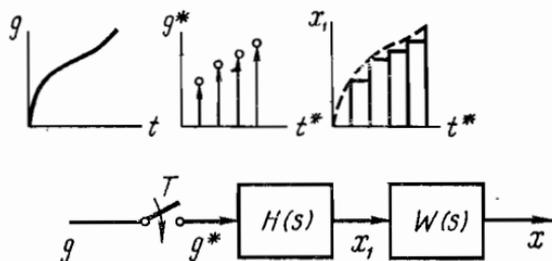


Рис. 6.2. Представление разомкнутой импульсной системы в виде соединения идеального импульсного элемента, формирующего элемента и непрерывной части

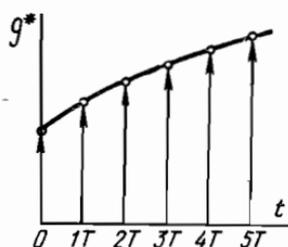


Рис. 6.3. Выходная величина идеального импульсного элемента

мгновенных импульсов g^* с периодом повторения T_0 , модулированных внешним воздействием. Выходной сигнал идеального импульсного элемента

$$g^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g(nT_0) \delta(t - nT_0),$$

где $\delta(t)$ — единичная импульсная функция (δ -функция), равная нулю при всех $t \neq 0$, а при $t = 0$ обращаяющаяся в бесконечность, но так, что $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$.

Таким образом, на выходе идеального импульсного элемента образуются мгновенные импульсы (δ -функции), площадь каждого из которых пропорциональна значениям входной величины в дискретные моменты времени. На рис. 6.3 δ -функции условно изображены в виде стрелок, длина которых соответствует дискретным значениям входной величины.

Последовательность импульсов g^* воздействует на приведенную непрерывную часть системы. Реакция приведенной непрерывной части на мгновенный импульс представляет собой ее импульсную характеристику или функцию «веса»

$$w_{\text{пр}}(t) = L^{-1} \{ W_{\text{пр}}(s) \},$$

где L^{-1} — знак обратного преобразования Лапласа.

Вводя решетчатые функции и используя принцип наложения, можно записать выходную величину разомкнутой импульсной системы в дискретные моменты времени $t = nT_0 + \sigma T_0$

$$x(n, \sigma) = \sum_{\nu=0}^n g(n) \omega_{\text{пр}}(n-\nu, \sigma). \quad (6.7)$$

Это выражение устанавливает связь между входной g и выходной x величинами разомкнутой импульсной системы, которые представлены решетчатыми функциями.

Подвергнув обе части выражения (6.7) z -преобразованию, на основании теоремы свертки получим уравнение разомкнутой системы в изображениях:

$$X(z, \sigma) = W(z, \sigma) G(z), \quad (6.8)$$

где

$$W_{\text{пр}}(z, \sigma) = Z \{ \omega_{\text{пр}}(n, \sigma) \} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\text{пр}}(n, \sigma) z^{-n} \quad (6.9)$$

называется *импульсной передаточной функцией разомкнутой системы*.

Чтобы вычислить импульсную передаточную функцию $W_{\text{пр}}(z, \sigma)$, необходимо:

1) определить передаточную функцию приведенной непрерывной части $W_{\text{пр}}(s)$ и разложить ее на простейшие дроби $W_{\text{пр}i}(s)$;

2) найти импульсные переходные функции $\omega_{\text{пр}i}(t)$ с помощью обратного преобразования Лапласа для каждой составляющей $W_{\text{пр}i}(s)$;

3) перейти к решетчатым функциям $\omega_{\text{пр}i}(n, \sigma)$ и найти сумму ряда (6.9), соответствующую каждой составляющей.

При практических расчетах импульсных систем часто оказывается удобным представить z -преобразование непрерывной функции $\omega_{\text{пр}}(t)$ в виде формулы (6.4):

$$W_{\text{пр}}(z, \sigma) = Z_{\sigma} \{ W_{\text{пр}}(s) \}. \quad (6.10)$$

При этом для нахождения импульсных передаточных функций можно использовать таблицы соответствий между функциями времени, их изображениями по Лапласу и их z -изображениями (см. табл. 6.1).

В большинстве случаев формирующий элемент создает прямоугольные или близкие к прямоугольным импульсы относительной длительности γ с периодом повторения T_0 (рис. 6.4).

Прямоугольный импульс (рис. 6.5) единичной высоты и относительной длительности γ можно представить как

$$h(t) = \begin{cases} 1(t), & \text{если } 0 \leq t \leq \gamma T_0; \\ 1(t) - 1(t - \gamma T_0), & \text{если } t \geq \gamma T_0. \end{cases} \quad (6.11)$$

Передаточная функция формирующего элемента (6.5) равна изображению прямоугольного импульса, т. е.

$$H_{\gamma}(s) = \frac{1 - e^{-\gamma T_0 s}}{s}. \quad (6.12)$$

В этом случае расчетное соотношение для импульсной передаточной функции разомкнутой системы можно получить из формулы (6.10), подставив в нее (6.6) и (6.12):

$$W(z, \sigma) = Z_{\sigma} \left\{ \frac{1 - e^{-\gamma T_0 s}}{s} W(s) \right\} = W_1(z, \sigma) - W_{1\gamma}(z, \sigma), \quad (6.13)$$

где

$$\left. \begin{aligned} W_1(z, \sigma) &= Z_{\sigma} \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\}; \\ W_{1\gamma}(z, \sigma) &= Z_{\sigma} \left\{ \frac{W(s)}{s} e^{-\gamma T_0 s} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

Передаточную функцию $W_{1\gamma}(z, \sigma)$ можно выразить через передаточную функцию $W_1(z, \sigma)$, если применить теорему смещения из теории z -преобразования. В результате получим

$$W_{1\gamma}(z, \sigma) = \begin{cases} z^{-1} W_1(z, 1 + \sigma - \gamma), & \text{если } 0 \leq \sigma \leq \gamma; \\ W_1(z, \sigma - \gamma), & \text{если } \gamma \leq \sigma < 1. \end{cases} \quad (6.15)$$

В частном случае при $\sigma = 0$ [см. (6.15)]

$$W_{1\gamma}(z) = z^{-1} W_1(z, 1 - \gamma). \quad (6.16)$$

Если относительная длительность импульсов $\gamma = 1$, что имеет место при так называемой фиксирующей цепи нулевого порядка, то

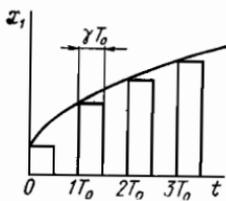


Рис. 6.4. Выходная величина формирующего устройства с прямоугольными импульсами

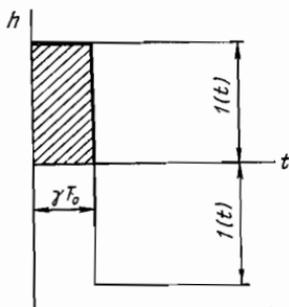


Рис. 6.5. Представление прямоугольного импульса в виде двух ступенчатых функций

расчетное соотношение для импульсной передаточной функции разомкнутой системы существенно упрощается:

$$W(z, \sigma) = Z_{\sigma} \left\{ \frac{1 - e^{-T_0 s}}{s} W(s) \right\} = \frac{z-1}{z} W_1(z, \sigma). \quad (6.17)$$

Пример 6.1. Определим импульсную передаточную функцию системы, состоящей из амплитудно-импульсного модулятора прямоугольных импульсов относительной длительности $\gamma = 0,2$ с периодом повторения $T_0 = 1$ сек и непрерывной части с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k}{s(1 + T_1 s)},$$

$$k = 10 \text{ и } T_1 = 2 \text{ сек.}$$

Импульсную передаточную функцию разомкнутой системы находим по формуле (6.13), представив дробь $W(s)/s$ в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{W(s)}{s} = \frac{k}{s^2(1+T_1s)} = k \left(\frac{1}{s^2} - \frac{T_1}{s} + \frac{T_1}{s+1/T_1} \right).$$

С помощью таблицы соответствий найдем модифицированные z -преобразования для каждого из слагаемых в правой части полученного выражения:

$$W_1(z, \sigma) = k \left[\frac{T_0 z}{(z-1)^2} + \frac{T_0 \sigma z}{z-1} - \frac{T_1 z}{z-1} + \frac{T_1 d^\sigma z}{z-d} \right], \quad (6.18)$$

где $d = e^{-T_0/T_1}$.

Выражения для $W_{1\gamma}(z, \sigma)$ найдем по формуле (6.15) при $0 \leq \sigma \leq \gamma$ и $\gamma \leq \sigma < 1$ соответственно:

$$\left. \begin{aligned} W_{1\gamma}(z, \sigma) &= k \left[\frac{T_0}{(z-1)^2} + \frac{T_0(1+\sigma-\gamma)}{z-1} - \frac{T_1}{z-1} + \frac{T_1 d^{1+\sigma-\gamma}}{z-d} \right]; \\ W_{1\gamma}(z, \sigma) &= k \left[\frac{T_0 z}{(z-1)^2} + \frac{T_0(\sigma-\gamma)z}{z-1} - \frac{T_1 z}{z-1} + \frac{T_1 z d}{z-d} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

Обозначив $T_0/T_1 = \beta$ и подставив выражения (6.18) и (6.19) в (6.13), получим окончательно импульсную передаточную функцию разомкнутой импульсной системы при $0 \leq \sigma \leq \gamma$ и $\gamma \leq \sigma < 1$:

$$\left. \begin{aligned} W(z, \sigma) &= kT_0 \left[\sigma - \frac{1}{\beta} + \frac{\gamma}{z-1} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d^\sigma (z-d^{1-\gamma})}{z-d} \right]; \\ W(z, \sigma) &= kT_0 \left[\frac{\gamma z}{z-1} + \frac{1-d^{-\gamma}}{\beta} \cdot \frac{d^\sigma z}{z-d} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

При $\sigma = 0$ из первого выражения (6.20) получим импульсную передаточную функцию для дискретных моментов времени $t = nT_0$:

$$W(z) = kT_0 \left[\frac{\gamma}{z-1} + \frac{1-d^{-\gamma}}{\beta} \cdot \frac{d}{z-d} \right];$$

или, в численном выражении,

$$W(z) = 5 \left(\frac{1}{z-1} - \frac{0,6}{z-0,6} \right).$$

Если формирующее устройство представляет собой фиксирующую цепь нулевого порядка, то импульсная передаточная функция получается из первого выражения (6.20) после подстановки в него $\gamma = 1$, а именно:

$$W(z, \sigma) = kT_0 \left[\frac{1}{z-1} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d^\sigma (z-1)}{z-d} + \sigma - \frac{1}{\beta} \right].$$

При $\sigma = 0$ это выражение существенно упрощается:

$$W(z) = kT_0 \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1-d}{\beta} \cdot \frac{1}{z-d} \right) = 10 \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-0,6} \right).$$

Отметим, что два последних выражения могут быть получены непосредственно из (6.17).

Пример 6.2. Определим импульсную передаточную функцию системы с АИМ, включающей в себя фиксирующую цепь нулевого порядка и непрерывную часть с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{k \prod_{i=1}^m (1 + \tau_i s)}{s^v \prod_{i=1}^n (1 + T_i s)}$$

Предварительно разложим $W(s)$ на простейшие дроби:

$$W(s) = \sum_{q=1}^v \frac{C_q}{s^q} + \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{1 + T_i s} \quad (6.21)$$

и определим коэффициенты разложения C_q и B_i :

$$C_q = \frac{1}{(v-q)!} \left[\frac{d^{v-q}}{ds^{v-q}} \cdot \frac{N(s)}{D(s)} \right]_{s=0}; \quad B_i = T_i \left[\frac{N(s)}{D(s)} \right]_{s=1/T_i} \quad (6.22)$$

Подставив (6.21) в (6.6), по формуле (6.10) с помощью табл. 6.1 найдем импульсную передаточную функцию. Так, например, для системы с астатизмом второго порядка ($v=2$) импульсная передаточная функция

$$W(z, \sigma) = C_1 T_0 \frac{\sigma z + 1 - \sigma}{z-1} - \frac{C_2 T_0^2}{2} \cdot \frac{[\sigma z + (1-\sigma)]^2 + z}{(z-1)^2} + \sum_{i=1}^n B_i \frac{z - d_i - d_i^\sigma (z-1)}{z - d_i} \quad (6.23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= k \left(\sum_{j=1}^m \tau_j - \sum_{i=1}^n T_i \right); \quad C_2 = \kappa; \\ B_i' &= B_i / T_i; \quad d_i = e^{-T_0 / T_i}. \end{aligned} \right\} \quad (6.24)$$

Если в (6.23) принять $\sigma = 0$, то получим импульсную передаточную функцию для моментов квантования:

$$W(z) = \frac{C_1 T_0}{z-1} + \frac{C_2 T_0^2}{2} \cdot \frac{(z+1)}{(z-1)^2} + \sum_{i=1}^n B_i' \frac{1-d_i}{z-d_i} \quad (6.25)$$

Импульсные передаточные функции системы с астатизмом первого порядка и статической системы могут быть получены аналогично или из выражения (6.23), если принять в первом случае $C_1 = W(0)$, $C_2 = 0$, а во втором случае $C_1 = C_2 = 0$.

Когда в системе имеется «чистое» запаздывание $\tau = kT_0 + \varepsilon T_0$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 0 \leq \varepsilon < 1$), импульсная передаточная функция разомкнутой системы

$$W_\tau(z, \sigma) = Z_\sigma \left\{ \frac{1 - e^{-\gamma T_0 s}}{s} W(s) e^{-\tau s} \right\} = W_{1\tau}(z, \sigma) - W_{1\tau_1}(z, \sigma) \quad (6.26)$$

где

$$\left. \begin{aligned} W_{1\tau}(z, \sigma) &= Z_{\sigma} \left\{ \frac{W(s)}{s} e^{-\tau s} \right\}; \\ W_{1\tau_1}(z, \sigma) &= Z_{\sigma} \left\{ \frac{W(s)}{s} e^{-\tau_1 s} \right\}; \\ \tau_1 &= \gamma T_0 + \tau; \quad \tau_1/T_0 = k_1 + \varepsilon_1. \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

При этом $k_1 = 0, 1, 2, \dots$ и $0 \leq \varepsilon_1 < 1$.

Импульсные передаточные функции $W_{1\tau}(z, \sigma)$ и $W_{1\tau_1}(z, \sigma)$ можно найти по передаточной функции $W_1(z, \sigma)$, которая определяется по первой из формул (6.14). Для этого следует применить теорему смещения, согласно которой

$$W_{1\tau}(z, \sigma) = \begin{cases} z^{-(1+k)} W_1(z, 1 + \sigma - \varepsilon), & \text{если } 0 \leq \sigma \leq \varepsilon; \\ z^{-k} W_1(z, \sigma - \varepsilon), & \text{если } \varepsilon \leq \sigma < 1; \end{cases} \quad (6.28)$$

$$W_{1\tau_1}(z, \sigma) = \begin{cases} z^{-(1+k_1)} W_1(z, 1 + \sigma - \varepsilon_1), & \text{если } 0 \leq \sigma \leq \varepsilon_1; \\ z^{-k} W_1(z, \sigma - \varepsilon_1), & \text{если } \varepsilon_1 \leq \sigma < 1. \end{cases} \quad (6.29)$$

При $\sigma = 0$ выражения для импульсной передаточной функции запишутся как

$$W_{1\tau}(z) = z^{-(1+k)} W_1(z, 1 - \varepsilon); \quad (6.30)$$

$$W_{1\tau_1}(z) = z^{-(1+k)} W(z, 1 - \varepsilon_1). \quad (6.31)$$

В том случае, когда формирующий элемент представляет собой фиксирующую цепь нулевого порядка ($\gamma = 1$), импульсная передаточная функция системы с запаздыванием

$$W_{\tau}(z, \sigma) = \frac{z-1}{z} Z_{\sigma} \left\{ \frac{W(s)}{s} e^{-\tau s} \right\} = \frac{z-1}{z} W_{1\tau}(z, \sigma). \quad (6.32)$$

После подстановки в (6.32) выражения для $W_{1\tau}(z, \sigma)$ из (6.28) с учетом (6.17) выразим импульсную передаточную функцию системы с запаздыванием через импульсную передаточную функцию системы без запаздывания:

$$\left. \begin{aligned} z^{-(1+k)} W(z, 1 + \sigma - \varepsilon), & \text{ если } 0 \leq \sigma \leq \varepsilon; \\ z^{-k} W(z, \sigma - \varepsilon), & \text{ если } \varepsilon \leq \sigma < 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.33)$$

При $\sigma = 0$ для моментов квантования импульсная передаточная функция системы с запаздыванием и фиксирующим элементом нулевого порядка ($\gamma = 1$)

$$W_{\tau}(z) = z^{-(1+k)} W(z, 1 - \varepsilon). \quad (6.34)$$

Пример 6.3. Определим импульсную передаточную функцию системы, состоящей из амплитудно-импульсного модулятора прямоугольных импульсов (имеющих относительную длительность $\gamma < 1$ с периодом повторения T_0) и непрерывной части с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k}{T_1 s + 1} e^{-\tau s}.$$

Импульсная передаточная функция такой разомкнутой системы вычисляется по формулам (6.26)—(6.29). Предварительно передаточная функция согласно (6.14) запишется как

$$W_1(z, \sigma) = k \left(\frac{z}{z-1} - \frac{zd^\sigma}{z-d} \right).$$

Подставив это выражение в формулы (6.28) и (6.29), найдем

$$\left. \begin{aligned} W_{1\tau}(z, \sigma) &= kz^{-k} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{d^{1+\sigma-\varepsilon}}{z-d} \right), \text{ если } 0 < \sigma < \varepsilon_1; \\ W_{1\tau}(z, \sigma) &= kz^{-(k-1)} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{d^{\sigma-\varepsilon}}{z-d} \right), \text{ если } \varepsilon < \sigma < 1; \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

$$\left. \begin{aligned} W_{1\tau_1}(z, \sigma) &= kz^{-k_1} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{d^{1+\sigma-\varepsilon_1}}{z-d} \right), \text{ если } 0 < \sigma < \varepsilon_1; \\ W_{1\tau_1}(z, \sigma) &= kz^{-k_1+1} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{d^{\sigma-\varepsilon_1}}{z-d} \right), \text{ если } \varepsilon_1 < \sigma < 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$

Полученные выражения следует подставить в (6.26) и найти окончательное выражение для импульсной передаточной функции, которая определена для соответствующих интервалов $0 < \sigma < 1$.

Если в системе используется фиксирующая цепь нулевого порядка (относительная длительность импульсов $\gamma = 1$), то

$$\tau_1 = T_0 + \tau; \quad k_1 = 1 + k; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Подставив полученные значения для k_1 и ε_1 в (6.36), найдем по (6.26) импульсную передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W_\tau(z, \sigma) = k \frac{z-d-(z-1)d^{1+\sigma-\varepsilon}}{(z-d)z^{k+1}}, \text{ если } 0 < \sigma < \varepsilon;$$

$$W_\tau(z, \sigma) = k \frac{z-d-(z-1)d^{\sigma-\varepsilon}}{(z-d)z^k}, \text{ если } \varepsilon < \sigma < 1.$$

Последние два выражения могут быть получены и непосредственно по (6.32).

Пример 6.4. Определим импульсную передаточную функцию для дискретных моментов времени ($\sigma = 0$) импульсной системы, рассмотренной в примере 6.2, в том случае когда непрерывная часть имеет «чистое» запаздывание $\tau = kT_0 + \varepsilon T_0$ ($k = 0, 1, 2, \dots; 0 < \varepsilon < 1$), т. е. описывается передаточной функцией

$$W_\tau(s) = W(s) e^{-\tau s}. \quad (6.37)$$

Импульсная передаточная функция может быть вычислена по (6.32). Однако в данном случае удобнее воспользоваться выражением (6.34), так как передаточная функция $W(z, 1 - \varepsilon)$ может быть сразу же определена по (6.23) после замены σ на $(1 - \varepsilon)$.

В случае системы с астатизмом второго порядка импульсная передаточная функция

$$W_{\tau}(z) = z^{-(k+1)} \left\{ C_1 T_0 \frac{(1-\varepsilon)z + \varepsilon}{z-1} + \frac{C_2 T_0^2}{2} \cdot \frac{[(1-\varepsilon)z + \varepsilon]^2 + z}{(z-1)^2} + \sum_{i=1}^n B_i \frac{z - d_i - d_i^{1-\varepsilon}(z-1)}{z - d_i} \right\}. \quad (6.38)$$

Импульсные передаточные функции системы с астатизмом первого порядка и статической системы могут быть получены из этого выражения, если принять в первом случае $C_1 = W(0)$, $C_2 = 0$, а во втором случае $C_1 = C_2 = 0$.

§ 6.3. Структурные схемы и передаточные функции замкнутых импульсных систем

Рассмотрим замкнутую импульсную систему, структурная схема которой приведена на рис. 6.6. Она состоит из идеального импульсного элемента с периодом повторения T_0 , фиксирующей цепи с передаточной функцией $H(s)$ и непрерывной части, разделенной на два участка с передаточными функциями $W_1(s)$ и $W_2(s)$.

Определим предварительно импульсную передаточную функцию замкнутой системы по управляющему воздействию, для чего примем $f(t) = 0$. Входной сигнал импульсного элемента $\varepsilon(t)$ зависит не только от внешнего воздействия $q(t)$, но и от выходной величины системы $x(t)$:

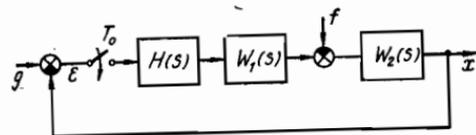


Рис. 6.6. Структурная схема замкнутой импульсной системы

Так как импульсный элемент замыкается лишь в дискретные моменты времени $t = nT_0$, то последнее уравнение можно записать через решетчатые функции в виде

$$\varepsilon(n) = g(n) - x(n). \quad (6.39)$$

Уравнение (6.40) называется *уравнением ошибки замкнутой импульсной системы относительно оригиналов*. Подвергая уравнение (6.40) z -преобразованию и учитывая теорему линейности, получим уравнение ошибки в изображениях:

$$E(z) = G(z) - X(z). \quad (6.41)$$

Как было показано ранее, уравнение разомкнутой импульсной системы имеет вид

$$X(z, \sigma) = W(z, \sigma) E(z), \quad (6.42)$$

где

$$W(z, \sigma) = Z_{\sigma} \{H(s) W_1(s) W_2(s)\}.$$

При $\sigma = 0$ получим изображение решетчатой функции $x(n)$:

$$X(z) = W(z) E(z). \quad (6.43)$$

Подставив (6.43) в (6.41), найдем уравнение замкнутой импульсной системы относительно изображения ошибки:

$$E(z) = \frac{1}{1 \mp W(z)} G(z). \quad (6.44)$$

Если далее подставить (6.44) в (6.42), то получим уравнение замкнутой импульсной системы, описывающее процессы в любой момент времени $t = nT_0 + \sigma T_0$:

$$X(z, \sigma) = \frac{W(z, \sigma)}{1 \mp W(z)} G(z) = \Phi(z, \sigma) G(z). \quad (6.45)$$

Функция $\Phi(z, \sigma)$ называется *передаточной функцией замкнутой импульсной системы* и равна отношению z -изображения выходной величины замкнутой импульсной системы к z -изображению входной величины при нулевых начальных условиях:

$$\Phi(z, \sigma) = \frac{X(z, \sigma)}{G(z)} = \frac{W(z, \sigma)}{1 \mp W(z)}. \quad (6.46)$$

При $\sigma = 0$ соотношение (6.46) упрощается:

$$\Phi(z) = \frac{W(z)}{1 \mp W(z)}. \quad (6.47)$$

При исследовании замкнутых импульсных систем важно определить сигнал ошибки $\varepsilon(t)$, характеризующий воспроизводимое системой управляющее воздействие $g(t)$. В общем случае изображение сигнала ошибки для любого момента времени $t = nT_0 + \sigma T_0$ можно получить из уравнения (6.39), если подвергнуть его z -преобразованию:

$$E(z, \sigma) = G(z, \sigma) - X(z, \sigma) = G(z, \sigma) - \frac{W(z, \sigma)}{1 \mp W(z, \sigma)} G(z). \quad (6.48)$$

Из (6.48) видно, что понятие передаточной функции по сигналу ошибки для любого значения σ (любого момента времени $t = nT_0 + \sigma T_0$) в нашем случае не имеет смысла, так как такая передаточная функция

$$\Phi_\varepsilon(z, \sigma) = \frac{E(z, \sigma)}{G(z)} = \frac{G(z, \sigma)}{G(z)} - \frac{W(z, \sigma)}{1 \mp W(z)}$$

зависела бы от входного сигнала g .

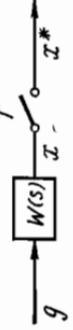
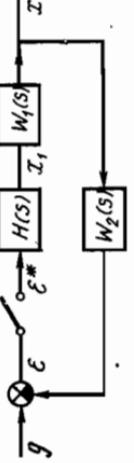
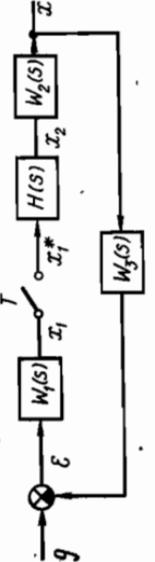
Импульсная передаточная функция для сигнала ошибки может быть получена из (6.48) только при $\sigma = 0$, т. е. для дискретных моментов времени $t = nT_0$:

$$\Phi_\varepsilon(z) = E(z)/G(z) = [1 + W(z)]^{-1}. \quad (6.49)$$

В этом случае она не зависит от входного сигнала и легко определяется по передаточной функции разомкнутой системы.

Найдем теперь изображение выходной величины для возмущающего воздействия $f(t)$ при $g(t) = 0$. Преобразуем структурную схему

СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

Система	Изображение выхода	
	z-изображение $X(z)$	
	смещенное z-изображение $X(z, \sigma)$	
	$Z \{H(s) W(s)\} g(z)$	$Z_{\sigma} \{H(s) W(s)\} g(z)$
	$Z \{g(s) W(s)\}$	$Z \{g_{\sigma}(s) W(s)\}$
	$\frac{Z \{H(s) W_1(s)\} g(z)}{1 + Z \{H(s) W_1(s) W_2(s)\}}$	$\frac{Z_{\sigma} \{H(s) W_1(s)\} g(z)}{1 + Z \{H(s) W_1(s) W_2(s)\}}$
	$\frac{Z \{H(s) W_2(s)\} Z \{g(s) W_1(s)\}}{1 + Z \{H(s) W_2(s) W_3(s) W_1(s)\}}$	$\frac{Z_{\sigma} \{H(s) W_2(s)\} Z \{g(s) W_1(s)\}}{1 + Z \{H(s) W_2(s) W_3(s) W_1(s)\}}$

	$\frac{D(z) Z \{H(s) W_1(s)\} g(z)}{1 + D(z) Z \{H(s) W_1(s) W_2(s)\}}$	$\frac{Z_{\sigma} \{H(s) W_1(s)\} D(z) g(z)}{1 + D(z) Z \{H(s) W_1(s) W_2(s)\}}$
	$\frac{Z \{H(s) W_1(s)\} g(z)}{1 + Z \{H(s) W_1(s)\} Z \{H(s) W_2(s)\}}$	$\frac{Z_{\sigma} \{H(s) W_1(s)\} g(z)}{1 + Z \{H(s) W_1(s)\} Z \{H(s) W_2(s)\}}$
	$\frac{D(z) Z \{H(s) W_1(s)\} g(z)}{1 + D(z) Z \{H(s) W_1(s)\} \times Z \{H(s) W_2(s)\}}$	$\frac{D(z) Z_{\sigma} \{H(s) W_1(s)\} g(z)}{1 + D(z) Z \{H(s) W_1(s)\} Z \{H(s) W_2(s)\}}$
	$\frac{Z \{g(s) W_1(s)\}}{1 + Z \{H(s) W_1(s) W_2(s)\}}$	$\frac{Z_{\sigma} \{g(s) W_1(s)\} - Z_{\sigma} \{H(s) W_1(s) W_2(s)\} Z \{g(s) W_1(s)\}}{1 + Z \{H(s) W_1(s) W_2(s)\}}$

(см. рис. 6.6) к виду, показанному на рис. 6.7. Выходная величина системы

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t). \quad (6.50)$$

Подвергнем выражение (6.50) z-преобразованию, учтя при этом, что

$$X_1(z; \sigma) = Z_{\sigma}\{F(s) W_2(s)\};$$

$$X_2(z, \sigma) = W(z, \sigma) X(z).$$

При этом получим

$$X(z, \sigma) = Z_{\sigma}\{F(s) W_2(s)\} - W(z, \sigma) X(z).$$

При $\sigma = 0$, т. е. для дискретных моментов времени $t = nT_0$, это уравнение можно записать как

$$X(z) = \frac{Z\{F(s) W_2(s)\}}{1 + W(z)}.$$

Подставив его в предыдущее выражение, получим уравнение в z-изображениях для любого момента времени $t = nT_0 + \sigma T_0$:

$$X(z, \sigma) = Z_{\sigma}\{F(s) W_2(s)\} - \frac{Z\{F(s) W_2(s)\}}{1 + W(z)} W(z, \sigma).$$

Как следует из двух последних выражений, вывести понятие импульсной передаточной функции замкнутой импульсной системы по возмущающему воздействию невозможно. Вместо этого для дискретных моментов времени $t = nT_0$ можно лишь найти отношение

$$\frac{X(z)}{Z\{F(s) W_2(s)\}} = \frac{1}{1 + W(z)},$$

которое совпадает с выражением для передаточной функции по сигналу ошибки в дискретные моменты времени $t = nT_0$ относительно управляющего воздействия.

Методику определения импульсных передаточных функций, рассмотренную в этом параграфе на примере простой импульсной системы, можно использовать для получения импульсных передаточных функций более сложных систем. Выражения для z-преобразований выходных координат и импульсных передаточных функций различных импульсных систем, в которых импульсные элементы работают синхронно, синфазно и с одинаковой частотой повторения, приведены в табл. 6.2.

Рис. 6.7. К определению изображения выходной величины замкнутой импульсной системы от возмущающего воздействия

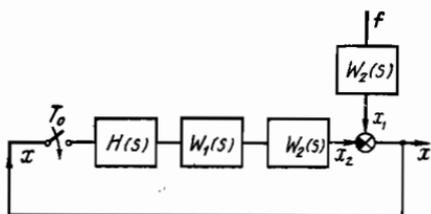


Рис. 6.7. К определению изображения выходной величины замкнутой импульсной системы от возмущающего воздействия

§ 6.4. Оценка точности работы импульсных автоматических систем в установившемся режиме

Для оценки точности импульсных автоматических систем в установившемся режиме используют величину установившейся ошибки при различных типовых воздействиях, наиболее характерных для рассматриваемой системы.

В замкнутой импульсной системе с единичной обратной связью (см. рис. 6.6) ошибка системы ε , управляющее воздействие \hat{g} и возмущающее воздействие f связаны следующим уравнением относительно z -изображений:

$$E(z, \sigma) = G(z, \sigma) \frac{W(z, \sigma)}{1 + W(z)} G(z) + \frac{Z_{\sigma} \{F(s) W_2(s)\}}{1 + W(z)}.$$

Ограничимся рассмотрением ошибки только в дискретные моменты времени $t = nT_0$. Тогда это уравнение при $\sigma = 0$ запишется в виде

$$E(z) = G(z) \frac{1}{1 + W(z)} + \frac{Z_{\sigma} \{F(s) W_2(s)\}}{1 + W(z)} = E_g(z) + E_f(z).$$

Полученное выражение содержит z -изображения двух составляющих ошибки, первая из которых обусловлена управляющим воздействием g , а вторая — возмущающим воздействием f .

Установившаяся ошибка импульсной автоматической системы может быть вычислена по теореме о конечном значении дискретной функции:

$$\begin{aligned} \varepsilon(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{z-1}{z} \cdot \frac{1}{1 + W(z)} G(z) \right\} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{z-1}{z} \cdot \frac{Z \{F(s) W_2(s)\}}{1 + W(z)} \right\} = \\ &= \varepsilon_g(n) + \varepsilon_f(n). \end{aligned}$$

Определим установившуюся ошибку импульсной системы от управляющего воздействия, положив $f(t) = 0$. При этом получим

$$\varepsilon(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{1}{1 + W(z)} G(z). \quad (6.51)$$

Часто в качестве типовых управляющих сигналов используют ступенчатое воздействие, воздействие с постоянной скоростью и воздействие с постоянным ускорением.

Если на вход системы подана ступенчатая функция $g(t) = A_0 1(t)$, z -изображение которой

$$G(z) = A_0 z / (z - 1),$$

то в соответствии с (6.51) установившаяся ошибка записывается как

$$\varepsilon(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_0}{z-1} \frac{1}{1 + W(z)}$$

и называется *ошибкой системы по положению*.

При входном воздействии $g(t) = A_1 t$, линейно зависящем от времени, z -изображение управляющего сигнала

$$G(z) = A_1 T_0 z / (z - 1)^2,$$

а установившаяся ошибка, согласно (6.51), определяется с помощью соотношения

$$\varepsilon_v(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_1 T_0}{z \rightarrow 1} \frac{z}{(z-1) W(z)}$$

и называется *ошибкой системы от скорости*.

Если входной сигнал изменяется с постоянным ускорением

$$g(t) = \frac{A_2 t^2}{2!}, \text{ то } z\text{-изображение}$$

$$G(z) = \frac{T_0^2}{2} \cdot \frac{A_2 z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

Установившаяся ошибка в соответствии с (6.51) определяется выражением

$$\varepsilon_a(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_2 T_0^2}{z \rightarrow 1} \frac{z}{(z-1)^2 W(z)}$$

и называется *ошибкой системы от ускорения*.

В общем случае, если входной сигнал может быть представлен в виде степенной функции времени

$$g(t) = \frac{A_k t^k}{k!}, \quad (6.52)$$

то его z -изображение можно записать как

$$G(z) = \frac{A_k T_0^k z D_k(z)}{(z-1)^{k+1}}, \quad (6.53)$$

где $D_k(z)$ — полином $(k-1)$ -й степени относительно z , причем $D_k(z) = 1$ при $z = 1$ (см. табл. 6.1).

Импульсные автоматические системы можно классифицировать в соответствии с числом полюсов выражения $W(z)$ при $z = 1$. Если импульсная передаточная функция разомкнутой системы

$$W(z) = W_1(z) / (z - 1)^v, \quad (6.54)$$

а $W_1(z)$ не содержит полюсов при $z = 1$, то при $v = 0$ система называется *статической*, при $v = 1$ — *астатической первого порядка* и т. д.

Подставив (6.53) и (6.54) в (6.51), получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon(n) &= 0, \text{ если } k < v; \\ \varepsilon(n) &= \frac{A_k T_0^k}{W_1(z)}, \text{ если } k = v; \\ \varepsilon(n) &= \infty, \text{ если } k > v. \end{aligned}$$

Таким образом, для того чтобы импульсная автоматическая система имела нулевую установившуюся ошибку по управляющему воздействию, необходимо, чтобы порядок астатизма системы превышал степень полинома входного воздействия.

Рассмотренный способ определения установившейся ошибки системы позволяет находить ее только при типовых входных воздействиях. Если сигнал $g(t)$ имеет произвольную форму, достаточно плавную вдали от начальной точки процесса, то он может быть описан конечным числом производных. В этом случае для вычисления ошибки можно воспользоваться понятием коэффициентов ошибок, аналогичным коэффициентам ошибок непрерывных систем. Разложив передаточную функцию по сигналу ошибки для управляющего воздействия $\Phi_e(z)$ в степенной ряд по $(1 - z^{-1})$, получим

$$\Phi_e(z) = \frac{1}{1+W(z)} = C_0 + \frac{C_1}{T_0}(1-z^{-1}) + \frac{C_2}{2!T_0^2}(1-z^{-1})^2 + \dots \\ \dots + \frac{C_m}{m!T_0^m}(1-z^{-1})^m + \dots \quad (6.55)$$

Коэффициенты ряда $C_0, C_1, \dots, C_m, \dots$, как и в теории непрерывных систем, называются *коэффициентами ошибок*.

Из уравнения (6.55) следует, что для статической системы

$$C_0 = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1+W(z)} = \frac{1}{1+k}, \quad (6.56)$$

где k — коэффициент передачи системы.

Для системы с астатизмом первого порядка $C_0 = 0$, поэтому из (6.55) имеем

$$C_1 = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T_0}{(1-z^{-1})[1+W(z)]} = \frac{T_0^1}{k_v}, \quad (6.57)$$

где k_v — добротность системы по скорости.

Для системы с астатизмом второго порядка $C_0 = C_1 = 0$, поэтому из (6.55) следует, что

$$C_2 = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2!T_0^2}{(1-z^{-1})^2[1+W(z)]} = \frac{2!T_0^2}{k_a}, \quad (6.58)$$

где k_a — добротность системы по ускорению.

Аналогично могут быть найдены коэффициенты ошибок $C_3, C_4, \dots, C_m, \dots$.

Ряд ошибок для импульсной системы автоматического регулирования во временной области запишется в следующем виде:

$$e(nT_0) = C_0 g(nT_0) + C_1 g'(nT_0) + \frac{C_2}{2!} g''(nT_0) + \dots + \frac{C_m}{m!} g^{(m)}(nT_0) + \dots \quad (6.59)$$

§ 6.5. Логарифмические частотные характеристики импульсных систем

Применение метода логарифмических частотных характеристик для расчета импульсных систем основано на переходе от z -преобразования к ω -преобразованию с помощью подстановки

$$z = (1 + \omega)/(1 - \omega) \quad (6.60)$$

с последующей заменой комплексной переменной ω на абсолютную псевдочастоту

$$\omega = j \lambda T_0/2. \quad (6.61)$$

При этом реальная частота ω и псевдочастота λ связаны соотношением

$$\lambda = \frac{2}{T_0} \operatorname{tg} \frac{\omega T_0}{2}. \quad (6.62)$$

Для перехода от импульсной передаточной функции к частотной характеристике $W(j\lambda)$ следует в выражение для импульсной передаточной функции $W(z)$ подставить

$$z = \frac{1 + j\lambda T_0/2}{1 - j\lambda T_0/2}. \quad (6.63)$$

Полученное уравнение может быть использовано для построения логарифмических частотных характеристик.

Пример 6.5. Определим частотную характеристику импульсной системы, рассмотренной в примере 6.2. Для этого в выражение для импульсной передаточной функции (6.25) подставим соотношение (6.63). Частотная характеристика системы с астатизмом второго порядка

$$W(j\lambda) = \left(1 - j\lambda \frac{T_0}{2}\right) \left[\frac{C_1}{j\lambda} + \frac{C_2}{(j\lambda)^2} + \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{1 + j\lambda \frac{T_0}{2} \operatorname{cth} \frac{T_0}{2T_i}} \right]. \quad (6.64)$$

Пусть для l полюсов $|s_i| = 1/T_i$ передаточной функции $W(s)$ выполняется условие $T_i \geq 2T_0$, для r полюсов — условие $2T_0 > T_i > T_0/2$, а для $n - l - r$ полюсов — условие $T_i < T_0/2$. Учитывая, что при $T_i \geq 2T_0$ значение $\operatorname{cth}(T_0/2T_i) \approx 2T_i/T_0$, а при $T_i < T_0/2$ значение $\operatorname{cth}(T_0/2T_i) \approx 1$, выражение для частотной характеристики можно представить как

$$W(j\lambda) = \left(1 - j\lambda \frac{T_0}{2}\right) [W_H(j\lambda) + W_{cp}(j\lambda) + W_B(j\lambda)], \quad (6.65)$$

где

$$\begin{aligned} W_H(j\lambda) &= \frac{C_1}{j\lambda} + \frac{C_2}{(j\lambda)^2} + \sum_{i=1}^l \frac{B_i}{1 + j\lambda T_i}; \\ W_{cp}(j\lambda) &= \sum_{i=l+1}^{l+r} \frac{B_i}{1 + j\lambda \frac{T_0}{2} \operatorname{cth} \frac{T_0}{2T_i}}; \\ W_B(j\lambda) &= \sum_{i=l+r+1}^n \frac{B_i}{1 + j\lambda \frac{T_0}{2}}. \end{aligned}$$

Выражение для комплексных коэффициентов передачи статической системы и системы с астатизмом первого порядка можно получить непосредственно из (6.64), приняв в первом случае $C_1 = C_2 = 0$, а во втором — $C_2 = 0$.

Пример 6.6. Определим частотную характеристику импульсной системы с запаздыванием, рассмотренной в примере 6.4.

После подстановки в (6.38) соотношения (6.63) получим комплексный коэффициент передачи импульсной системы с астатизмом второго порядка и «чистым» запаздыванием:

$$W_{\tau}(j\lambda) = \left(\frac{1 - j\lambda T_0/2}{1 + j\lambda T_0/2} \right)^{k+1} \left\{ C_1 \frac{1 + (1-2\varepsilon) j\lambda T_0/2}{j\lambda} + \right. \\ \left. + C_2 \left[\frac{1 + (1-2\varepsilon) j\lambda T_0/2}{(j\lambda)^2} - \frac{T_0^2}{2} \varepsilon (1-\varepsilon) \right] \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n B_i \frac{1 + \frac{1 + d_i - 2d_i}{1 - d_i} j\lambda \frac{T_0}{2}}{1 + j\lambda \frac{T_0}{2} \operatorname{cth} \frac{T_0}{2T_i}} \right\}. \quad (6.66)$$

Как и в предыдущем примере, частотная характеристика

$$W_{\tau}(j\lambda) = \left(\frac{1 - j\lambda T_0/2}{1 + j\lambda T_0/2} \right)^{k+1} \{ [1 + (1-2\varepsilon) j\lambda T_0/2] W_{\text{H}}(j\lambda) + W_{\text{CP}}(j\lambda) + W_{\text{B}}(j\lambda) \}, \quad (6.67)$$

где

$$W_{\text{H}}(j\lambda) = \frac{C_1}{j\lambda} + \frac{C_2}{(j\lambda)^2} + \sum_{i=1}^{l-1} \frac{B_i}{1 + j\lambda T_i}; \\ W_{\text{CP}}(j\lambda) = \sum_{i=l}^r \frac{1 + \frac{1 + d_i - 2d_i^{1-\varepsilon}}{1 - d_i} j\lambda \frac{T_0}{2}}{1 + j\lambda \frac{T_0}{2} \operatorname{cth} \frac{T_0}{2T_i}}; \\ W_{\text{B}}(j\lambda) = -\frac{C_2 T_0^2}{2} \varepsilon (1-\varepsilon) + \sum_{i=l+r+1}^n B_i.$$

Частотные характеристики статической системы и системы с астатизмом первого порядка можно получить из (6.66), приняв в первом случае $C_1 = C_2 = 0$, а во втором — $C_2 = 0$.

Логарифмические частотные характеристики импульсных систем можно построить с помощью выражений (6.65) и (6.67). Однако такой путь требует вычисления всех коэффициентов разложения и суммирования характеристик.

Пример 6.7. Пусть непрерывная часть системы имеет передаточную функцию

$$W(s) = \frac{k}{s^2 (1 + T_1 s)}, \quad (6.68)$$

причем $T_0 = 1$ сек, $T_1 = 0,1$ сек и $k = 1$ л/сек².

На основании (6.65) запишем

$$W(j\lambda) = k \left(\frac{1 - j\lambda T_0/2}{1 + j\lambda T_0/2} \right) \left[\left(1 + j\lambda \frac{T_0}{2} \right) W_H(j\lambda) + W_B(j\lambda) \right],$$

где

$$W_H(j\lambda) = \frac{C_2}{(j\lambda)^2} + \frac{C_1}{j\lambda}; \quad W_B(j\lambda) = B_1.$$

В соответствии с выражениями (6.22) имеем:

$$C_1 = \left(\frac{d}{ds} \cdot \frac{1}{1 + T_1 s} \right)_{s=0} = -T_1; \quad C_2 = \left(\frac{1}{1 + T_1 s} \right)_{s=0} = 1;$$

$$B_1 = T_1 \left(\frac{1}{T_1 s^2} \right)_{s=-1/T_1} = T_1^2.$$

При этом выражение для частотной характеристики имеет вид

$$W(j\lambda) = k \frac{1 - j\lambda T_0/2}{1 + j\lambda T_0/2} \cdot \frac{1 + j\lambda (T_0/2 - T_1) - (j\lambda)^2 (T_0 T_1/2 - T_1^2)}{(j\lambda)^2}, \quad (6.69)$$

или

$$W(j\lambda) = k \frac{1 - j\lambda T_0/2}{1 + j\lambda T_0/2} \cdot \frac{(1 + j\lambda T_I)(1 + j\lambda T_{II})}{(j\lambda)^2}, \quad (6.70)$$

где постоянные времени определяются из выражений:

$$\left. \begin{aligned} T_I &= \frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} + a_2}; \\ T_{II} &= \frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} + a_2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.71)$$

Здесь $a_1 = T_0/2 - T_1$, $a_2 = T_0 T_1/2 - T_1^2$.

Так как $T_1^2 \ll T_0 T_1/2$, то частотная характеристика

$$W(j\lambda) = k \frac{1 - j\lambda T_0/2}{1 + j\lambda T_0/2} \cdot \frac{(1 + j\lambda T_0/2)(1 - j\lambda T_1)}{(j\lambda)^2} = \frac{(1 - j\lambda 0,5)(1 - j\lambda 0,1)}{(j\lambda)^2}. \quad (6.72)$$

Логарифмические частотные характеристики $L(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$ легко построить на основании выражений (6.70) и (6.72), представляющих собой произведение элементарных типовых сомножителей.

Пример 6.8. Непрерывная часть системы имеет передаточную функцию

$$W(s) = \frac{k}{s^2 (1 + T_1 s) (1 + T_2 s)}, \quad (6.73)$$

причем $k = 100$ 1/сек, $T_1 = 1$ сек, $T_2 = 0,1$ сек и $T_0 = 10$ сек.

Как и в предыдущем примере, частотная характеристика определяется с помощью выражения (6.65). Определим по формулам (6.22) значения коэффициентов разложения:

$$\begin{aligned} C_2 &= 1; \quad C_1 = -(T_1 + T_2); \\ B_1 &= T_1/(T_1 - T_2); \quad B_2 = T_2/(T_2 - T_1). \end{aligned}$$

Подставив значения C_1, C_2, B_1, B_2 в (6.65), получим

$$W(j\lambda) = k \frac{1 - j\lambda T_0/2}{1 + j\lambda T_0/2} \cdot \frac{1 + j\lambda(T_0/2 - T_\Sigma) - (j\lambda)^2(T_0 T_\Sigma/2 - T_\sigma^2)}{(j\lambda)^2}, \quad (6.74)$$

где

$$T_\Sigma = T_1 + T_2; \quad T_\sigma^2 = T_1^2 + T_1 T_2 + T_2^2.$$

Учитывая что в данном случае выполняется условие $T_0/2 > T_\Sigma$, выражение (6.74), как и в предыдущем примере, можно привести к виду уравнения (6.70), где постоянные времени определяются по формулам (6.71) после подстановки в них значений

$$a_1 = T_0/2 - T_\Sigma = 5 - 1,11 \approx 3,9 \text{ и } a_2 = T_0 T_\Sigma/2 - T_\sigma^2 = 5 \cdot 1,11 - 1,21 \approx 4,34.$$

В этом случае частотная характеристика

$$W(j\lambda) = 100 \cdot \frac{1 - j\lambda 5}{1 + j\lambda 5} \cdot \frac{(1 + j\lambda 4,7)(1 - j\lambda)}{(j\lambda)^2} \approx 100 \frac{(1 - j\lambda 5)(1 - j\lambda)}{(j\lambda)^2}$$

совпадает по виду с выражением (6.72).

Пример 6.9. Непрерывная часть системы имеет передаточную функцию

$$W(j\lambda) = \frac{k}{s^2(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots (1 + T_n s)}, \quad (6.75)$$

причем $T_0/2 > T_1 > T_2 > \dots > T_n$.

Частотную характеристику системы, как и в предыдущих случаях, можно записать в виде формулы (6.74) или (6.70). При этом значения постоянных времени определяются как

$$\left. \begin{aligned} T_\Sigma &= T_1 + T_2 + \dots + T_n; \\ T_\sigma &= T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + \dots + T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6.76)$$

Пример 6.10. Непрерывная часть системы имеет передаточную функцию

$$W(s) = \frac{k}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}, \quad (6.77)$$

причем $k = 100$ 1/сек; $T_1 = 10$ сек; $T_2 = 0,5$ сек; $T_0 = 4$ сек.

Частотная характеристика определяется по формуле (6.65), при этом

$$W_H(j\lambda) = \frac{C_1}{j\lambda} + \frac{B_1}{1 + j\lambda T_1}; \quad W_B(j\lambda) = B_2.$$

В соответствии с (6.22) имеем:

$$C_1 = 1; \quad B_1 = T_1^2/(T_2 - T_1); \quad B_2 = -T_2^2/(T_2 - T_1).$$

Подставив эти коэффициенты в (6.65), получим

$$W(j\lambda) = k \frac{1 - j\lambda \frac{T_0}{2}}{1 + j\lambda \frac{T_0}{2}} \cdot \left[\frac{\left(1 + j\lambda \frac{T_0}{2}\right) \left(1 + j\lambda \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}\right)}{j\lambda (1 + j\lambda T_1)} - \frac{T_2^2}{T_2 - T_1} \right].$$

При $T_1 \gg T_2$ последнее выражение можно существенно упростить:

$$W(j\lambda) = k \frac{1 - j\lambda T_0/2}{1 + j\lambda T_0/2} \cdot \frac{1 + j\lambda(T_0/2 - T_2) - (j\lambda)^2(T_0 T_2/2 - T_2^2)}{j\lambda(1 + j\lambda T_1)}. \quad (6.78)$$

Как видно из (6.78), выражение для числителя частотной характеристики совпадает с выражением (6.69) (после замены T_2 на T_1). Подставив численные значения параметров k , T_0 , T_1 и T_2 в (6.78), получим

$$W(j\lambda) = 100 \frac{1 - j\lambda^2}{1 + j\lambda^2} \cdot \frac{1 + j\lambda 1,5 - (j\lambda)^2 0,75}{j\lambda (1 + j\lambda 10)}$$

В результате вычислений по формулам (6.71) последнее выражение можно привести к виду выражения (6.70):

$$W(j\lambda) = 100 \frac{(1 - j\lambda 2)(1 - j\lambda 0,4)(1 + j\lambda 1,9)}{(1 + j\lambda 2)j\lambda(1 + j\lambda 10)} \approx 100 \frac{(1 - j\lambda 2)(1 - j\lambda 0,4)}{j\lambda(1 + j\lambda 10)}$$

Аналогично можно показать, что в системе с непрерывной частью, передаточная функция которой

$$W(s) = \frac{k}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots (1 + T_n s)} \quad (6.79)$$

(где $T_1 > \frac{T_0}{2} > T_2 > T_3 > \dots > T_n$), комплексный коэффициент передачи при $T_1 \gg T_2$

$$W(j\lambda) = k \cdot \frac{1 - j\lambda T_0/2}{1 + j\lambda T_0/2} \cdot \frac{1 + j\lambda(T_0/2 - T_\Sigma) - (j\lambda)^2(T_0 T_\Sigma/2 - T_\sigma)}{j\lambda(1 + j\lambda T_1)} \quad (6.80)$$

где $T_\Sigma = T_2 + T_3 + T_4 + \dots + T_n$;

$T_\sigma = T_2 T_3 + T_3 T_4 + T_2 T_5 + \dots$

Пример 6.11. Непрерывная часть системы имеет передаточную функцию

$$W(s) = k \frac{1 + T_3 s}{s^2 (1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} e^{-\tau s} \quad (6.81)$$

где $T_3 > T_0/2 > T_1 > T_2$ и $\tau < T_0$.

Комплексный коэффициент передачи такой непрерывной системы определяется выражением типа (6.67):

$$W(j\lambda) = k \left(\frac{1 - j\lambda T_0/2}{1 + j\lambda T_0/2} \right) \{ [1 + j\lambda \frac{T_0}{2}(1 - 2\varepsilon)] W_H(j\lambda) + W_B(j\lambda, \varepsilon) \} \quad (6.82)$$

где

$$W_H(j\lambda) = \frac{C_1}{j\lambda} + \frac{C_2}{(j\lambda)^2}; \quad W_B(j\lambda, \varepsilon) = \frac{C_2 T^2}{2} \varepsilon (1 - \varepsilon) + \sum_{i=1}^2 B_i$$

По формулам (6.22) найдем коэффициенты разложения:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \left[\frac{d}{ds} \cdot \frac{1 + T_3 s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \right]_{s=0} = T_3 - T_1 - T_2; \\ C_2 &= \left[\frac{1 + T_3 s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \right]_{s=0} = 1; \\ B_1 &= \left[\frac{1 + T_3 s}{s^2 (1 + T_2 s)} \right]_{s=-1/T} = \frac{T_1 - T_3}{T_1 - T_2} T_1^2; \\ B_2 &= \left[\frac{1 + T_3 s}{s^2 (1 + T_1 s)} \right]_{s=-1/T_2} = \frac{T_2 - T_3}{T_2 - T_1} T_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (6.83)$$

Пусть период дискретности $T_0 = 4$ сек, запаздывание $\tau = 1$ сек, а постоянная времени $T_1 = 0,5$ сек, $T_2 = 0,2$ сек и $T_3 = 20$ сек. В этом случае $T_{\Sigma}/T_0 = 0,25$, т. е. $k = 0$ и $\varepsilon = 0,25$.

По формулам (6.83) вычислим значения $C_1 = 19,3$; $C_2 = 1$; $B_1 = -15,8$; $B_2 = 2,63$ и подставим их в выражение (6.82). При этом частотная характеристика импульсной системы

$$W(j\lambda) = k \frac{1-j\lambda 2}{1+j\lambda 2} \cdot \left[\frac{(1-j\lambda)(1+j\lambda 19,3)}{(j\lambda)^2} - 14,6 \right] \approx \approx k \frac{(1-j\lambda 2)(1+j\lambda 20)(1+j\lambda 0,3)}{(1+j\lambda 2)(j\lambda)^2}. \quad (6.84)$$

При $\tau=0$ и $\varepsilon=0$ получим

$$W(j\lambda) = k \cdot \frac{(1-j\lambda 2)(1+j\lambda 20)(1+j\lambda 1,3)}{(1+j\lambda 2)(j\lambda)^2}. \quad (6.85)$$

Выражения (6.84) и (6.85) позволяют легко построить логарифмические частотные характеристики системы, так как они записаны в виде произведения элементарных типовых сомножителей.

§ 6.6. Приближенные методы построения логарифмических частотных характеристик импульсных систем

Во многих случаях построение логарифмических частотных характеристик можно существенно упростить, если это построение производить отдельно для областей низких и высоких частот [4].

Рассмотрим эту методику на примере системы с АИМ, включающей в себя фиксирующую цепь нулевого порядка и непрерывную часть с передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{k \prod_{j=1}^m (1+j\tau_j s)}{s^v \prod_{i=1}^n (1+T_i s)}$$

Пусть постоянные времени числителя передаточной функции $\tau_j > \omega_c^{-1}$, частота среза системы $\omega_c < 2/T_0$ и в районе частоты среза логарифмическая амплитудная характеристика имеет наклон -20 дБ/дек. При принятых допущениях для системы с астатизмом второго порядка ($v = 2$) в области низких частот левее частоты среза ω_c передаточная функция

$$W_H(s) = \frac{k(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)\dots(1+\tau_m s)}{s^2(1+T_1 s)(1+T_2 s)\dots(1+T_l s)} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s^2} + \sum_{i=1}^l \frac{B_i}{1+T_i s},$$

где постоянные времени T_1, T_2, \dots, T_l имеют сопрягающие частоты меньше частоты среза ω_c . Коэффициенты разложения C_1, C_2 и B_i определяются по формулам (6.22).

Передаточная функция в области низких частот аналогична передаточной функции непрерывной части, рассмотренной в примере 6.5,

поэтому частотную характеристику для низких частот можно получить из (6.65) при $W_B(j\lambda) = W_{c_p}(j\lambda) = 0$:

$$W_H(j\lambda) = (1 - j\lambda T_0/2) \left[\frac{C_1}{j\lambda} + \frac{C_2}{(j\lambda)^2} + \sum_{i=1}^l \frac{B_i}{1 + j\lambda T_i} \right].$$

Таким образом, в области низких частот частотная характеристика получается подстановкой $s = j\lambda$ в передаточную функцию непрерывной части и умножением на дополнительный множитель $(1 - j\lambda T_0/2)$, которым в этой области частот ($\lambda < \lambda_c < 2/T_0$) можно пренебречь.

Если учесть, что при $\lambda < \lambda_c$ псевдочастота λ совпадает с реальной частотой ω , то частотные характеристики импульсной системы и ее непрерывной части в области низких частот практически совпадают.

В области высоких частот, т. е. правее частоты среза, передаточная функция

$$W_B(s) = \frac{\omega_c}{s(1 + T_{l+1}s) \dots (1 + T_n s)} = \frac{C_1}{s} + \sum_{i=l+1}^n \frac{B_i}{1 + T_i s},$$

где T_{l+1}, \dots, T_n — постоянные времена, частоты сопряжения которых больше частоты среза ω_c ; C_1 и B_i — коэффициенты разложения, определяемые по (6.22).

Частотную характеристику в области высоких частот также можно определить из выражения (6.55), приняв $C_2 = 0$:

$$W_B(j\lambda) = \left(1 - j\lambda \frac{T_0}{2}\right) \left(\frac{C_1}{j\lambda} - \sum_{i=l+1}^n \frac{B_i}{1 + j\lambda T_0/2} \right).$$

Учитывая, что $C_1 = \omega_c$, $B_i = \omega_c T_i$ и $\sum_{i=l+1}^n T_i = T_\Sigma$, запишем

$$W_B(j\lambda) = \frac{\omega_c (1 - jT_0/2)[1 + j\lambda(T_0/2 - T_\Sigma)]}{j\lambda (1 + j\lambda T_0/2)}.$$

Объединив выражения, полученные для низких и высоких частот, получим частотную характеристику импульсной системы:

$$W(j\lambda) = \frac{k(1 + j\lambda\tau_1) \dots (1 + j\lambda\tau_m)}{(j\lambda)^2 (1 + j\lambda T_1) \dots (1 + j\lambda T_l)} \cdot \frac{[1 + j\lambda(T_0/2 - T_\Sigma)](1 - j\lambda T_0/2)}{(1 + j\lambda T_0/2)}. \quad (6.86)$$

Изложенная выше методика может быть использована и при построении логарифмических частотных характеристик с передаточной функцией непрерывной части другого вида.

В общем случае частотная характеристика

$$W(j\lambda) = \left(\frac{1 - j\lambda T_0/2}{1 + j\lambda T_0/2} \right) \left[1 + j\lambda \left(\frac{T_0}{2} - T_\Sigma \right) \right] W_H(s)_{s=j\lambda}. \quad (6.87)$$

Последнее выражение справедливо и для систем, непрерывные части которых содержат колебательные или консервативные звенья, если они входят в низкочастотную часть передаточной функции $W(s)$.

Аналогично можно показать, что в том случае, когда система имеет «чистое» запаздывание $\tau = kT_0 + \varepsilon T_0$ ($k = 0, 1, 2, \dots; 0 \leq \varepsilon \leq 1$), частотную характеристику можно представить как

$$W(j\lambda) = \frac{(1 - j\lambda T_0/2)^{k+1}}{(1 + j\lambda T_0/2)^{k+2}} \left[1 + j\lambda \frac{T_0}{2} (1 - 2\varepsilon) \right] \left[1 + j\lambda \left(\frac{T_0}{2} - T_\Sigma \right) \right] W_H(s)_{s=j\lambda}. \quad (6.88)$$

Каждое из выражений (6.87) и (6.88) представляет собой произведение элементарных типовых сомножителей, поэтому их легко использовать для построения логарифмических частотных характеристик импульсных систем.

Пример 6.12. Построим приближенные логарифмические частотные характеристики импульсной системы с АИМ и с фиксирующей цепью нулевого порядка. Период дискретности $T_0 = 4$ сек. Передаточная функция непрерывной части

$$W(s) = \frac{k(1 + 25s)}{s^2(1 + 0,5s)(1 + 0,3s)} e^{-\tau s},$$

где $\tau = 1$ сек.

В этом случае $\tau/T_0 = k + \varepsilon$, $k = 0$ и $\varepsilon = 0,25$.

Передаточная функция низкочастотной части без запаздывания

$$W_H(s) = k(1 + 25s)/s^2.$$

Подставив значения k и ε в (6.88), получим частотную характеристику

$$W(j\lambda) = k \frac{(1 - j\lambda 2)(1 + j\lambda)(1 + j\lambda 1,2)(1 + j\lambda 25)}{(j\lambda)^2(1 + j\lambda 2)}.$$

Приближенные логарифмические частотные характеристики $L(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$, соответствующие этому выражению, построены на рис. 6.8.

При исследовании промышленных объектов и систем управления приближенная передаточная функция часто определяется по переходной характеристике. При этом влияние малых постоянных времени заменяется эквивалентным запаздыванием $\tau_\Sigma = T_\Sigma$.

Аналогично можно поступить и в том случае, когда известна передаточная функция системы [см. (6.21) и (6.37)].

Пусть постоянным времени T_i при $i = 1, 2, 3, \dots, l$ и τ_j при $j = 1, 2, 3, \dots, f$ соответствуют частоты сопряжения ω_i и ω_j , меньшие частоты $\omega = 1/T_0$, а постоянным времени T_i при $i = l + 1, l + 2, \dots, n$ и τ_j при $j = f + 1, f + 2, \dots, m$ — частоты сопряжения ω_i и ω_j , большие частоты $\omega = 1/T_0$. В этом случае передаточную функцию $W_\tau(s)$ можно заменить эквивалентной передаточной функцией $W_\Sigma(s)$,

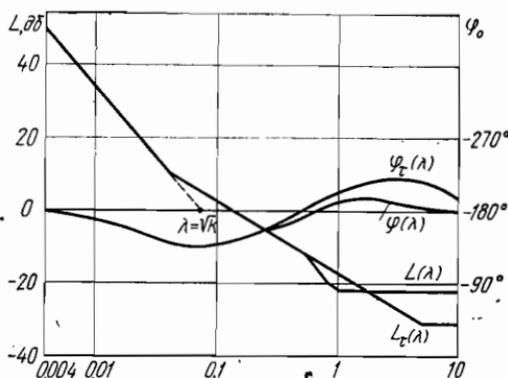


Рис. 6.8. Приближенные логарифмические частотные характеристики

которая учитывает большие постоянные времени, собственное τ и эквивалентное τ_0 запаздывания:

$$W_\tau(s) \approx W_0(s) = W_H(s) e^{-\tau_\Sigma s}$$

Вводя обозначения

$$\tau_\Sigma = \tau + \tau_0; \tau_0 = \sum_{i=l+1}^n T_i - \sum_{j=l+1}^m \tau_j; \tau_\Sigma/T = k_1 + \varepsilon_1$$

(где $k_1 = 0, 1, 2, \dots$; $0 \leq \varepsilon_1 \leq 1$), получим на основании (6.67) приближенное выражение для частотной характеристики:

$$W_\tau(j\lambda) \approx \left(\frac{1 - j\lambda T_0/2}{1 + j\lambda T_0/2} \right)^{k_1+1} \left[1 + (1 - 2\varepsilon_1) j\lambda \frac{T_0}{2} \right] W_H(s)_{s=j\lambda}. \quad (6.89)$$

Как видно из (6.89), методика приближенного построения логарифмических частотных характеристик дискретных систем, основанная на замене малых постоянных времени эквивалентным запаздыванием, обладает наибольшей простотой и наглядностью и практически не отличается от методики построения логарифмических частотных характеристик непрерывных систем.

Пример 6.13. Построим приближенную логарифмическую частотную характеристику системы, приведенной в примере 6.12. Заменяем малые постоянные времени эквивалентным запаздыванием $\tau_0 = 0,8$ сек. Следовательно, $\tau_\Sigma/T_0 = k_1 + \varepsilon_1 = 0,45$, т. е. $k_1 = 0$ и $\varepsilon_1 = 0,45$.

Подставив значения k_1 и ε_1 в (6.89), получим

$$W_\tau(j\lambda) = k \frac{(1 - j\lambda 2)(1 \mp j\lambda 25)(1 \mp j\lambda 0,2)}{(1 \mp j\lambda 2)(j\lambda)^2}$$

Приближенные логарифмические частотные характеристики $L_\tau(\lambda)$ и $\varphi_\tau(\lambda)$ построены на рис. 6.8.

§ 6.7. Анализ устойчивости импульсных систем

Для устойчивости замкнутой импульсной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического полинома

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

(полюса передаточной функции замкнутой системы) были расположены внутри окружности единичного радиуса с центром в начале координат плоскости z .

Таким образом, исследование устойчивости импульсной системы сводится к изучению расположения корней характеристического полинома замкнутой системы относительно окружности единичного радиуса. Для решения этой задачи могут быть обобщены все критерии устойчивости (Гурвица, Михайлова, Найквиста), используемые в теории непрерывных систем. Однако практическая ценность алгебраических критериев в значительной степени снижается из-за того, что с повышением степени характеристического полинома объем вычислений резко увеличивается. Другой существенный недостаток этих критериев

заключается в том, что они позволяют определить только устойчива или неустойчива система. Найти же запас устойчивости или дать рекомендации по улучшению качества импульсной системы с помощью этих критериев невозможно. В этом случае существенные преимущества имеют частотные методы расчета устойчивости.

Если пользоваться логарифмическими частотными характеристиками $L(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$, то для исследования устойчивости импульсной системы можно применять критерий устойчивости Найквиста, который при этом формулируется следующим образом: замкнутая импульсная система устойчива, если в диапазоне частот, где логарифмическая амплитудно-частотная характеристика разомкнутой системы $L(\lambda) > 0$, разность между положительными и отрицательными переходами логарифмической фазо-частотной характеристики разомкнутой системы $\varphi(\lambda)$ через линии $\pm(2k+1)\pi$ ($k=0, 1, 2, \dots$) равняется $r/2$, где r — число корней с положительной вещественной частью в характеристическом уравнении разомкнутой системы.

Пример 6.14. Исследуем по логарифмическим частотным характеристикам устойчивость замкнутой импульсной системы с АИМ и фиксирующей цепью нулевого порядка, если передаточная функция непрерывной части

$$W_{\tau}(s) = \frac{k(1 \div 2,5s)}{s^2(1 \div 0,05s)(1 \div 0,03s)} e^{-0,1s}$$

при $k = 1 \text{ 1/сек}^2$ и $T_0 = 0,4 \text{ сек}$.

Построим приближенные логарифмические частотные характеристики разомкнутой импульсной системы, заменив малые постоянные времени эквивалентным запаздыванием. В данном случае

$$\tau_0 = 0,05 \div 0,03 = 0,08 \text{ сек};$$

$$\tau_{\Sigma} = 0,1 \div 0,08 = 0,18 \text{ сек};$$

$$\tau_{\Sigma}/T_0 = k_1 \div \varepsilon_1, \text{ т. е. } k_1 = 0 \text{ и } \varepsilon_1 = 0,45.$$

Подставив значения k_1 и ε_1 в (6.89), получим выражение для частотной характеристики

$$W_{\tau}(j\lambda) = k \frac{(1 - 0,2j\lambda)(1 \div 2,5j\lambda)(1 \div 0,02j\lambda)}{(1 \div 0,2j\lambda)(j\lambda)^2},$$

по которому на рис. 6.9 построены логарифмические частотные характеристики $L_{\tau}(\lambda)$ и $\varphi_{\tau}(\lambda)$. Как видно из рисунка, в диапазоне частот, где $L_{\tau}(\lambda) > 0$ (кривая 1), характеристика $\varphi_{\tau}(\lambda)$ не пересекает линию $-\pi$, а поэтому импульсная система при $k = 1 \text{ 1/сек}^2$ устойчива. Критическое значение k определяется по кривой 2 аналогично непрерывным системам:

$$k = \lambda_{0\text{кр}}^2 = 1,4^2 \approx 2 \text{ 1/сек}^2.$$

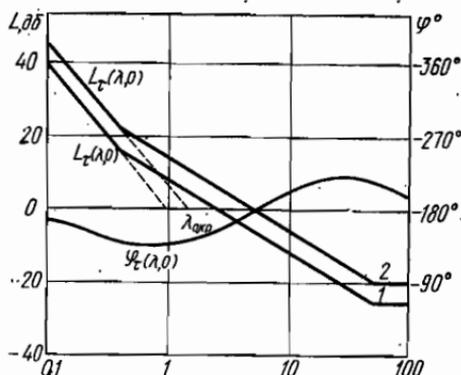


Рис. 6.9. Анализ устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам

§ 6.8. Расчет корректирующих цепей в импульсных системах методом логарифмических частотных характеристик

При расчете импульсных автоматических систем по логарифмическим частотным характеристикам в первую очередь необходимо определить желаемую логарифмическую частотную характеристику импульсной системы, удовлетворяющую заданным показателям качества.

Заданные показатели качества импульсных автоматических систем можно обеспечить с помощью непрерывных или дискретных корректирующих цепей. Расчет корректирующих цепей (определение их структуры и параметров) существенно упрощается, если воспользоваться понятием типовой желаемой логарифмической характеристики. При этом система считается скорректированной, если ее частотная характеристика совпадает с желаемой частотной характеристикой в существенном диапазоне частот.

Во многих реальных импульсных системах период квантования T_0 достаточно мал и соблюдается условие $1/T_0 \gg \omega_c$ (ω_c — частота среза системы). В этом случае частотные характеристики импульсной системы $W(j\lambda)$ совпадают с частотными характеристиками непрерывной части $W(j\omega)$ в существенном диапазоне частот, а поэтому расчет таких импульсных систем полностью совпадает с расчетом аналогичных непрерывных систем. При синтезе желаемой частотной характеристики можно пользоваться любыми рассмотренными ранее методами.

Если же период дискретности велик и частота $\omega = 1/T_0$ соизмерима с частотой среза системы ω_c , то высокочастотная и среднечастотная части частотной характеристики импульсной системы $W(j\lambda)$ могут сильно отличаться от высокочастотной и среднечастотной части частотной характеристики непрерывной части $W(j\omega)$. В этом случае изложенные ранее методы синтеза непрерывных систем оказываются неприемлемыми, так как желаемую логарифмическую частотную характеристику необходимо определять с учетом квантования по времени. При этом показатели качества импульсной и непрерывной систем существенно отличаются.

Для построения желаемой логарифмической частотной характеристики импульсной системы можно использовать такой критерий качества как показатель колебательности системы M , т. е. величину максимального значения амплитудно-частотной характеристики импульсной системы:

$$M = \max_{0 < \lambda < \infty} \frac{|\Phi(j\lambda, \sigma)|}{|\Phi(j0, \sigma)|}.$$

Показатель колебательности особенно удобно использовать для систем с колебательными процессами ($M = 1,3 \div 2$). Он позволяет получить простые и наглядные аналитические соотношения, связывающие параметры желаемой логарифмической частотной характеристики с периодом дискретности T_0 [4, 7].

Так же как и при расчете непрерывных систем, для решения задач синтеза импульсных систем по заданному значению показателя колебательности целесообразно применять типовые желаемые логарифмические частотные характеристики статической и астатических систем (рис. 6.10).

Частотные характеристики систем с АИМ и с фиксирующей цепью нулевого порядка и передаточные функции непрерывной части приведены в табл. 6.3.

В области низких частот ($\omega \approx \lambda < \lambda_c$) желаемые логарифмические частотные характеристики импульсных систем совпадают с характеристиками непрерывной части. Параметры желаемых логарифмических частотных характеристик в этой области частот выбираются исходя из требований, предъявляемых к точности в установившемся режиме, т. е. так же, как и при расчете непрерывных систем.

В области средних частот все типовые характеристики имеют одинаковый наклон (-20 дБ/дек). Параметры желаемой логарифмической частотной характеристики в этой области частот, а именно: протяженность участка с наклоном -20 дБ/дек и величина частоты среза $\lambda_c \approx \omega_c$, определяют запас устойчивости системы, вид и время переходного процесса.

Для импульсных систем, имеющих типовые передаточные функции (см. табл. 6.3), показатель колебательности не превышает заданного значения M , если при формировании желаемой логарифмической частотной характеристики выполняются следующие условия:

1) в области частот, меньших частоты среза $\omega_c \approx \lambda_c$,

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{\tau_j} - \sum_{i=1}^l \frac{1}{T_i} \leq \omega_c \frac{M-1}{M} \quad (6.90)$$

или

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{\tau_j} - \sum_{i=1}^l \frac{1}{T_i} \leq \omega_c \sqrt{\frac{M-1}{M}};$$

2) в области частот, больших частоты среза $\omega_c \approx \lambda_c$,

$$\frac{T_0}{2} + \tau_{\Sigma} \leq \frac{1}{\omega_c} \cdot \frac{M}{M+1} \quad (6.91)$$

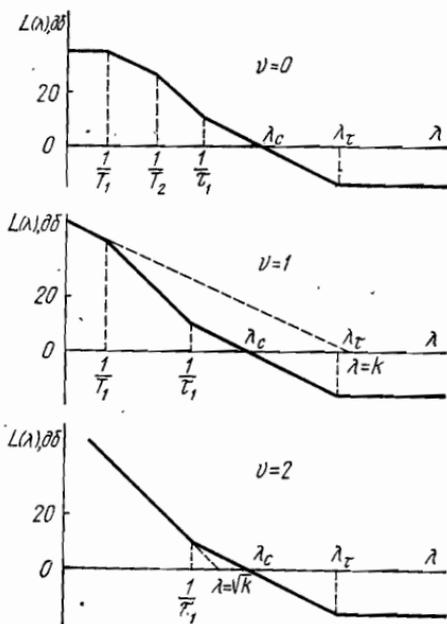


Рис. 6.10. Типовые желаемые амплитудно-частотные характеристики импульсных систем

ТИПОВЫЕ ЖЕЛАЕМЫЕ ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Таблица 6.3

Тип	Степень астазии	Передачная функция непрерывной части	Частотная характеристика импульсной системы с фиксатором нулевого порядка
I	0	$\frac{k(1 + \tau_1 s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots (1 + T_n s)}$	$\frac{k(1 + j\lambda\tau_1) \left(1 - j\lambda\frac{T}{2}\right)^{k+1} \left[1 + j\lambda\frac{T}{2}(1 - 2\varepsilon)\right]}{(1 + j\lambda T_1)(1 + j\lambda T_2) \left(1 + j\lambda\frac{T}{2}\right)^{k+1}}$ $\frac{\tau_\Sigma}{T} = k + \varepsilon; \quad \tau_\Sigma = \tau_0 = \sum_{i=3}^n T_i; \quad k = 0, 1, 2; \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1.$
II	1	$\frac{k(1 + \tau_1 s)}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s) \dots (1 + T_n s)}$	$\frac{k(1 + j\lambda\tau_1) \left(1 - j\lambda\frac{T}{2}\right)^{k+1} \left[1 + j\lambda\frac{T}{2}(1 - 2\varepsilon)\right]}{j\lambda(1 + j\lambda T_1) \left(1 + j\lambda\frac{T}{2}\right)^{k+1}}$ $\tau_\Sigma = \tau_0 = \sum_{i=2}^n T_i$
III	2	$\frac{k(1 + \tau_1 s)}{s^2(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots (1 + T_n s)}$	$\frac{k(1 + j\lambda\tau_1) \left(1 - j\lambda\frac{T}{2}\right)^{k+1} \left[1 + j\lambda\frac{T}{2}(1 - 2\varepsilon)\right]}{(j\lambda)^2 \left(1 + j\lambda\frac{T}{2}\right)^{k+1}}$ $\tau_\Sigma = \tau_0 = \sum_{i=1}^n T_i$

$$\frac{T_0}{2} + \tau_{\Sigma} \leq \frac{1}{\omega_e} \sqrt{\frac{M(M-1)}{M+1}}$$

Условия (6.90) полностью совпадают с аналогичными условиями для непрерывных систем, так как в области низких частот характеристики непрерывной и импульсной систем совпадают.

Условия (6.91) отличаются от аналогичных условий для непрерывных систем, так как в области высоких частот характеристики непрерывной и дискретной систем существенно различны. В области высоких частот типовые логарифмические частотные характеристики имеют наклон 0 дБ/дек. При этом псевдо-частота

$$\lambda_{\tau} = \frac{1}{T_0/2 - \tau_{\Sigma}} = \frac{2}{(1-2\varepsilon)T_0}, \quad (6.92)$$

где $\varepsilon = \tau_{\Sigma}/T_0$, т. е. зависит от периода дискретности T_0 и суммарного запаздывания τ_{Σ} . В свою очередь допустимые значения T_0 и τ_{Σ} определяются показателем колебательности M и частотой среза ω_c из условия (6.91).

Расчет непрерывных корректирующих цепей. В случае непрерывной коррекции корректирующие цепи изменяют характеристики непрерывной части импульсной системы. Различные варианты включения непрерывных корректирующих цепей показаны на рис. 6.11.

При расчете непрерывных корректирующих цепей целесообразно перейти от желаемой логарифмической частотной характеристики импульсной системы к желаемой логарифмической частотной характеристике ее непрерывной части. Тогда расчет логарифмических частотных характеристик непрерывных корректирующих цепей будет полностью совпадать с аналогичным расчетом в непрерывных системах.

В области низких частот ($\omega \approx \lambda < \lambda_c$) желаемые логарифмические частотные характеристики непрерывной части $L(\omega)$, $\varphi(\omega)$ и импульсной системы $L(\lambda)$, $\varphi(\lambda)$ совпадают. При построении желаемой логарифмической частотной характеристики непрерывной части в области высоких частот ($\omega > \omega_c$) целесообразно выбирать малые постоянные времени так, чтобы сопрягающие частоты нескорректированной и желаемой частотных характеристик непрерывной части совпадали. В этом случае корректирующая цепь получается наиболее простой. Однако при этом необходимо, чтобы суммарное запаздывание τ_{Σ} в желаемой непрерывной части не превышало максимально допустимого

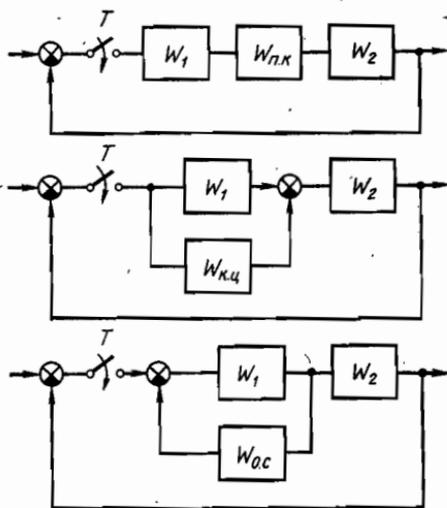


Рис. 6.11. Структурные схемы импульсных систем с непрерывными корректирующими цепями

значения, определяемого соотношением (6.91). В противном случае требуется уменьшить период дискретности либо ввести дополнительные корректирующие цепи в области высоких частот.

Пример 6.15. Определим вид и параметры последовательной корректирующей цепи в импульсной следящей системе с АИМ и с фиксирующей цепью нулевого порядка, обеспечивающей максимальную скорость слежения $\dot{g}_{\max} = 20$ град/сек и максимальное ускорение слежения $\ddot{g}_{\max} = 5$ град/сек² при максимально допустимой ошибке слежения $\varepsilon_{\max} = 5'$ и показателе колебательности $M = 1,5$.

Передаточная функция нескорректированной непрерывной части системы

$$W(s) = \frac{k}{s(1 + T_I s)(1 + T_{II} s)(1 + T_{III} s)},$$

где $T_I = 0,1$ сек; $T_{II} = 0,01$ сек; $T_{III} = 0,005$ сек.

При этом возможны два варианта расчета:

1) максимально допустимый период дискретности систем требуется определить;

2) период дискретности задан и равен $T_0 = 0,03$ сек.

Выполним расчет для первого и второго вариантов.

1. В качестве желаемой логарифмической частотной характеристики можно использовать характеристики с астатизмом первого или второго порядка, однако во втором случае в систему необходимо ввести еще одно интегрирующее звено. Остановимся на типовой частотной характеристике с астатизмом первого порядка:

$$W(j\lambda) = k \frac{(1 + j\lambda\tau_1)(1 - j\lambda \frac{T_0}{2})[(1 + j\lambda \frac{T_0}{2})(1 - 2\varepsilon)]}{j\lambda(1 + j\lambda T_1)(1 + j\lambda T_0/2)}. \quad (6.93)$$

Из условий точности в установившемся режиме определим координаты контрольной точки в области низких частот. Для этого используем понятие эквивалентного синусоидального воздействия. Частота эквивалентного синусоидального воздействия

$$\omega_K = \omega_\varepsilon = \ddot{g}_{\max} / \dot{g}_{\max} = 5/20 = 0,25 \text{ 1/сек.}$$

Модуль передаточной функции разомкнутой системы или требуемое значение усиления в контрольной точке

$$L_K(\omega_K) = 20 \lg \frac{\ddot{g}_{\max}}{\varepsilon_{\max} \dot{g}_{\max}} \sqrt{2} = 20 \lg 1350 \approx 63 \text{ дБ.}$$

Необходимое значение добротности по скорости

$$k_v = k \frac{\dot{g}_{\max}}{\varepsilon_{\max}} \sqrt{2} = \frac{20 \cdot 60 \cdot \sqrt{2}}{5} \approx 340 \frac{1}{\text{сек.}}$$

Значение максимальной постоянной времени

$$T_1 = 1/\omega_K = 4 \text{ сек.}$$

Частота логарифмической характеристики

$$\omega_\varepsilon = \sqrt{\frac{\ddot{g}_{\max}}{\varepsilon_{\max}} \sqrt{2}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 60}{5} \sqrt{2}} = 9,2 \frac{1}{\text{сек.}}$$

Значение постоянной времени τ_1 получим из условия (6.90):

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_\varepsilon \sqrt{\frac{M-1}{M} + \frac{1}{T_1}}} = \frac{1}{9,2 \sqrt{\frac{0,5}{1,5} + 0,25}} \approx 0,18 \text{ сек.}$$

Частота среза системы

$$\lambda_c \approx \omega_c = k \frac{\tau_1}{T_1} = 340 \frac{0,18}{4} \approx 15,3 \text{ 1/сек.}$$

В области низких частот ($\lambda < \lambda_c$) желаемые логарифмические амплитудные характеристики импульсной системы $L(\lambda)$ и логарифмические амплитудные характеристики желаемой непрерывной части $L(\omega)$ совпадают.

В области высоких частот ($\lambda > \lambda_c$) вид логарифмической амплитудной характеристики желаемой непрерывной части $L_{\text{ж}}(\omega)$ выбираем так, чтобы ее сопрягающие частоты совпадали с сопрягающими частотами логарифмической

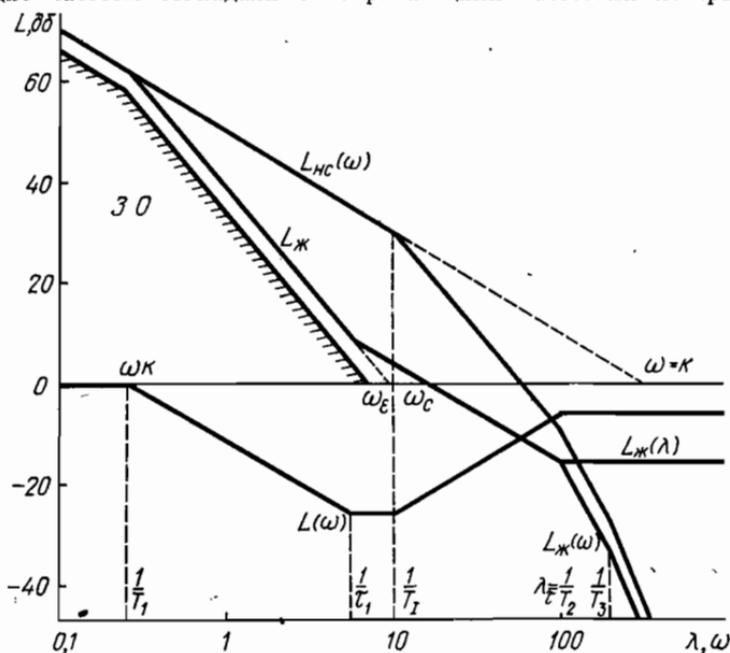


Рис. 6.12. К синтезу характеристик непрерывного последовательного корректирующего устройства

амплитудной характеристики нескорректированной (исходной) непрерывной части $L_{\text{нс}}(\omega)$, как показано на рис. 6.12. Характеристика не должна заходить в заштрихованную область, для того чтобы выполнить требования, предъявляемые к точности системы.

Подсчитав суммарное запаздывание

$$\tau_\Sigma = 2T_2 + T_3 = 2T_{II} + T_{III} = 0,01 \cdot 2 + 0,005 = 0,025 \text{ сек.}$$

из условия (6.91) определяем максимально допустимую величину периода дискретности:

$$T_0 \leq \frac{2}{\omega_c} \cdot \frac{M}{M+1} - 2\tau_\Sigma = 0,08 - 0,05 = 0,03 \text{ сек.}$$

Подсчитав значения

$$k \neq \varepsilon = \tau_{\Sigma} / T_0 = 0,025 / 0,03 = 0,83; \quad k = 0 \text{ и } \varepsilon = 0,83,$$

найдем частоту сопряжения желаемой логарифмической частотной характеристики импульсной системы:

$$\lambda_{\tau} = \frac{2}{|1 - 2\varepsilon| T_0} = \frac{2}{0,66 \cdot 0,03} = 100 \text{ сек.}$$

Вычитанием из логарифмической амплитудной характеристики желаемой непрерывной части $L_{\text{Ж}}(\omega)$ логарифмической амплитудной характеристики нескорректированной (исходной системы) $L_{\text{НС}}(\omega)$ определим логарифмическую амплитудную характеристику последовательной корректирующей цепи $L_{\text{П.К}}(\omega)$, которая соответствует интегро-дифференцирующему звену с передаточной функцией

$$W_{\text{П.К}}(s) = \frac{(1 + \tau_{1\text{К}} s)(1 + \tau_{2\text{К}} s)}{(1 + T_{1\text{К}} s)(1 + T_{2\text{К}} s)},$$

где $T_{1\text{К}} = T_1 = 4 \text{ сек}$; $\tau_{1\text{К}} = \tau_1 = 0,18 \text{ сек}$; $T_{2\text{К}} = T_{II} = T_2 = 0,01 \text{ сек}$; $\tau_{2\text{К}} = T_I = 0,1 \text{ сек}$.

Отметим, что при

$$\tau_{\Sigma} > [\omega_c^{-1} M / (M + 1)]$$

период дискретности, вычисленный из условия (6.91), получится отрицательным. В этом случае малые постоянные времени нескорректированной непрерывной части столь велики, что заданные показатели качества в установившемся режиме и требуемое значение показателя колебательности несовместимы. Для уменьшения малых постоянных времени нескорректированной непрерывной части следует ввести соответствующие корректирующие цепи, после чего, подсчитав новую величину T_{Σ} , определить частоту сопряжения λ_{τ} желаемой логарифмической амплитудной характеристики импульсной системы.

Синтез параллельного корректирующего устройства $W_{\text{К.У}}$ и обратной связи $W_{\text{О.С}}$ (см. рис. 6.11) удобно проводить, используя характеристики эквивалентного последовательного корректирующего устройства так, как это описано для непрерывных систем.

Определив характеристики необходимого последовательного корректирующего устройства $W_{\text{П.К}}$, легко перейти на основании выражений

$$W_{\text{К.У}}(s) = W_1(s) [W_{\text{П.К}}(s) - 1]; \quad W_{\text{О.С}}(s) = \left[\frac{1}{W_{\text{П.К}}(s)} - 1 \right] \cdot \frac{1}{W_1(s)}$$

к характеристикам параллельной корректирующей цепи, или обратной связи.

2. В том случае, когда период дискретности задан, параметры желаемой характеристики в области низких частот, как и в предыдущем случае, выбираются из условий точности в установившемся режиме и заданного значения показателя колебательности; значения постоянных времени T_1 и τ_1 , а также частоты среза системы ω_c совпадают с ранее найденными.

Желаемая логарифмическая амплитудная характеристика непрерывной части в области высоких частот может быть произвольной, но такой, чтобы суммарное запаздывание не превышало допустимого значения:

$$\tau_{\Sigma \text{доп}} \leq \frac{1}{\omega_c} \cdot \frac{M}{M \mp 1} - \frac{T_0}{2} = 0,04 - 0,015 = 0,025 \text{ сек.}$$

Выбрав, как и в предыдущем случае (см. рис. 6.12), постоянные времени

$$T_2 = T_{II} = 0,01 \text{ сек}; \quad T_3 = T_{III} = 0,005 \text{ сек},$$

необходимое значение постоянной времени T'_2 желаемой характеристики непрерывной части найдем по формуле

$$T'_2 = 0,025 - (T_2 + T_3) = 0,025 - 0,015 = 0,01 \text{ сек.}$$

Подсчитав

$$\tau_{\Sigma}/T_0 = 0,025/0,03 = 0,83,$$

определим частоту сопряжения желаемой ЛАХ импульсной системы

$$\lambda_{\tau} = \frac{1}{|1 - 2\varepsilon| T_0} = \frac{1}{0,66 \cdot 0,03} \approx 100 \text{ 1/сек.}$$

По характеристикам желаемой непрерывной части и нескорректированной непрерывной части (см. рис. 6.12) определим характеристику последовательной корректирующей цепи с передаточной функцией

$$W_{\text{п.к}}(s) = \frac{(1 \mp 0,18s)(1 \mp 0,1s)}{(1 \mp 4s)(1 \mp 0,01s)}.$$

Если сумма малых постоянных времени нескорректированной системы больше допустимого значения суммарного запаздывания, то необходимо либо уменьшить период дискретности, либо ввести соответствующие корректирующие цепи для компенсации малых постоянных времени.

Расчет дискретных корректирующих устройств. Структурные схемы импульсных систем с различными вариантами включения дискретных корректирующих устройств показаны на рис. 6.13.

Передаточные функции разомкнутой системы имеют следующий вид: в случае последовательной дискретной корректирующей цепи (рис. 6.13, а)

$$W(z) = Z \{W_1(s) W_2(s)\} D_{\text{п.к}}(z);$$

в случае параллельного включения корректирующего устройства (рис. 6.13, б)

$$W(z) = Z \{W_1(s) W_2(s)\} + D_{\text{р.у}}(z) W_2(z);$$

в случае включения корректирующего устройства в цепь обратной связи (рис. 6.13, в)

$$W(z) = \frac{Z\{W_1(s)W_2(s)\}}{1 \mp W_1(z)D_{o.c}(z)}$$

Расчет дискретных корректирующих устройств в импульсных автоматических системах также целесообразно проводить, используя логарифмические частотные характеристики. В этом случае методика расчета последовательного корректирующего устройства полностью совпадает с методикой расчета последовательного корректирующего устройства в непрерывной системе.

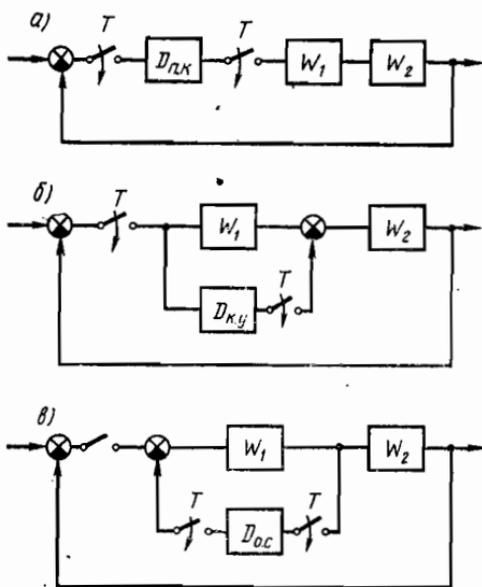


Рис. 6.13. Структурные схемы импульсных систем с дискретными корректирующими устройствами

на вид желаемой передаточной функции разомкнутой системы для выполнения условий грубости системы. Так, например, при последовательной дискретной коррекции необходимо выполнить следующие условия:

- 1) желаемая передаточная функция замкнутой системы $\Phi_{ж}(z)$ должна содержать в качестве своих нулей все те нули передаточной функции $Z\{W_1(s)W_2(s)\}$, величины которых равны или больше единицы;
- 2) передаточная функция ошибки $\Phi_{еж}(z)$ должна содержать в качестве нулей все те полюса функции $Z\{W_1(s)W_2(s)\}$, величины которых больше единицы.

Невыполнение этих условий делает систему негрубой и приводит к неустойчивости [4].

Пример 6.16. Определим передаточную функцию дискретного корректирующего устройства для импульсной следящей системы, рассмотренной в примере 6.14, считая, что период дискретности задан — $T_0 = 0,02$ сек.

Частотная характеристика нескорректированной системы в соответствии с (6.80)

$$W(j\lambda) = k \frac{1 - j\lambda T_0/2}{1 \nabla j\lambda T_0/2} \cdot \frac{1 \nabla j\lambda (T_0/2 - T_\Sigma) - (j\lambda)^2 (T_0 T_\Sigma/2 - T_\sigma)}{j\lambda (1 \nabla j\lambda T_1)}, \quad (6.94)$$

где $T_\Sigma = T_{II} \nabla T_{III}$; $T_\sigma = T_{II} T_{III}$.

Учитывая, что $T_\sigma \ll T_\Sigma$, перепишем (6.94):

$$W(j\lambda) = k \frac{(1 - j\lambda T_0/2)(1 - j\lambda T_\Sigma)}{j\lambda (1 \nabla j\lambda T_1)} = k \frac{(1 - j\lambda 0,01)(1 - j\lambda 0,015)}{j\lambda (1 \nabla j\lambda 4)}.$$

Это выражение содержит нули в правой полуплоскости, в связи с чем желаемая частотная характеристика импульсной системы

$$W_{ж}(j\lambda) = k \frac{(1 \nabla j\lambda \tau_1)(1 - j\lambda T_0/2)(1 - j\lambda T_\Sigma)}{j\lambda (1 \nabla j\lambda T_1)(1 \nabla j\lambda T_\Sigma)}. \quad (6.95)$$

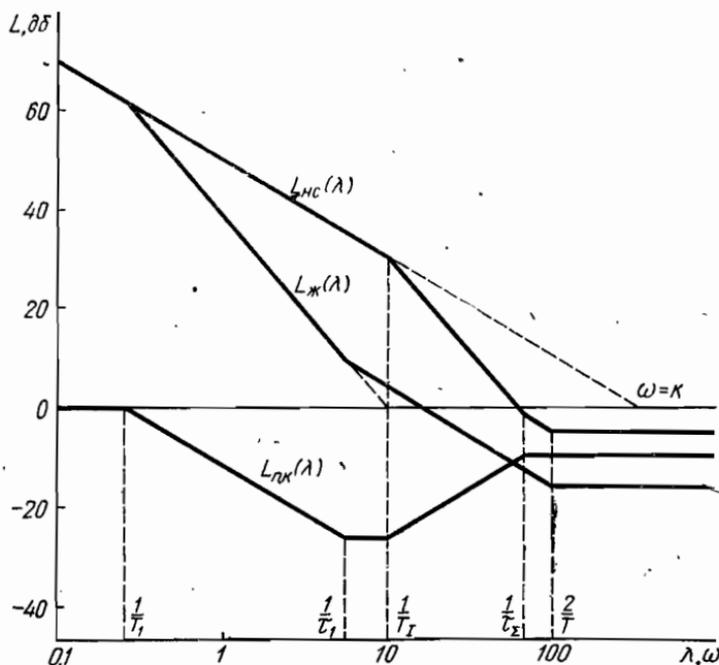


Рис. 6.14. К синтезу характеристик дискретного последовательного корректирующего устройства

В области низких частот ($\lambda < \lambda_c$) данное выражение совпадает с характеристикой импульсной системы, рассмотренной в примере 6.14. Поэтому все необходимые параметры желаемой характеристики в области низких частот могут быть взяты из предыдущего примера.

В области высоких частот ($\lambda > \lambda_c$) методика построения желаемой характеристики импульсной системы аналогична случаю с непрерывной коррекцией,

если вместо условия (6.91) для желаемой передаточной функции вида (6.95) период дискретности и суммарные запаздывания $\tau_{\Sigma} = T_{\Sigma}$ удовлетворяют условию

$$(T_0/2 + 2T_{\Sigma}) \leq [\lambda c^{-1} M / (M + 1)].$$

Из этого условия

$$T_{\Sigma} = \frac{1}{2\lambda c} \cdot \frac{M}{M+1} - \frac{T_0}{4} = 0,02 - 0,005 = 0,015 \text{ сек.}$$

Подставив численные значения параметров в (6.94) и (6.95), построим логарифмические амплитудно-частотные характеристики желаемой $L_{\text{ж}}(\lambda)$ и исходной $L_{\text{н.с}}(\lambda)$ систем (рис. 6.14).

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика последовательного дискретного корректирующего устройства

$$L_{\text{п.к}}(\lambda) = L_{\text{н.с}}(\lambda) - L_{\text{ж}}(\lambda).$$

Она соответствует звену с частотной характеристикой:

$$W_{\text{п.к}}(j\lambda) = \frac{(1 + j\lambda\tau_1)(1 + j\lambda T_1)}{(1 + j\lambda T_1)(1 + j\lambda T_{\Sigma})} = D_{\text{п.к}}(j\lambda).$$

Перейдем к z -преобразованию, используя соотношение (6.63):

$$D_{\text{п.к}}(z) = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{a_2 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}},$$

где

$$b_0 = \left(1 - 2 \frac{\tau_1}{T_0}\right) \left(1 - 2 \frac{T_1}{T_0}\right);$$

$$b_1 = \left(1 + 2 \frac{\tau_1}{T_0}\right) \left(1 - 2 \frac{\tau_1}{T_0}\right) + \left(1 - 2 \frac{\tau_1}{T_0}\right) \left(1 + 2 \frac{T_1}{T_0}\right);$$

$$b_2 = \left(1 + 2 \frac{\tau_1}{T_0}\right) \left(1 + 2 \frac{T_1}{T_0}\right);$$

$$a_0 = \left(1 - 2 \frac{T_1}{T_0}\right) \left(1 - 2 \frac{T_{\Sigma}}{T_0}\right);$$

$$a_1 = \left(1 + 2 \frac{T_1}{T_0}\right) \left(1 - 2 \frac{T_{\Sigma}}{T_0}\right) + \left(1 + 2 \frac{T_{\Sigma}}{T_0}\right) \left(1 - 2 \frac{T_1}{T_0}\right);$$

$$a_2 = \left(1 + 2 \frac{T_1}{T_0}\right) \left(1 + 2 \frac{T_{\Sigma}}{T_0}\right).$$

Полученное выражение является исходным для составления структурной схемы корректирующего устройства. Дискретная передаточная функция корректирующего устройства может быть реализована на цифровой машине или с помощью импульсных RC -цепей и линий задержки [1, 3, 5].

6.9. Расчет переходных процессов в импульсных системах

Переходный процесс в импульсных системах может быть определен с помощью обратного z -преобразования или частотных методов, основанных на использовании вещественной или мнимой частотных характеристик замкнутой системы.

Для вычисления обратного z -преобразования удобно использовать разложение в ряд по степеням z^{-1} изображения выходной величины:

$$X(z, \sigma) = X_0 + X_1 z^{-1} + X_2 z^{-2} + \dots$$

Коэффициенты этого ряда определяют выходную величину в дискретные моменты времени $t = nT_0 + \sigma T_0$. Так как изображение $X(z, \sigma)$ представляет собой отношение двух полиномов, то коэффициенты ряда X_0, X_1, \dots могут быть получены делением полинома числителя на полином знаменателя.

Пример 6.17. Определим переходный процесс при единичном ступенчатом управляющем воздействии в импульсной следящей системе с передаточной функцией

$$\Phi(z) = \frac{3,71z^2 - 1,52z - 1}{5,74z^3 - 7,69z^2 + 4,12z - 1}$$

При этом z -изображение входного воздействия

$$G(z) = z/(z - 1).$$

Следовательно,

$$X(z) = \Phi(z) G(z) = \frac{3,71z^3 - 1,52z^2 - z}{5,74z^4 - 13,43z^3 + 11,81z^2 - 15,12z + 1}$$

Разложение этого выражения в ряд по степеням z^{-1} делением полинома числителя на полином знаменателя дает следующее выражение:

$$X(z) = 0,647z^{-1} + 1,250z^{-2} + 1,420z^{-3} + 1,335z^{-4} + 1,200z^{-5} + 1,113z^{-6} + 1,078z^{-7} + 1,071z^{-8} + \dots$$

Коэффициенты этого ряда определяют мгновенные значения выходной величины в дискретные моменты времени. На рис. 6.15 представлена кривая переходного процесса, построенная по этому выражению.

При малых периодах дискретности, что имеет место в следящих системах, ряд по степеням z^{-1} сходится очень медленно и объем вычислительной работы значительно возрастает. В этом случае наиболее удобным является частотный метод расчета переходных процессов. Этот метод позволяет определить переходный процесс и по частотным характеристикам, заданным графически, когда их аналитическое выражение неизвестно.

Такой метод расчета развит применительно к дискретным системам Я. З. Цыпкиным [5]. При этом предварительно по вещественной

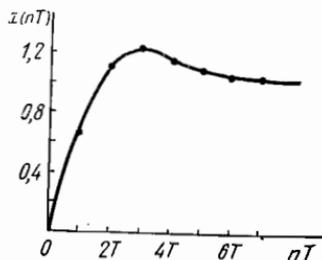


Рис. 6.15. Кривая переходного процесса

частотной характеристике находится импульсная переходная функция замкнутой системы

$$\varphi(n, \sigma) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} P(\omega, \sigma) \cos \bar{\omega} n d\bar{\omega}, \quad (6.96)$$

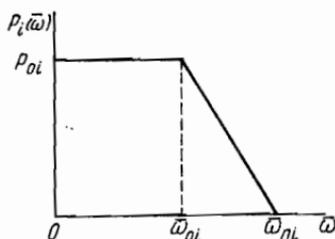
где $\bar{\omega} = \omega T_0$.

При использовании метода трапецидальных характеристик график вещественной частотной характеристики представляется в виде суммы элементарных трапеций

$$P(\bar{\omega}) = \sum_{i=1}^m P_i(\bar{\omega}),$$

одна из которых показана на рис. 6.16.

Подставив в (6.96) выражения для $P(\bar{\omega})$, после несложных преобразований получим



$$\varphi(n, \sigma) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^m A_i \frac{\sin \bar{\omega}_{cp i} n}{\bar{\omega}_{cp i} n} \cdot \frac{\sin \bar{\omega}_{p i} n}{\bar{\omega}_{p i} n}, \quad (6.97)$$

где

$$A_i = P_{0i} \bar{\omega}_{cp i}; \quad \bar{\omega}_{cp i} = \frac{\bar{\omega}_{ni} + \bar{\omega}_{0i}}{2};$$

$$\bar{\omega}_{p i} = \frac{\bar{\omega}_{ni} - \bar{\omega}_{0i}}{2}.$$

Рис. 6.16. Элементарная трапецидальная вещественная частотная характеристика

Эта формула при наличии таблиц функции $\frac{\sin x}{x}$ [5] позволяет определить импульсную переходную функцию замкнутой системы. Зная импульсную переходную функцию системы, можно получить переходный процесс при любом воздействии. Так, для единичного управляющего ступенчатого воздействия переходная функция системы определяется в результате суммирования импульсной характеристики:

$$x(n, \sigma) = \sum_{k=0}^n \varphi(k, \sigma). \quad (6.98)$$

Рассмотренный метод особенно удобен при расчете импульсных систем с помощью логарифмических частотных

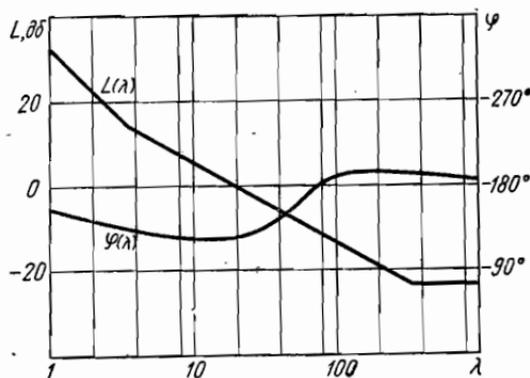


Рис. 6.17. Логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы

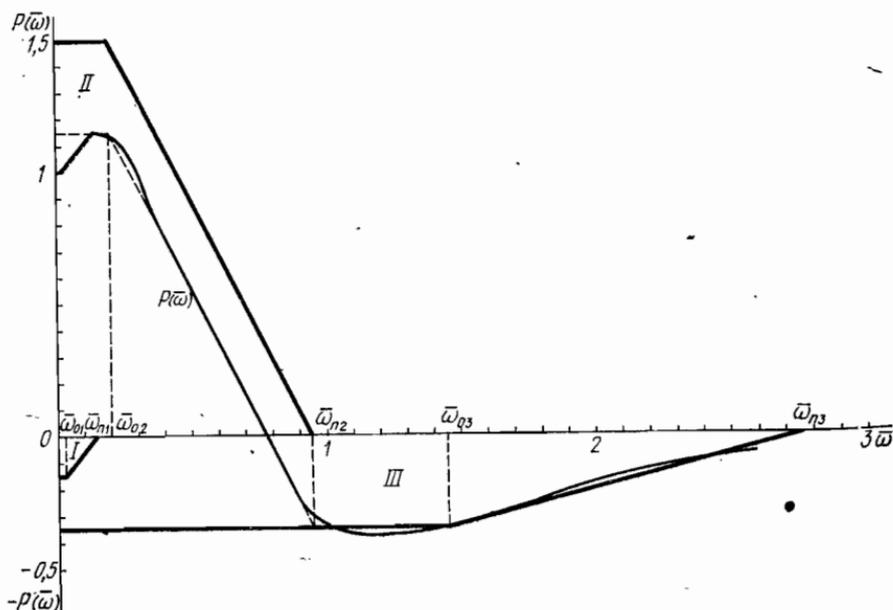


Рис. 6.18. Вещественная частотная характеристика замкнутой системы

характеристик. Вещественная частотная характеристика системы $P(\lambda)$ может быть найдена по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы $L(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$ с помощью номограммы $P = F(L, \varphi)$ подобно тому, как это делалось для непрерывных систем.

Характеристика $P(\bar{\omega})$ определяется по характеристике $P(\lambda)$ путем замены псевдочастоты λ на $\bar{\omega} = 2 \operatorname{arctg} \lambda \frac{T_0}{2}$.

Пример 6.18. Рассмотрим построение переходного процесса в импульсной следящей системе с логарифмическими частотными характеристиками $L(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$, показанными на рис. 6.17.

Вещественная частотная характеристика $P(\lambda)$, полученная с помощью номограммы и перестроенная в функции частоты $\bar{\omega} = 2 \operatorname{arctg} \lambda T_0/2$, показана на рис. 6.18. Характеристика $P(\bar{\omega})$ разбита на элементарные трапеции, параметры которых приведены в табл. 6.4.

На основании (6.97) вычислим импульсную переходную функцию $\varphi(n)$ следящей системы (рис. 6.19, а), по которой с помощью (6.98) определим переходную характеристику $x(n)$, показанную на рис. 6.19, б.

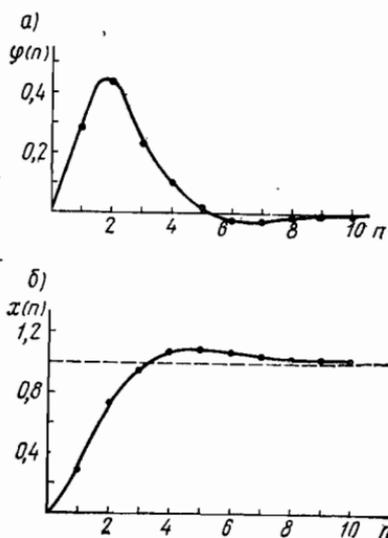


Рис. 6.19. Импульсная переходная функция (а) и переходная функция (б) системы

Таблица 6

Номер трапеций	$\bar{\omega}_{II}$	$\bar{\omega}_0$	$\bar{\omega}_{ср}$	ω_r	P_0	A
I	0,15	0,03	0,09	0,06	-0,15	0,0135
II	0,95	0,20	0,575	0,375	1,50	0,86
III	2,75	1,45	2,1	0,65	0,35	0,735

Литература к главе VI

1. Э. Джурни. Импульсные системы автоматического регулирования. Физматгиз, 1963.
2. Л. Т. Кузин. Расчет и проектирование дискретных систем управления. Машгиз, 1962.
3. Ю. Т. Ту. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. Машгиз, 1964.
4. С. М. Федоров, А. П. Литвинов. Автоматические системы с цифровыми управляющими машинами. «Энергия», 1965.
5. Я. З. Цыпкин. Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, 1963.
6. Г. Деч. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. «Наука», 1965.
7. А. А. Вавилов, М. Е. Верхолат, И. Б. Рубашкин. Силовые электромеханические следящие системы копировально-фрезерных станков. «Машиностроение», 1964.

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 7.1. Предварительные замечания

В качестве корректирующих устройств применяют различные элементы. Например, в электрических и электромеханических системах к таким элементам относятся RC -, RL - и RCL -цепи. Однако не всегда можно назвать элементы, которые служат лишь для коррекции. Одни и те же устройства в зависимости от места включения и поставленной задачи могут выполнять различное назначение, совмещая в себе в отдельных случаях несколько функций. Например тахогенератор в системе автоматического управления может быть либо преобразователем, либо корректирующим устройством с различными динамическими свойствами, либо функциональным элементом для формирования закона регулирования в системе выбранной структуры. В импульсных системах управления асинхронные двухфазные двигатели могут выполнять роль корректирующих устройств и быть одновременно запоминающими, преобразовательными и исполнительными элементами.

Определяющим признаком корректирующего устройства является цель, с которой это устройство вводится в систему как дополнительное для получения требуемых показателей качества.

§ 7.2. Особенности способов коррекции непрерывных линейных систем автоматического управления

Схемы, иллюстрирующие способы введения корректирующих устройств в систему автоматического управления, показаны на рис. 7.1. При использовании последовательного корректирующего устройства $W_{п.к}(s)$ (рис. 7.1, а) передаточная функция скорректированной системы

$$W(s) = \frac{X_3(s)}{X_1(s)} = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} \cdot \frac{X_3(s)}{X_2(s)} = W_{п.к}(s) W_1(s). \quad (7.1)$$

Схема с параллельным корректирующим устройством показана на рис. 7.1, б. В этом случае передаточная функция скорректированной системы

$$W(s) = \frac{X_4(s)}{X_1(s)} = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} + \frac{X_3(s)}{X_1(s)} = W_{п}(s) + W_1(s). \quad (7.2)$$

При использовании для коррекции местной обратной связи $W_{о.с}(s)$, охватывающей часть системы управления с передаточной функцией

$W_{\text{оэв}}(s)$ (рис. 7.1, в), передаточная функция скорректированной части системы

$$W(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{W_{\text{оэв}}(s)}{1 \mp W_{\text{оэв}}(s) W_{\text{о.с}}(s)}, \quad (7.3)$$

где знак «—» соответствует положительной обратной связи, а знак «+» — отрицательной обратной связи.

Заданные показатели качества системы автоматического управления принципиально могут быть обеспечены любым рассмотренным способом коррекции. Однако каждый из указанных способов имеет свои особенности, которые позволяют дать некоторые рекомендации при выборе конкретного корректирующего устройства.

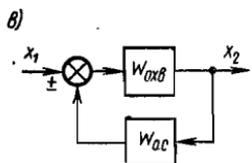
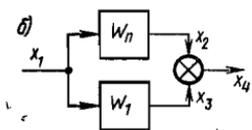


Рис. 7.1. Способы коррекции непрерывной системы автоматического управления

Выбор последовательного корректирующего устройства. Способ коррекции с помощью последовательного корректирующего устройства не требует сложных расчетов и наиболее прост в практическом исполнении. Поэтому он нашел широкое применение, особенно при коррекции систем, передача информации в которых осуществляется сигналами постоянного тока. В указанных случаях корректирующие устройства выполняются обычно в виде RC-цепей.

Основным требованием, предъявляемым к элементам системы управления, является требование однонаправленности прохождения сигнала в системе. Этому же требованию должны отвечать и последовательные корректирующие устройства, которые не должны нагружать предыдущие элементы системы, что необходимо учитывать при выборе их места включения.

Если в (7.1) передаточная функция $W(s)$ соответствует желаемой $W_{\text{ж}}(s)$, то

$$W_{\text{п.к}}(s) = W_{\text{ж}}(s)/W_1(s). \quad (7.4)$$

Логарифмические частотные характеристики последовательного корректирующего устройства определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} L_{\text{п.к}}(\omega) &= L_{\text{ж}}(\omega) - L_1(\omega); \\ \varphi_{\text{п.к}}(\omega) &= \varphi_{\text{ж}}(\omega) - \varphi_1(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Если исходная структура системы не содержит неминимально-фазовых звеньев, то для выбора последовательного корректирующего устройства достаточно иметь лишь логарифмическую частотную характеристику $L_{\text{п.к}}(\omega)$. В этом случае передаточная функция корректирующего устройства записывается по полученным параметрам асимптотической характеристики $L_{\text{п.к}}(\omega)$. При расчете необходимо стремиться к получению несложной передаточной функции корректирующего устройства, с тем чтобы практическое исполнение последнего

было простым. Так как наиболее существенна коррекция частотной характеристики системы лишь в области средних частот, то это позволяет при необходимости изменить вид $L_{п.к}(\omega)$ на высоких и низких частотах так, чтобы реализация корректирующего устройства была проще.

Примеры RC-цепей, широко применяемых в качестве последовательных корректирующих устройств постоянного тока, показаны на рис. 7.2. Корректирующая цепь, изображенная на рис. 7.2, а, называется *интегрирующей* и имеет передаточную функцию

$$W_{п.к}(s) = \frac{T_1 s \mp 1}{T_1 s \alpha \mp 1}, \quad (7.6)$$

где

$$T_1 = R_1 C_1; \quad \alpha = R_1 / (R_1 + R_2).$$

Как видно из характеристик, RC-цепь на частотах, больших чем α/T_1 , приобретает свойства пропорционально-интегрирующего элемента. Следовательно, ее целесообразно использовать для коррекции среднечастотного и высокочастотного участков частотной характеристики исходной системы. Отметим, что точность работы системы управления в установившемся режиме при введении рассмотренной RC-цепи не изменяется, а высокочастотные помехи ослабляются в α раз.

Дифференцирующая RC-цепь (рис. 7.2, б) имеет передаточную функцию

$$W_{п.к}(s) = \alpha \frac{T_2 s \mp 1}{\alpha T_2 s \mp 1}, \quad (7.7)$$

где $T_2 = R_2 C_2; \alpha = R_1 / (R_1 + R_2)$.

Такая цепь ослабляет усиление в области низких частот, что в астатической системе приводит к снижению добротности, а в статической — к увеличению статической ошибки регулирования. Для сохранения заданной точности в установившихся режимах усиление в некорректированной системе необходимо выбрать с соответствующим запасом. На частотах, превышающих значение $\omega = 1/T_2$, характеристики рассматриваемой цепи совпадают с характеристиками пропорционально-дифференцирующего звена, поэтому такую цепь целесообразно применять для коррекции среднечастотного участка частот-

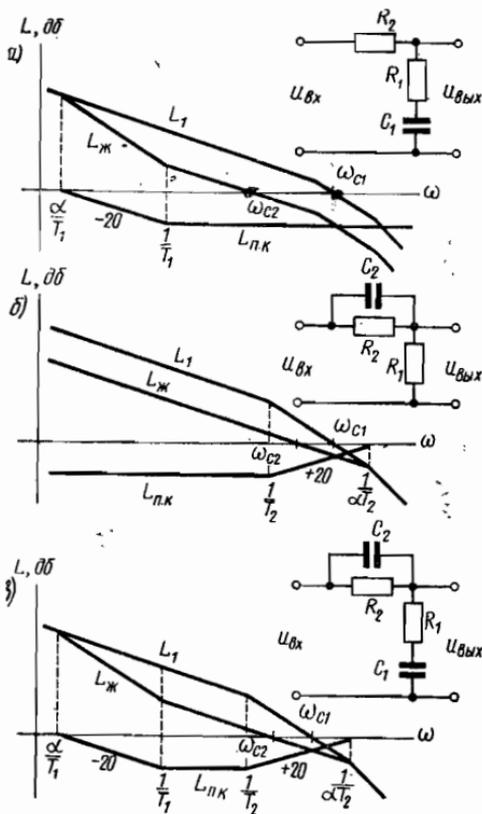


Рис. 7.2. Примеры коррекции частотной характеристики системы автоматического управления с помощью последовательных корректирующих RC-цепей

ной характеристики системы с целью увеличения запаса устойчивости по фазе. Практическим ограничением к применению дифференцирующей цепи является отсутствие у нее фильтрующих свойств. Поэтому эту цепь не следует включать на входе электронного или полупроводникового усилителя с большим коэффициентом усиления в тех случаях, когда на вход усилителя через цепь могут поступать высокочастотные помехи, например пульсации с коллектора электрической машины, пульсации с выхода демодулятора и др. Помехи, поступая на вход усилителя без ослабления, могут вызвать его насыщение, при котором усиление сильно падает, а следовательно, ухудшаются показатели качества системы управления.

Интегро-дифференцирующая RC -цепь (рис. 7.2, в) совмещает в себе в определенной степени свойства двух предыдущих цепей. Если $T_1 \gg T_2$, то $T_1 \approx R_1 C_1$; $T_2 \approx R_2 C_2$ и приближенно передаточная функция

$$W_{п.к}(s) = \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{(T_1 s/\alpha + 1)(\alpha T_2 s + 1)}, \quad (7.8)$$

где $\alpha = R_1/(R_1 + R_2)$.

Интегро-дифференцирующую цепь целесообразно использовать вместо дифференцирующей цепи, с тем чтобы не увеличивать коэффициент усиления в системе для сохранения ее точности. Очевидно, что при этом одновременно снижаются требования, предъявляемые к допустимому уровню помех на входе усилителя. Некоторым недостатком интегро-дифференцирующей RC -цепи является обычно получаемая большая постоянная времени $T = T_1/\alpha$, что затрудняет практическое исполнение ее.

При выполнении коррекции системы с помощью последовательного корректирующего устройства могут возникать случаи, требующие применения более сложных цепей. Однако при этом основные свойства этих цепей существенно не отличаются от изложенных. Как правило, более сложные корректирующие устройства можно реализовать, комбинируя включение рассмотренных RC -цепей.

Последовательные корректирующие устройства рекомендуется применять в системах, в которых элементы имеют достаточно стабильные параметры. Это объясняется тем, что последовательное корректирующее устройство не ослабляет влияния изменений параметров элементов системы на ее показатели качества. Указанное обстоятельство является также причиной ухудшения динамических свойств системы в переходных режимах при больших рассогласованиях, когда отдельные элементы насыщаются и их коэффициенты передачи и другие параметры существенно изменяются.

Выбор параллельного корректирующего устройства. Коррекция систем управления с помощью параллельного корректирующего устройства в ряде случаев оказывается весьма эффективной. Примером может служить коррекция так называемых структурно неустойчивых систем, включающих два и более интегрирующих звена. Чтобы сохранить порядок астатизма системы и одновременно сделать систему устойчивой, можно образовать дополнительный канал передачи сигнала с ко-

эффицентом k_3 так, как это показано на рис. 7.3. В этом случае передаточная функция скорректированной части системы

$$W_{\text{кр}}(s) = \frac{k_1}{s} + k_3 = k_1 \frac{k_3 s/k_1 + 1}{s}, \quad (7.9)$$

откуда следует, что введение параллельного безынерционного звена эквивалентно последовательному включению дифференцирующего звена первого порядка. Часто подобная коррекция применяется с целью введения в закон регулирования интегралов и производных [1]. Введение интеграла повышает точность системы автоматического управления в установившемся режиме, а введение производных увеличивает запас устойчивости системы. Пример включения двух параллельных

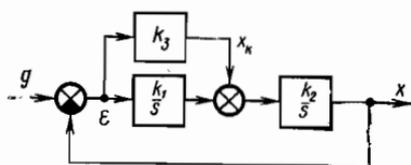


Рис. 7.3. Пример включения в систему автоматического управления параллельного корректирующего устройства k_3

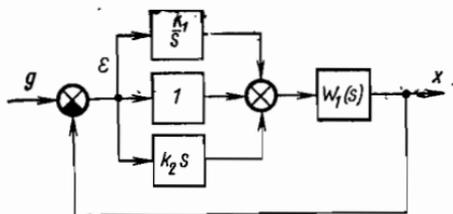


Рис. 7.4. Пример включения в систему двух параллельных корректирующих устройств для образования пропорционально-интегрально-дифференциального закона регулирования (ПИД-закона)

корректирующих устройств показан на рис. 7.4. Включение интегрирующего и дифференцирующего звеньев параллельно усилительному звену с коэффициентом передачи, равным единице, реализует в системе так называемый пропорционально-интегрально-дифференциальный закон регулирования (ПИД-закон). В этом случае передаточная функция скорректированной части системы

$$W_{\text{кр}}(s) = 1 + k_1/s + k_2 s, \quad (7.10)$$

или

$$W_{\text{кр}}(s) = k_1 \frac{T_2 s^2 + T_1 s + 1}{s}, \quad (7.11)$$

где $T_1 = 1/k_1$, $T_2 = k_2/k_1$ — соответственно постоянные времени изодрома и предварения.

Такой способ коррекции с введением в закон регулирования интеграла и производной используется в некоторых промышленных регуляторах. При этом коэффициенты передаточной функции при аргументе s оказываются взаимосвязанными.

Выбор параллельного корректирующего устройства сводят обычно к выбору эквивалентной последовательной корректирующей цепи $W_{\text{п.э}}(s)$ [1]. Если в (7.1) и (7.2) принять $W(s) = W_{\text{ж}}(s)$, то из равенства этих выражений следует, что

$$W_{\text{п}}(s) = W_1(s) [W_{\text{п.э}}(s) - 1], \quad (7.12)$$

По условию, $W_{ж}(s) = W_1(s) W_{п.э}(s)$, поэтому

$$L_{п.э}(\omega) = L_{ж}(\omega) - L_1(\omega); \quad (7.13)$$

$$\varphi_{п.э}(\omega) = \varphi_{ж}(\omega) - \varphi_1(\omega). \quad (7.14)$$

Определив $L_{п.э}(\omega)$ и $\varphi_{п.э}(\omega)$, найдем $W_{п.э}(s)$, что дает возможность получить по (7.12) передаточную функцию параллельного корректирующего устройства.

Выбор корректирующей обратной связи. Коррекция местной обратной связью используется в системах автоматического управления наиболее часто. Корректирующая обратная связь (рис. 7.5) образует в системе внутренний контур II помимо контура I, образуемого главной обратной связью. В подавляющем большинстве случаев используются отрицательные корректирующие обратные связи, однако могут применяться также и положительные обратные связи, например в системах с компенсацией динамических ошибок (в комбинированных следящих системах, в системах автоматической стабилизации с дифференциальными связями).

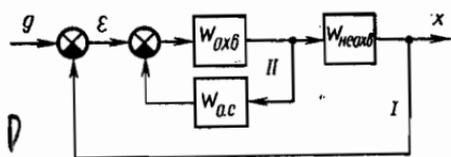


Рис. 7.5. Пример введения в систему автоматического управления местной корректирующей обратной связи

По характеру действия обратные связи делятся на жесткие и гибкие. Смысл такого деления следует из выражения (7.3). Если для установившегося режима работы системы $W_{о.с}(s)_{s=0} = 0$, то в этом режиме обратная связь как бы отключается и, следовательно, для корректируемой части системы $W(s) = W_{о.х.}(s)$. Подобная корректирующая обратная связь действует только в переходных режимах работы системы управления и поэтому называется *гибкой*. Часто гибкие обратные связи выполняются в виде дифференцирующих RC-цепей.

В отличие от гибкой обратной связи *жесткая* обратная связь действует и в переходном, и в установившемся режимах. Примерами элементов жесткой обратной связи являются безынерционное звено с коэффициентом передачи k и апериодическое звено с передаточной функцией

$$W_{о.с}(s) = k/(T_{о.с}s + 1). \quad (7.15)$$

Особое внимание необходимо уделять месту включения корректирующей обратной связи, так как достоинства этого способа коррекции наиболее эффективно проявляются лишь при правильном выборе звеньев, охватываемых обратной связью. При выборе места включения корректирующих обратных связей можно руководствоваться следующими рекомендациями.

Местной обратной связью желательно охватывать те звенья корректируемой системы, которые в процессе работы могут изменять свои параметры и имеют высокие значения коэффициентов передачи, например усилительные устройства. Если в пределах полосы частот системы выполняется условие

$$|W_{кор}(j\omega) \cdot W_{о.с}(j\omega)| \gg 1, \quad (7.16)$$

то передаточная функция корректируемой части [см. (7.3)]

$$W(s) \approx 1/W_{0.c}(s), \quad (7.17)$$

откуда следует, что она не зависит от параметров звеньев с передаточной функцией $W_{0.хв}(s)$. Последнее является преимуществом коррекции местной обратной связью, так как ее введение позволяет существенно ослабить влияние изменения параметров элементов, входящих в местный контур. Отрицательная корректирующая обратная связь уменьшает также влияние нелинейностей элементов (гистерезиса, насыщения, люфта и т. д.), поэтому всегда желательно включать нелинейные элементы в число охватываемых обратной связью. Способ коррекции местной обратной связью позволяет наилучшим образом скорректировать динамические свойства системы по сравнению со способами коррекции с помощью последовательных и параллельных корректирующих устройств.

Корректирующее устройство в цепи местной обратной связи должно быть по возможности простым. Поэтому при расчете параметров корректирующего устройства по логарифмическим характеристикам желательно, чтобы в средней полосе частот наклон логарифмической амплитудно-частотной характеристики звеньев, не охваченных обратной связью $L_{неохв}(\omega) = 20 \lg |W_{неохв}(j\omega)|$ (см. рис. 7.5), и наклон скорректированной (желаемой) логарифмической амплитудной частотной характеристики системы были бы примерно одинаковыми.

При выборе места включения корректирующей обратной связи необходимо обращать также внимание на выполнение условия однонаправленности прохождения сигнала. Следовательно, при включении корректирующего устройства необходимо стремиться к тому, чтобы оно не нагружалось тем элементом системы, на вход которого поступает сигнал. Это условие особенно важно выполнять, если корректирующая обратная связь является гибкой.

§ 7.3. Корректирующие устройства непрерывных линейных систем автоматического управления

Корректирующие устройства непрерывных линейных систем автоматического управления можно разделить на устройства, работающие на постоянном и на переменном токе. Корректирующие устройства первого типа применяются в системах, в которых передача информации осуществляется сигналом постоянного тока. В том случае, когда передача информации производится модулированным сигналом вида

$$u_m(t) = u(t) \cos \omega_0 t,$$

где $u(t)$ — полезный сигнал; ω_0 — частота несущих колебаний, модулируемых сигналом $u(t)$, используются корректирующие устройства, работающие на переменном токе несущей частоты ω_0 . Динамические свойства таких устройств выражают через эквивалентные передаточные функции или эквивалентные частотные характеристики относительно огибающей модулированного сигнала $u_m(t)$.

Корректирующие устройства постоянного тока. Эти устройства могут быть выполнены на различных элементах.

К о р р е к т и р у ю щ и е RC-ц е п и. RC-цепи являются наиболее простыми корректирующими устройствами и используются не только в непрерывных системах, но и в импульсных системах. Схемы RC-цепей, применяемых в качестве корректирующих устройств, их логарифмические частотные характеристики, передаточные функции и параметры приведены в табл. 7.1. Большое число примеров построения корректирующих RC-цепей приводится в [5].

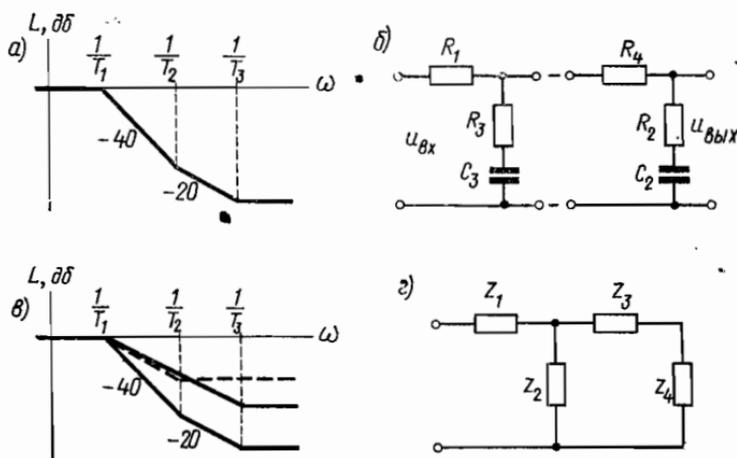


Рис. 7.6. Пример построения корректирующей RC-цепи

При практическом выполнении корректирующей RC-цепи следует наиболее рационально выбирать величины сопротивлений резисторов и емкостей конденсаторов.

Пример 7.1. Определим величины сопротивлений резисторов и емкостей конденсаторов минимально-фазовой корректирующей RC-цепи, логарифмическая амплитудно-частотная характеристика которой показана на рис. 7.6, а. Соответствующая передаточная функция RC-цепи имеет вид

$$W(s) = \frac{(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}{(T_1 s + 1)^2}, \quad (7.18)$$

где $T_1 = 1$ сек; $T_2 = 0,4$ сек и $T_3 = 0,1$ сек.

Передаточную функцию (7.18) можно синтезировать последовательным соединением двух RC-цепей, изображенных на рис. 7.6, б. При этом необходимо, чтобы первая цепь не нагружалась второй, т. е. выполнялось условие $|z_3 + z_4| \gg |z_2|$ (рис. 7.6, г). В этом случае (рис. 7.6, в)

$$W(s) = W_1(s) W_2(s) = \frac{T_3 s + 1}{T_1 s + 1} \cdot \frac{T_2 s + 1}{T_1 s + 1}, \quad (7.19)$$

где $T_1 = (R_1 + R_3)C_3 \approx (R_2 + R_4)C_2 = 1$ сек; $T_2 = R_2 C_2 = 0,4$ сек; $T_3 = R_3 C_3 = 0,1$ сек.

Условию $|z_3 + z_4| \gg |z_2|$ соответствует соотношение

$$\left| \frac{T_1 j\omega + 1}{C_3} \right| \gg \left| \frac{T_2 j\omega + 1}{C_2} \right|. \quad (7.20)$$

которое выполняется при $C_3 \gg C_2$ и $C_3 T_1 \gg C_2 T_2$. Учитывая это, задаем $C_3 = 4,0$ мкф, $C_2 = 0,5$ мкф. Затем находим:

$$R_2 = T_2 / C_2 = 0,8 \text{ Мом}; \quad R_3 = T_3 / C_3 = 25 \text{ ком};$$

$$R_1 = \frac{T_1}{C_3} - R_3 = 225 \text{ ком}; \quad R_4 = \frac{T_1}{C_2} - R_2 = 1,2 \text{ Мом}.$$

Подсчитав величины $C_3 T_1 = 4$ и $C_2 T_3 = 0,05$, убеждаемся в том, что $C_3 T_1 \gg C_2 T_3$. В соответствии со шкалой ГОСТ [6] окончательно выбираем $R_1 = 220$ ком, $R_2 = 820$ ком, $R_3 = 24$ ком, $R_4 = 1,2$ Мом, $C_2 = 0,5$ мкф, $C_3 = 4,0$ мкф.

Пример 7.2. Определим параметры корректирующей RC-цепи с передаточной функцией

$$W(s) = k(0) \frac{(T_1 s + 1)(T_{24} s + 1)}{(T_a s + 1)(T_b s + 1)}, \quad (7.21)$$

где $k(0) = 0,1$; $T_1 = 0,2$ сек; $T_{24} = 0,1$ сек; $T_a = 1$ сек; $T_b = 0,02$ сек.

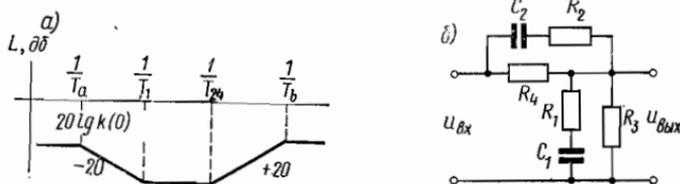


Рис. 7.7. Интегро-дифференцирующая RC-цепь

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика цепи изображена на рис. 7.7, а. Цепи с подобными характеристиками называются *интегро-дифференцирующими*.

Используем в качестве корректирующего устройства RC-цепь, показанную на рис. 7.7, б. Передаточная функция этой цепи

$$W(s) = \frac{k(0)(T_1 s + 1)(T_{24} s + 1)}{k(0)(T_1 T_{24} + \alpha T_2 T_{13}) s^2 + k(0)[T_1 + T_{24} + \alpha(T_2 + T_{13})] s + 1}, \quad (7.22)$$

где

$$k(0) = \frac{R_3}{R_3 + R_4}; \quad \alpha = \frac{R_4}{R_3}; \quad T_1 = R_1 C_1;$$

$$T_{13} = (R_1 + R_3) C_1; \quad T_2 = R_2 C_2; \quad T_{24} = (R_2 + R_4) C_2.$$

Из сопоставления (7.21) и (7.22) следует, что

$$T_a T_b = k(0)(T_1 T_{24} + \alpha T_2 T_{13}); \quad (7.23a)$$

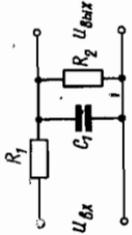
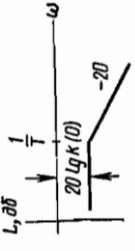
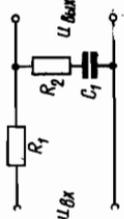
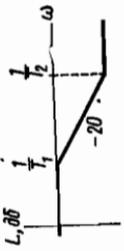
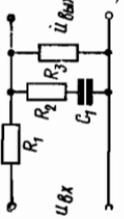
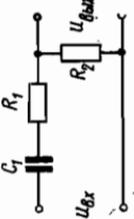
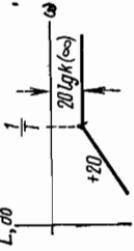
$$T_a + T_b = k(0)[T_1 + T_{24} + \alpha(T_2 + T_{13})]. \quad (7.23b)$$

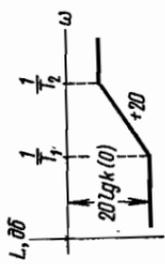
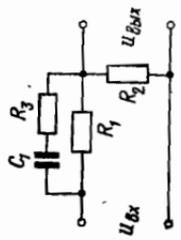
Пусть $R_3 = 0,1$ Мом, тогда $R_4 = 0,9$ Мом, $\alpha = 9$. Учитывая, что $T_b \ll T_a$ и $T_2 \ll T_{13}$, из (7.23б) находим

$$T_{13} \approx \frac{T_a - k(0)(T_1 + T_{24})}{\alpha k(0)} = 1,08 \text{ сек}. \quad (7.24)$$

Из равенства $T_{13} = (R_1 + R_3) C_1 = T_1 + R_3 C_1$ определяем емкость:

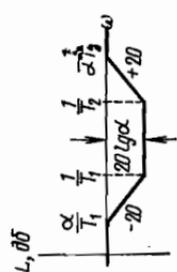
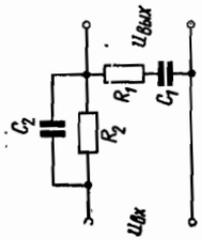
$$C_1 = (T_{13} - T_1) / R_3 = 8,8 \text{ мкф}.$$

Схема RC-цепи	Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика	Передающая функция
		$W(s) = \frac{k(0)}{Ts + 1},$ <p>где</p> $T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C_1; k(0) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$ <p>При $R_2 = \infty$ имеем $k(0) = 1$; $T = R_1 C_1$</p>
		$W(s) = \frac{T_2 s + 1}{T_1 s + 1},$ <p>где</p> $T_1 = (R_1 + R_2) C_1, T_2 = R_2 C_1$
		$W(s) = k(0) \frac{T_2 s + 1}{T_1 s + 1},$ <p>где</p> $T_1 = C_1 \left(R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \right) \quad T_2 = R_2 C_1; \quad k(0) = \frac{R_3}{R_1 + R_3}$
		$W(s) = \frac{\alpha Ts}{Ts + 1},$ <p>где</p> $T = (R_1 + R_2) C_1; \quad \alpha = k(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$



$$W(s) = k(0) \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}, \quad \text{где } k(0) = \frac{R_2}{R_1 + R_2};$$

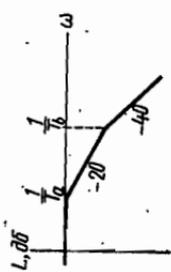
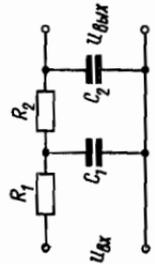
$$T_1 = (R_1 + R_2) C_1; \quad T_2 = C_1 \left(R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)$$



$$W(\alpha) = \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{\left(\frac{1}{\alpha} T_1 s + 1 \right) (\alpha T_2 s + 1)},$$

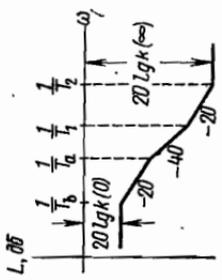
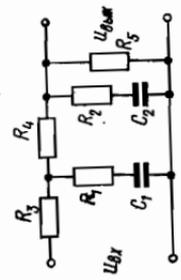
$$T_1 = R_1 C_1; \quad T_2 = R_2 C_2; \quad \alpha = \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad T_1 \gg T_2$$

где



$$W(s) = \frac{1}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2 + R_1 C_2) s + 1},$$

где $T_1 = R_1 C_1; T_2 = R_2 C_2.$
 При $R_1 C_2 \ll T_1 + T_2$ имеем $T_a = T_1, T_b = T_2$



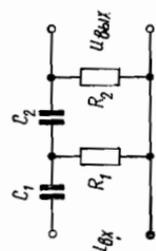
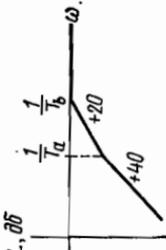
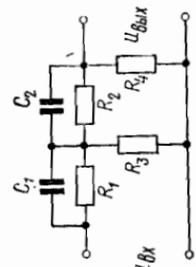
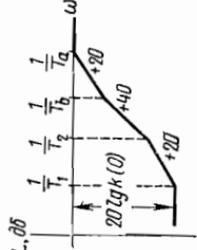
$$W(s) = k(0) \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{(T_b s + 1)(T_a s + 1)},$$

где

$$T_1 = R_1 C_1; \quad T_2 = R_2 C_2; \quad k(0) = \frac{R_5}{R_3 + R_4 + R_5}$$

При $R_3 \ll R_4; k(\infty) \ll k(0); R_2 \ll R_6$ имеем

$$T_b \approx T_2 + C_2 \frac{R_5(R_3 + R_4)}{R_3 + R_4 + R_5}; \quad T_a \approx T_1 + C_1 \frac{R_5(R_4 + R_5)}{R_3 + R_4 + R_5}$$

Схема RC-цепи	Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика	Передающая функция
		$W(s) = \frac{T_1 T_2 s^2}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2 + R_1 C_2) s + 1},$ <p>где $T_1 = R_1 C_1$; $T_2 = R_2 C_2$.</p> <p>При $R_1 C_2 \ll T_1 + T_2$ имеем $T_a = T_1$; $T_b = T_2$</p>
		$W(s) = k(0) \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{(T_b s + 1)(T_a s + 1)},$ <p>где</p> $T_1 = R_1 C_1; \quad T_2 = R_2 C_2;$ $k(0) = \frac{R_3 R_4}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_3(R_2 + R_4)}.$ <p>При $R_3 \ll R_2$ имеем</p> $T_b \approx C_2 \frac{R_2 R_4}{R_3 + R_4}; \quad T_a = C_1 \frac{R_1 R_3 R_4}{R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_3 R_4}$

На основании (7.23а) имеем

$$T_2 = \frac{T_a T_b - k(0) T_1 T_{24}}{\alpha k(0) T_{13}} = 0,0185 \text{ сек.} \quad (7.25)$$

Используя равенство $T_{24} = (R_2 + R_{24})C_2 = T_2 + R_4 C_2$, находим

$$C_2 = (T_{24} - T_2)/R_4 = 0,09 \text{ мкф.}$$

По найденным значениям C_1 , C_2 и T_2 определяем

$$R_1 = T_1/C_1 = 23 \text{ ком; } R_2 = T_2/C_2 = 0,2 \text{ Мом.}$$

Для практического исполнения корректирующей цепи удобно взять $C_1 = 10 \text{ мкф}$ и $C_2 = 0,1 \text{ мкф}$. В этом случае сопротивления резисторов цепи необходимо уменьшить примерно на 10%. В соответствии со шкалой ГОСТ [6] принимаем $R_1 = 20 \text{ ком}$, $R_2 = 180 \text{ ком}$, $R_3 = 91 \text{ ком}$, $R_4 = 820 \text{ ком}$.

Д и ф ф е р е н ц и р у ю щ и й т р а н с ф о р м а т о р. В некоторых случаях при введении в систему корректирующего устройства постоянного тока гальваническая связь в цепи этого устройства не допускается. В этих случаях можно воспользоваться дифференцирующим трансформатором [8], схема которого и логарифмическая частотная характеристика показаны на рис. 7.8.

Передаточная функция дифференцирующего трансформатора

$$W(s) = \frac{\alpha k_T T_1 s}{T s + 1}, \quad (7.26)$$

где $k_T = \omega_2/\omega_1$ — коэффициент трансформации; T_1 и T_2 — постоянные времени первичной и вторичной обмоток трансформатора, причем

$$T_1 = \frac{L_1}{r_1 + R_1}; \quad T_2 = \frac{L_2}{r_2 + R_2};$$

$$T = T_1 + T_2; \quad \alpha = \frac{R_H}{r_2 + R_H}.$$

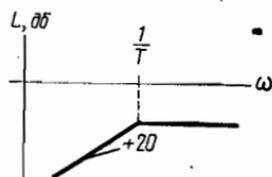
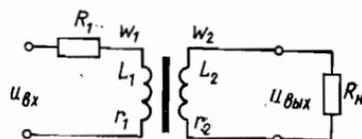


Рис. 7.8. Дифференцирующий трансформатор и его логарифмическая амплитудно-частотная характеристика

Тахо метри ческий мост.

При измерении скорости вращения якоря двигателя постоянного тока вместо тахогенератора возможно применение тахометрической мостовой схемы [8, 9], показанной на рис. 7.9. Тахомост постоянного тока используется обычно в цепи местной обратной связи и его выходное напряжение подается на вход электронного (полупроводникового) усилителя. Конденсатор C_ϕ служит фильтром для сглаживания пульсаций напряжения на коллекторе. В одно из плеч тахомоста включена цепь якоря двигателя с сопротивлением r_α . Если двигатель имеет последовательное возбуждение, то одним из плеч тахомоста могут служить дополнительные полюса и обмотка последовательного возбуждения.

Из схемы, показанной на рис. 7.9, а, следует, что в отклонениях

$$\Delta u_{\text{вых}} = \Delta u_\alpha - \Delta u_\beta. \quad (7.27)$$

Приращения напряжений $\Delta u_{я}$ и Δu_2 определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_{я} &= \Delta u_{вх} \frac{r_{я}}{r_3 + r_{я}} + \Delta e_{я} \frac{r_3}{r_3 + r_{я}}; \\ \Delta u_2 &= \Delta u_{вх} \frac{r_2}{r_1 + r_2}, \end{aligned} \right\} \quad (7.28)$$

где $\Delta e_{я} = f(\Phi_{в}, \Delta \omega_{д}) = 9,55 c_e \Delta \omega_{д}$ — э. д. с. вращения якоря двигателя, в.

Здесь $c_e = \Phi_{в} \frac{pN}{a \cdot 60} = \frac{U_{я.ном} - I_{я.ном} r_{я}}{n_{ном}}$ — конструктивная постоянная двигателя, в·мин/об; $\Phi_{в}$ — поток возбуждения, вб; p — число пар полюсов; N — число активных проводников якоря; a — число пар параллельных ветвей обмотки якоря; $\Delta \omega_{д}$ — приращение скорости вращения двигателя, рад/сек.

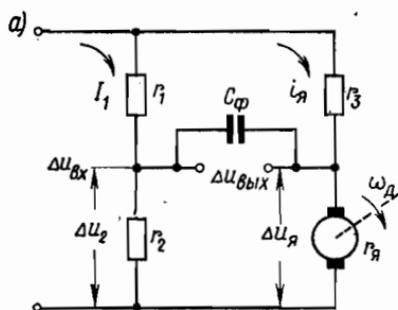
Очевидно, что $\Delta u_{вх}$ пропорционально э. д. с. якоря, а следовательно, и скорости вращения двигателя $\Delta \omega_{д}$ при

$$r_{я} / (r_3 + r_{я}) = r_{я} / (r_1 + r_2),$$

чему соответствует равенство

$$r_1 / r_2 = r_3 / r_{я}. \quad (7.29)$$

Выходное напряжение тахомоста при заторможенном якоря двигателя должно равняться нулю, что позволяет проверить выполнение соотношения (7.29).



Эквивалентная схема тахомоста показана на рис. 7.9, б, откуда

$$\Delta U_{\text{вых}}(s) = \frac{r_3}{r_3 + r_{я}} \cdot \frac{\Delta E_{я}(s)}{\left[\frac{r_3 r_{я}}{r_3 + r_{я}} + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right] C_{\phi} s + 1}. \quad (7.30)$$

Передаточная функция тахомоста

$$W_M(s) = \frac{\Delta U_{\text{вых}}(s)}{\Delta \omega_{д}(s)} = \frac{k_M}{T_{\phi} s + 1}, \quad (7.31)$$

$$\begin{aligned} \text{где } k_M &= 9,55 c_e \frac{r_3}{r_3 + r_{я}} = \\ &= 9,55 c_e \frac{r_1}{r_1 + r_2}, \quad \frac{\text{в} \cdot \text{сек}}{\text{рад}}; \end{aligned}$$

$$T_{\phi} = C_{\phi} \left[\frac{r_3 r_{я}}{r_3 + r_{я}} + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right], \quad \text{сек.}$$

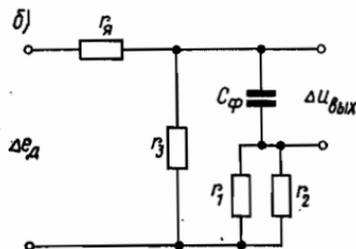


Рис. 7.9. Тахометрический мост

Пример 7.3. Определим параметры тахомоста постоянного тока для двигателя типа МН-250, который имеет независимое возбуждение и встроенный редуктор и предназначен для работы в реверсивно-импульсном режиме в счетно-решающих устройствах и следящих системах. Его основные технические характеристики: $U_{я.ном} = 27$ в; $I_{я.ном} = 0,65$ а; $P_{ном} = 17,5$ вт; $n_{ном} = 250$ об/мин; $r_{я} = 12$ ом.

По паспортным данным двигателя находим

$$c_e = \frac{U_{я. ном} - I_{я. ном} r_{я}}{n_{ном}} = \frac{27 - 0,65 \cdot 12}{250} = 0,078 \text{ в} \cdot \text{мин/об.}$$

Величины сопротивлений резисторов r_1 , r_2 и r_3 выбираем из условия малой дополнительной мощности, необходимой для управления двигателем. Полагая $I_1 \approx 0,1 \text{ а}$, выбираем $r_1 = 75 \text{ ом}$, $r_2 = 200 \text{ ом}$ типа ТВО-2 с номинальными мощностями рассеяния по 2 вт [6].

Коэффициент передачи тахомоста

$$k_M = 9,55 c_e \frac{r_1}{r_1 + r_2} \approx 0,2 \frac{\text{в} \cdot \text{сек}}{\text{рад}}.$$

Величину сопротивления резистора r_3 определяем из условия баланса моста при неподвижном якоре двигателя:

$$r_3 = \frac{r_1 r_{я}}{r_2} = 4,5 \text{ ом.}$$

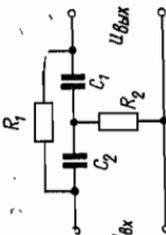
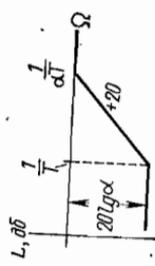
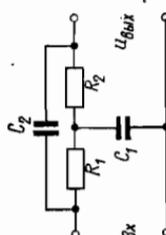
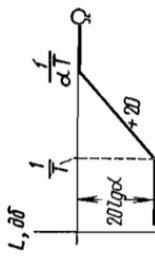
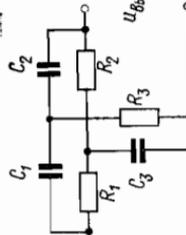
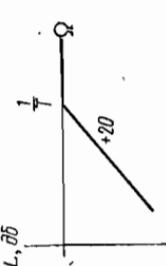
В качестве резистора r_3 выбираем регулируемый резистор типа ПЭВР-10, сопротивление которого равно 5,6 ом.

Недостатком тахометрического моста является малый коэффициент передачи k_M . Кроме того, при недостаточно хорошей балансировке на выходе моста помимо напряжения, пропорционального скорости вращения двигателя, появляется также составляющая, пропорциональная напряжению управления $u_{вх}$. Последнее обстоятельство при включении тахомоста в цепь местной обратной связи приводит к образованию в системе дополнительной (отрицательной или положительной) обратной связи по напряжению управления двигателя, что является нежелательным, так как эквивалентно введению еще одной обратной связи того или иного знака по угловому положению вала двигателя.

Корректирующие устройства переменного тока. Корректирующие RC-цепи на переменном токе применяются в тех случаях, когда для передачи информации в системе используется модулированное напряжение с несущей частотой ω_0 и частотой огибающей Ω . В качестве корректирующих RC-цепей на переменном токе обычно используются резонансные Т-образные фильтры, настроенные на частоту ω_0 . В табл. 7.2 приведены наиболее простые схемы Т-образных фильтров, их эквивалентные логарифмические частотные характеристики и эквивалентные передаточные функции относительно частоты огибающей Ω при условии $\Omega \ll \omega_0$ [5, 7, 8].

Корректирующие устройства переменного тока, выполняемые в виде резонансных цепей, обладают тем недостатком, что их динамические свойства существенно зависят от изменения несущей частоты ω_0 . Поэтому их можно рекомендовать для применения в системах, в которых обеспечивается стабилизация этой частоты.

Для исключения влияния изменений ω_0 корректирующие устройства в системах переменного тока часто выполняют в виде обычных цепей постоянного тока с предварительной демодуляцией модулированного сигнала синхронным детектором (демодулятором). При необходимости выходной сигнал корректирующего устройства снова преобразуется в модулированный с помощью модулятора. В подобных случаях

Схема RC-цепи	Эквивалентная логарифмическая амплитудно-частотная характеристика	Эквивалентная передаточная функция RC-цепи
		$W(s) = \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}, \quad \text{где } s = j\Omega;$ $T = R_1 C_1 \frac{2C_2}{C_1 + C_2}; \quad \alpha = \frac{R_2 (C_1 + C_2)}{R_1 C_1 + R_2 (C_1 + C_2)} < 1$
		$W(s) = \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}, \quad \text{где } s = j\Omega;$ $T = R_1 C_1 \frac{2R_2}{R_1 + R_2}; \quad \alpha = \frac{(R_1 + R_2) C_2}{R_1 C_1 + (R_1 + R_2) C_2} < 1$
		$W(s) = \frac{Ts}{Ts + 1}, \quad \text{где } s = j\Omega; \quad T = \frac{2}{A\omega_0};$ $\omega_0^2 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \cdot \frac{C_1 + C_2}{C_3};$ $A = \omega_0 [R_1 C_3 + (R_1 + R_2) C_2] =$ $= \omega_0 \left[R_1 C_3 + \frac{R_1 R_2 C_3 C_2}{R_3 (C_1 + C_2)} \right]$

корректирующие устройства рассчитываются так же, как и для непрерывной системы постоянного тока. Возможности коррекции системы указанным путем в некоторой степени ограничены тем, что на выходе синхронного детектора для сглаживания пульсаций необходимо включать сглаживающий фильтр, который вносит в систему дополнительную инерционность.

В системах переменного тока для коррекции применяются также специальные корректирующие устройства, содержащие ключевые элементы, прерываемые с частотой ω_0 [7]. Благодаря этому характеристики устройств мало зависят от изменений несущей частоты ω_0 .

Практическое исполнение корректирующих устройств с прерывателями, как правило, технически более сложно. Кроме того, они сильно искажают форму колебаний несущей частоты ω_0 , что приводит к необходимости применения дополнительных фильтров для сглаживания высших гармоник.

Тахометрические мосты переменного тока. В тех случаях, когда требуется измерение скорости вращения двигателя переменного тока, а применение тахогенератора по тем или иным причинам невозможно, целесообразно использовать специальные мостовые тахометрические схемы [10].

Общая схема тахомоста переменного тока подобна схеме тахомоста постоянного тока с тем отличием, что в данном случае плечи моста образованы реактивными элементами z_1, z_2, z_3, z_4 (рис. 7.10). В качестве плеча тахомоста z_4 используется обмотка управления асинхронного двигателя. Через z_0 и z_n на рисунке обозначены соответственно выходное сопротивление источника питания моста (например, усилителя мощности — электронного, магнитного) и сопротивление нагрузки тахомоста.

В случае баланса моста при заторможенном роторе двигателя имеем

$$z_1/z_2 = z_3/z_4. \quad (7.32)$$

Напряжение на нагрузке z_n пропорционально скорости вращения двигателя и, следовательно,

$$U_{\text{вых}}(s) = W_M(s) E_D(s), \quad (7.33)$$

где $E_D(s)$ — изображение э. д. с., наводимой в обмотке управления за счет вращения ротора;

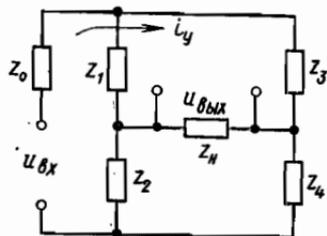


Рис. 7.10. Эквивалентная схема тахометрического моста с двигателем переменного тока

$$W_M(s) = \frac{z_H \left(z_4 \diamond \frac{z_0 z_2}{z_0 \diamond z_1 \diamond z_3} \right)}{\left(z_H \diamond \frac{z_1 z_2}{z_0 \diamond z_1 \diamond z_2} \right) \left(z_4 \diamond \frac{z_0 z_2}{z_0 \diamond z_1 \diamond z_3} \right) \diamond \left(z_3 \diamond \frac{z_0 z_1}{z_0 \diamond z_1 \diamond z_2} \right) \times \frac{1}{\times \left(z_H \diamond z_4 \diamond z_2 \frac{z_0 \diamond z_1}{z_0 \diamond z_1 \diamond z_3} \right)}, \quad (7.34)$$

откуда могут быть получены передаточные функции тахомоста для частных случаев при $z_0 = 0$ и $z_H = \infty$ (в записи $W_M(s)$ для упрощения оператор s при всех z опущен).

Рекомендуется следующим образом выбирать параметры плеч тахомоста переменного тока [10]. Сопротивления z_1 , z_2 и z_3 должны быть

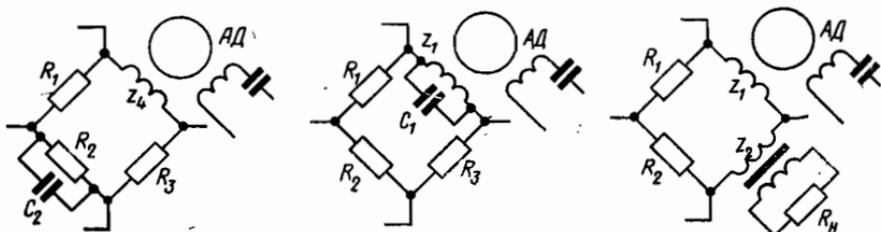


Рис. 7.11. Частотно-неуравновешенные тахометрические мосты

такими, чтобы на частоте питания двигателя ω_0 они потребляли от управляющего усилителя минимальную мощность; условием этого является выполнение неравенств

$$\left. \begin{aligned} |z_2(j\omega_0)| &\gg |z_1(j\omega_0)|; \\ |z_4(j\omega_0)| &\gg |z_3(j\omega_0)|. \end{aligned} \right\} \quad (7.35)$$

Обычно принимают

$$|z_3(j\omega_0)| \approx (0,05 \div 0,1) |z_4(j\omega_0)|.$$

На рис. 7.11 приведены варианты тахометрических мостов, предназначенных для измерения скорости асинхронного двигателя АД и содержащих один реактивный элемент. Такие тахомосты являются частотно-неуравновешенными, так как могут быть уравновешены лишь для одного значения частоты. В соответствии с условием (7.32) это значение должно совпадать с частотой питания асинхронного двигателя ω_0 . Применение частотно-неуравновешенных мостов практически ограничивается теми случаями, когда частота несущей ω_0 стабилизирована, а выходное напряжение управляющего усилителя не содержит высших гармоник. Если указанное условие не выполняется, то на выходе частотно-неуравновешенного моста образуются ложные составляющие напряжения основной и кратных частот, которые подавляют составляющую напряжения, пропорциональную скорости вращения двигателя.

От такого существенного недостатка свободны частотно-уравновешенные тахометрические мосты (рис. 7.12). Эти мосты содержат по два и более реактивных элемента. Параметры и число реактивных элементов мостов выбираются так, чтобы скомпенсировать нули и полюса операторного изображения $z_4(s)$ (сопротивления обмотки управления двигателя) нулями и полюсами операторных изображений сопротив-

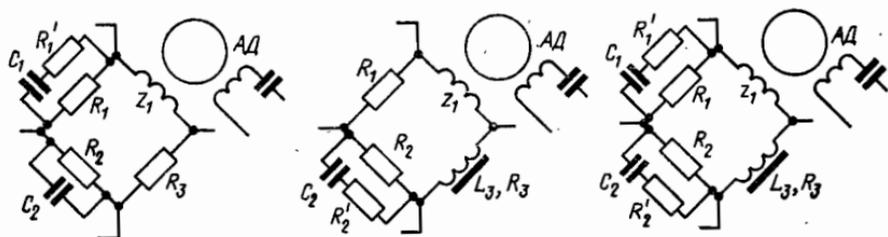


Рис. 7.12. Частотно-уравновешенные тахометрические мосты

лений z_1, z_2 и z_3 плеч моста. Выражение $z_4(s)$ необходимо рассчитывать, используя схему замещения двухфазного асинхронного двигателя [10]. Выполнению условий компенсации нулей и полюсов $z_4(s)$ физически эквивалентно отсутствие на выходе моста составляющих напряжения, пропорциональных управляющему напряжению $u_{вх}$ в случае, если частота этого напряжения изменяется в пределах $0 \leq \omega \leq \infty$. Практически достаточно, чтобы это условие выполнялось для диапазона частот, охватывающего несущую частоту ω_0 и кратные ей частоты гармоник, которые могут возникать из-за нелинейных искажений в управляющем усилителе.

Корректирующие устройства на основе операционного усилителя. В современных системах автоматического управления в качестве усилительных элементов широко используются операционные усилители постоянного тока. Схематическое изображение звена с операционным усилителем показано на рис. 7.13, а. Операционный усилитель представляет собой фазоинверсную систему с большим коэффициентом усиления в рабочей полосе частот входного сигнала. При основной схеме включения усилитель охватывается обратной связью параллельного типа. Очевидно, что эта связь является отрицательной. Коэффициент усиления в усилителе велик, что позволяет приближенно считать $\Delta u \approx 0$ и $i_{вх} \approx 0$,

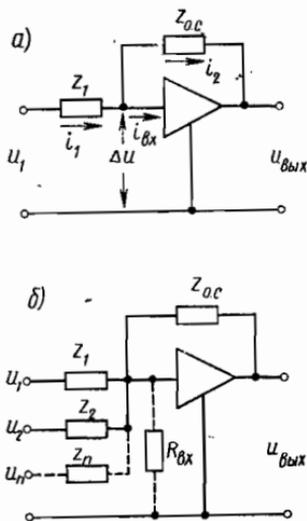


Рис. 7.13. Схемы включения операционного усилителя

а следовательно, — $i_1 \approx i_2$. При этих предположениях изображение напряжения на выходе усилителя

$$U_{\text{вых}}(s) = -\frac{z_{0.c}(s)}{z_1(s)} U_1(s). \quad (7.36)$$

Передаточная функция звена с операционным усилителем, как это следует из (7.36), определяется выбранными параметрами $z_{0.c}$ и z_1 :

$$W(s) = \frac{U_{\text{вых}}(s)}{U_1(s)} = -\frac{z_{0.c}(s)}{z_1(s)}. \quad (7.37)$$

Если $z_{0.c}$ и z_1 представляют собой активные сопротивления, то звено с операционным усилителем выполняет чисто усилительные функции, являясь моделью безынерционного звена. Используя в качестве $z_{0.c}$ и z_1 цепи, содержащие реактивные элементы, можно реализовать и другие модели динамических звеньев с заданной передаточной функцией [11].

На рис. 7.13, б показана схема включения операционного усилителя с несколькими входами. Нетрудно показать, что в этом случае

$$U_{\text{вых}}(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s) U_i(s), \quad (7.38)$$

где

$$W_i(s) = -z_{0.c}(s)/z_i(s). \quad (7.39)$$

Из рассмотренного видно, что операционные усилители можно использовать не только для усиления, но и для построения корректирующих устройств. Возможность образования у операционного усилителя дополнительных входов (до 5 ÷ 10) одновременно решает задачу точного суммирования сигналов.

При выполнении корректирующего устройства с применением операционного усилителя следует иметь в виду, что такое устройство представляет собой динамическую систему замкнутого типа, которая при неправильно выбранных параметрах может быть неустойчивой. Условия устойчивости зависят как от параметров $z_{0.c}$ и z_i , так и от характеристик усилителя. Анализ устойчивости звена с операционным усилителем удобно производить по частотным характеристикам разомкнутого состояния. Если разомкнуть цепь $z_{0.c}$ на выходе усилителя и предположить, что внутренние сопротивления источников входных сигналов равны нулю, то передаточную функцию разомкнутого устройства с усилителем можно представить как

$$W(s) = W_{\text{св}}(s) W_{0.y}^{(+)}(s), \quad (7.40)$$

где $W_{\text{св}}(s) = \left[1 + z_{0.c}(s) \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{z_i(s)} \right]^{-1}$ — передаточная функция цепи связи выхода усилителя со входом ($z_{n+1} = R_{\text{вх}}$ — входное сопротивление усилителя); $W_{0.y}^{(+)}(s)$ — передаточная функция операционного усилителя.

Знак «+» в записи $W_{0,y}^{(+)}(s)$ означает, что передаточная функция усилителя берется без учета его фазоинверсного свойства. Это позволяет использовать для анализа устойчивости звена с операционным усилителем обычные формулировки критериев устойчивости, применяемые при анализе систем автоматического управления.

Операционные усилители, как правило, строятся таким образом, что

$$W_{0,y}^{(+)}(s) = k/(T_{o,y}s + 1). \quad (7.41)$$

При этом для усилителя указываются коэффициент усиления на постоянном токе k , входное сопротивление $R_{вх}$ и частота среза f_c , при которой усиление падает до единицы. Постоянную времени $T_{o,y}$ можно найти из соотношения

$$T_{o,y} = k/(2\pi f_c). \quad (7.42)$$

Заменив в (7.41) s на $j\omega$, получим частотную характеристику усилителя, которая может быть использована для анализа устойчивости звена с операционным усилителем (см. гл. IV).

В табл. 7.3 приведены примеры динамических звеньев с одним входом, реализуемых с помощью операционного усилителя. При необходимости звенья можно выполнить с несколькими входами, включая на вход усилителя дополнительные цепи.

§ 7.4. Способы коррекции импульсных систем автоматического управления

Коррекция импульсных систем автоматического управления имеет свои отличительные особенности по сравнению с коррекцией непрерывных линейных систем. Эти особенности заключаются, во-первых, в более разнообразных способах и средствах введения корректирующих устройств и, во-вторых, в некоторых преимуществах в смысле получения особых динамических свойств замкнутой импульсной системы, а именно в возможности достижения путем коррекции конечной длительности переходных процессов [2, 3, 4]. Однако в некоторых случаях реализация корректирующих устройств в импульсных системах сложнее, чем в непрерывных системах при одинаковых показателях качества переходного процесса.

Коррекцию импульсных систем можно осуществить с помощью различных корректирующих устройств, которые по своему действию разделяются на непрерывные, дискретные и смешанные. Рассмотрим некоторые способы коррекции импульсной системы, структурная схема которой показана на рис. 7.14 [4]. На рис. 7.14 использованы следующие обозначения: $T_0 = \text{const}$ — период квантования; $H_0(s)$ — передаточная функция фиксирующего звена нулевого порядка; $W_1(s)$ — передаточная функция непрерывной части системы; g — входное воз-

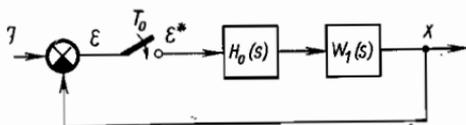
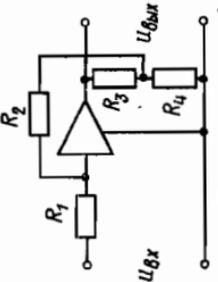
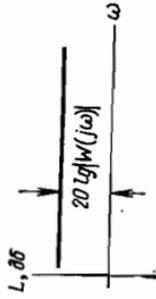
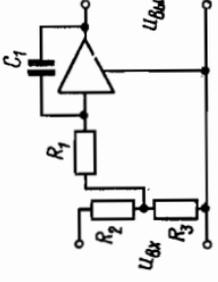
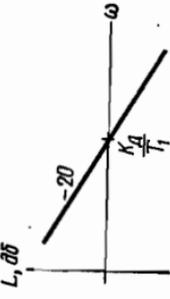
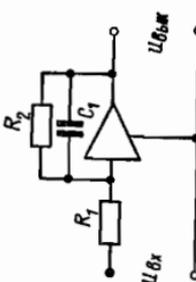
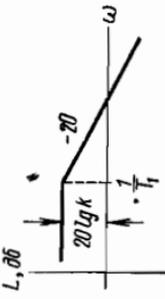
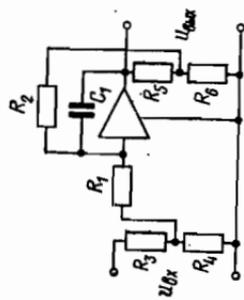
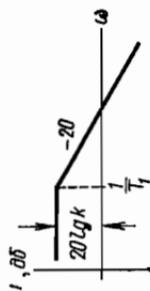


Рис. 7.14. Структурная схема импульсной системы автоматического управления

Схема включения операционного усилителя	Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика	Передаточная функция
		$W(s) = -\frac{R_2}{k_D R_1}, \text{ где } k_D = \frac{R_4}{R_3 + R_4 + \frac{R_3 R_4}{R_2}}.$ <p>При $\frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \ll R_2$ имеем $k_D = \frac{R_4}{R_3 + R_4}$.</p>
		$W(s) = -\frac{k_D}{T_1 s}, \text{ где } k_D = \frac{R_3}{R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}};$ <p>$T_1 = R_1 C_1$. При $\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \ll R_1$ значение $k_D = \frac{R_3}{R_2 + R_3}$.</p>
		$W(s) = -k \frac{1}{T_1 s + 1}, \text{ где } T_1 = R_2 C_1; k = \frac{R_2}{R_1}$

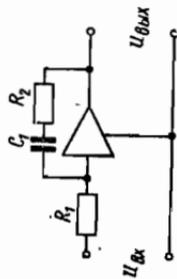
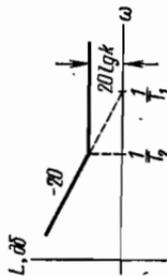
$$W(s) = - \frac{k}{1 - T_1 s + 1}, \quad \text{где } T_1 = R_2 C_1; \quad k = \frac{k_{\text{И1}}}{k_{\text{И2}}} \cdot \frac{R_2}{R_1};$$

$$k_{\text{И1}} = \frac{R_4}{R_3 + R_4 + \frac{R_4}{R_1}}; \quad k_{\text{И2}} = \frac{R_6}{R_5 + R_6 + \frac{R_6}{R_2}}$$



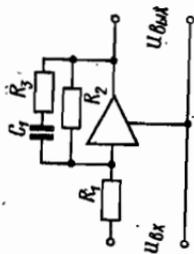
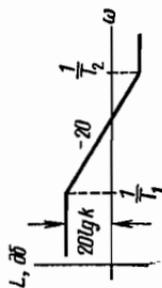
$$W(s) = - \frac{T_2 s + 1}{T_1 s} = - \left(k + \frac{1}{T_1 s} \right),$$

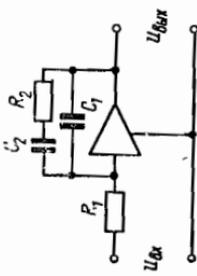
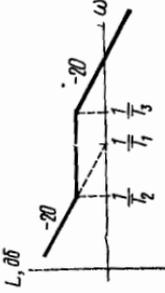
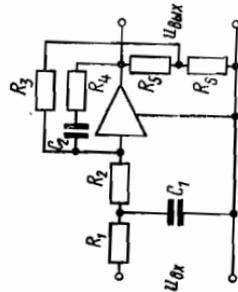
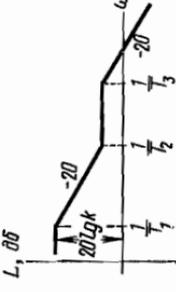
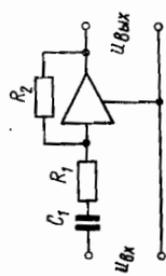
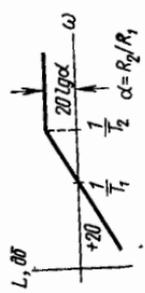
$$\text{где } T_1 = R_1 C_1; \quad T_2 = R_2 C_1; \quad k = \frac{R_3}{R_1}$$

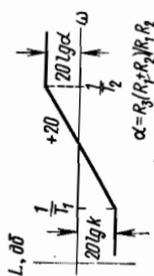
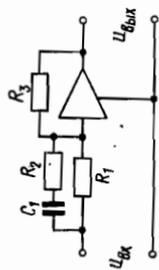


$$W(s) = -k \frac{T_2 s + 1}{T_1 s + 1}, \quad \text{где } k = \frac{R_3}{R_1};$$

$$T_1 = (R_2 + R_3) C_1; \quad T_2 = R_3 C_1$$



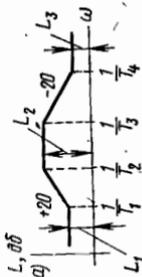
<p>Схема включения операционного усилителя</p>	<p>Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика</p>	<p>Передающая функция</p>
		$W(s) = -\frac{1}{T_1 s} \cdot \frac{T_2 s + 1}{T_3 s + 1},$ <p>где</p> $T_1 = R_1(C_1 + C_2); \quad T_2 = R_2 C_2; \quad T_3 = R_2 \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$
		$W(s) = -\frac{k(T_2 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_3 s + 1)}, \quad \text{где } k = \frac{R_3}{k_{\pi}(R_1 + R_2)};$ $T_1 = C_2 \left(\frac{1}{k_{\pi}} R_3 + R_4 \right); \quad T_2 = R_4 C_2; \quad T_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C_1.$ <p>здесь</p> $k_{\pi} = \frac{R_6}{R_5 + R_6 + \frac{R_6 R_6}{R_3}}$
		$W(s) = -\frac{T_1 s}{T_2 s + 1},$ <p>где $T_1 = R_2 C_1; \quad T_2 = R_1 C_1$</p>



$$W(s) = -k \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}, \quad \text{где } k = \frac{R_3}{R_1};$$

$$T_1 = (R_1 + R_2) C_1; \quad T_2 = R_2 C_1$$

V



$$W(s) = -k \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} \cdot \frac{T_4 s + 1}{T_3 s + 1}, \quad \text{где } k = \frac{R_3}{R_1};$$

$$T_1 = (R_1 + R_2) C_1; \quad T_2 = R_2 C_1; \quad T_3 = (R_3 + R_4) C_2;$$

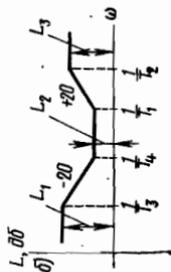
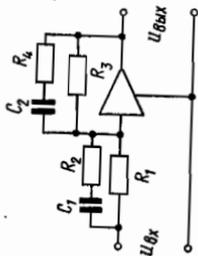
$$T_4 = R_4 C_2,$$

причем

$$L_1 = 20 \lg k, \quad L_3 = 20 \lg \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2};$$

а) $T_1 > T_3, \quad L_2 = 20 \lg R_3 \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2};$

б) $T_1 < T_3, \quad L_2 = 20 \lg \frac{R_3 R_4}{R_1 (R_3 + R_4)}$



действие и x — выходная величина, представляющие собой непрерывные величины; ε и ε^* — соответственно непрерывный и квантованный по времени сигналы ошибки.

Непрерывная коррекция импульсных систем. Способы непрерывной коррекции импульсных систем сводятся к коррекции непрерывной части системы $W_1(s)$ введением либо последовательных или параллельных корректирующих устройств, либо местной отрицательной или положительной обратной связи, в результате чего формируется передаточная функция скорректированной системы.

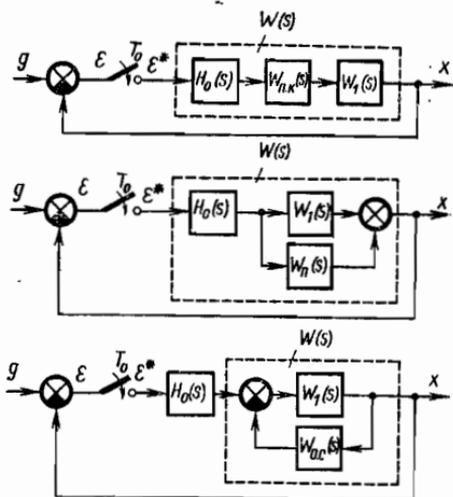


Рис. 7.15. Способы непрерывной коррекции импульсной системы автоматического управления

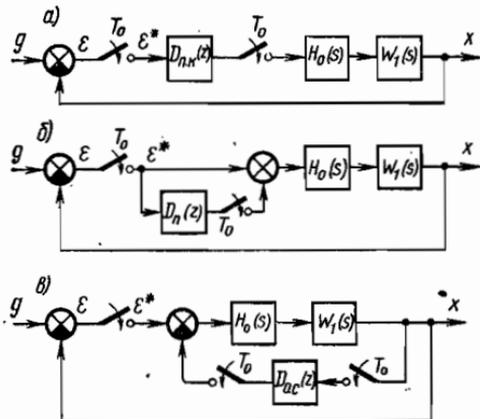


Рис. 7.16. Способы дискретной коррекции импульсной системы автоматического управления

Структурные схемы, поясняющие способы непрерывной коррекции импульсных систем, показаны на рис. 7.15. Сопоставив эти схемы со схемами, приведенными на рис. 7.1, можно сделать вывод, что рекомендации по выбору и включению корректирующих устройств для непрерывных систем (см. § 7.1) остаются также в силе и для импульсных систем.

Дискретная коррекция импульсных систем. При дискретной коррекции импульсных систем в качестве корректирующих устройств используются цифровые или импульсные фильтры. Соответствующие этим способам дискретной коррекции схемы показаны на рис. 7.16. В качестве дискретных корректирующих устройств могут быть применены цифровые вычислительные устройства и машины, а также импульсные — RC -цепи, представляющие собой сочетание пассивных RC -цепей и запоминающих устройств. Переходные или импульсные характеристики таких цепей при надлежащем выборе параметров близки к характеристикам дискретных корректирующих устройств (см. § 7.5.).

Дискретные передаточные функции разомкнутых систем, изображенных на рис. 7.16, имеют следующий вид:

в случае последовательной коррекции (рис. 7.16, а)

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_1(s)}{s} \right\} D_{п.к}(z); \quad (7.43)$$

в случае параллельной коррекции (рис. 7.16, б)

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_1(s)}{s} \right\} [1 + D_{п}(z)]; \quad (7.44)$$

в случае коррекции местной обратной связью (рис. 7.16, в)

$$W(z) = \frac{Z \left\{ \frac{W_1(s)}{s} \right\}}{1 + \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_1(s)}{s} \right\} D_{о.с}(z)}, \quad (7.45)$$

где $D_{п.к}(z)$, $D_{п}(z)$, $D_{о.с}(z)$ — дискретные передаточные функции соответственно для последовательной, параллельной коррекции и коррекции местной обратной связью.

Применение того или иного способа дискретной коррекции в каждом отдельном случае определяется стремлением получить наиболее простое корректирующее устройство. Окончательное решение принимается после рассмотрения и сравнения нескольких вариантов выполнения корректирующих устройств.

§ 7.5. Дискретные корректирующие устройства линейных импульсных систем

Дискретная коррекция линейных импульсных систем осуществляется при помощи цифровых вычислительных устройств и машин, устройств на элементах задержки, а также при помощи импульсных RC -цепей. Наиболее просто дискретные корректирующие устройства (см. рис. 7.16) реализуются с помощью импульсных RC -цепей. Различают три структуры импульсных RC -цепей: последовательную, с обратной связью и с каскадным соединением импульсных цепей первых двух структур.

В импульсных RC -цепях входная и выходная величины синхронно квантуются по времени, благодаря чему динамика таких цепей при определенных условиях аналогична динамике цифровых устройств [2, 3].

Последовательная импульсная RC -цепь. Структурная схема последовательной импульсной RC -цепи показана на рис. 7.17, где $H_0(s)$ — фиксирующее звено нулевого порядка; $W_1(s)$ — передаточная функция линейной (активной или пассивной) RC -цепи.

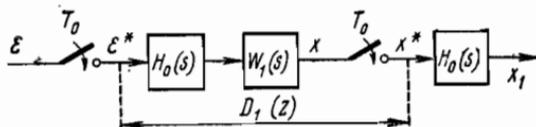


Рис. 7.17. Структурная схема последовательной импульсной RC -цепи

Дискретная передаточная функция корректирующего устройства

$$D_1(z) = Z \{H_0(s) W_1(s)\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_1(s)}{s} \right\}. \quad (7.46)$$

Предположим, что дискретная передаточная функция $D_1(z)$ определена в процессе расчета импульсной системы в следующем виде:

$$D_1(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i z}{z - z_i}, \quad (7.47)$$

где $m < n$ и полюса $z_i = e^{s_i T_0}$ находятся в пределах $0 < z_i \leq 1$.

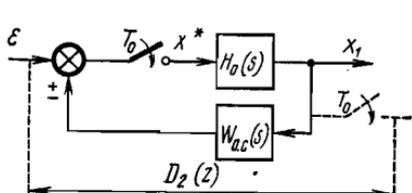


Рис. 7.18. Структурная схема дискретного корректирующего устройства с импульсной RC-цепью в обратной связи

С помощью (7.46) можно определить передаточную функцию $W_1(s)$, полюса которой $s_i < 0$, т. е. располагаются в левой полуплоскости комплексной плоскости. Имеем

$$\frac{W_1(s)}{s} = Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} D_1(z) \right\}. \quad (7.48)$$

По таблице z -преобразований, найдя для $\frac{z}{z-1} D_1(z)$ соответствие $\frac{W_1(s)}{s}$, определяем $W_1(s)$.

Импульсная RC-цепь с обратной связью. Структурная схема импульсной цепи изображена на рис. 7.18. Ее дискретная передаточная функция

$$D_2(z) = \frac{1}{1 \mp \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_{o.c}(s)}{s} \right\}}. \quad (7.49)$$

Если передаточная функция $D_2(z)$ выражается формулой (7.47) и удовлетворяет тем же условиям, что и в предыдущем случае, то найденная из выражения

$$\frac{W_{o.c}(s)}{s} = \mp Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} \left[\frac{1}{D_2(z)} - 1 \right] \right\} \quad (7.50)$$

передаточная функция $W_{o.c}(s)$ имеет отрицательные полюса и физически реализуется. Знак «+» в структуре соответствует отрицательной обратной связи, а знак «-» — положительной.

Каскадная импульсная RC-цепь. Если $D(z)$ представляет собой сложную, но рациональную функцию, для которой $m < n$, что соответствует условию ее физической реализуемости, и $\text{mod } z_i = \text{mod } e^{s_i T_0} \leq 1$, то в этих случаях $D(z)$ всегда может быть реализована структурой, показанной на рис. 7.19 и представляющей собой каскадное соединение двух рассмотренных выше структур импульсных цепей. Возможны и другие комбинации структур [2].

Чтобы определить передаточные функции $W_1(s)$ и $W_{o.c}(s)$, соответствующие физически реализуемым звеньям, необходимо найти все

нули и полюса дискретной передаточной функции корректирующего устройства $D(z)$, с тем чтобы выделить те нули и полюса, которые находятся вне круга единичного радиуса. Затем необходимо представить $D(z)$ следующим образом:

$$D(z) = D_1(z)D_2(z), \quad (7.51)$$

где $D_1(z)$ и $D_2(z)$ должны удовлетворять условию физической реализуемости. При этом все нули $D(z)$ вне интервала $0 < \text{mod } z_i \leq 1$ вносятся в $D_1(z)$, а все полюса $D(z)$ вне того же интервала относятся

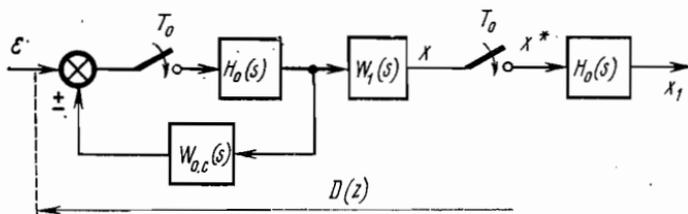


Рис. 7.19. Структурная схема каскадной импульсной RC-цепи

к $D_2(z)$. Определяя таким образом $D_1(z)$ и $D_2(z)$ и используя (7.48), (7.50) и таблицы z -преобразований, находим искомые функции $W_1(s)$ и $W_{o.c.}(s)$.

Пример 7.4. Определим параметры импульсной корректирующей RC-цепи с дискретной передаточной функцией:

$$D(z) = k \frac{z-d}{z-\alpha},$$

где $\alpha \ll 1$ и $d < 1$. Передаточная функция $D(z)$ соответствует передаточной функции импульсного пропорционально-дифференцирующего (ПД) элемента.

Реализуем корректирующее устройство по структуре с обратной связью. Примем обратную связь положительной. При этом по формуле (7.50) получаем

$$Z \left\{ \frac{W_{o.c.}(s)}{s} \right\} = \frac{z}{z-1} \left[1 - \frac{1}{D(z)} \right] = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{\left(z - \frac{kd-\alpha}{k-1} \right) z}{(z-1)(z-d)}.$$

Если выполнить условие $\frac{kd-\alpha}{k-1} = 1$, то

$$Z \left\{ \frac{W_{o.c.}(s)}{s} \right\} = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{z}{z-d}.$$

По таблице z -преобразований находим

$$\frac{W_{o.c.}(s)}{s} = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{s+a},$$

или

$$W_{o.c.}(s) = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{T_{o.c.} s}{T_{o.c.} s + 1}.$$

Величину $T_{o.c.}$ определяем из соотношения $d = e^{-aT_0} = e^{-T_0/T_{o.c.}}$.

Структурная схема корректирующего устройства, соответствующая найденной функции $W_{o.c}(s)$, изображена на рис. 7.20. В схеме используются дифференцирующая RC -цепь с постоянной времени $T_{o.c} = RC$, делитель с коэффициентом передачи $k_1 = \frac{k-1}{k} < 1$ и усилитель с коэффициентом передачи K , равным единице.

Пример 7.5. Определим параметры импульсной корректирующей RC -цепи с дискретной передаточной функцией $D(z) = z^{-1}$ [2].

Используем каскадную схему импульсной RC -цепи. По аналогии с (7.51),

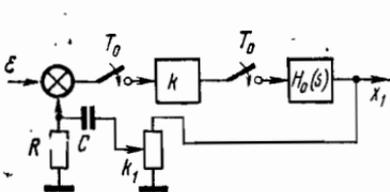


Рис. 7.20. Пример дискретного корректирующего устройства, выполненного по структуре с обратной связью

$$D(z) = z^{-1} = \frac{1}{z-d} \cdot \frac{z-d}{z}, \quad \text{где } 0 < d < 1.$$

Принимаем

$$D_1(z) = \frac{1}{z-d}, \quad D_2(z) = \frac{z-d}{z}.$$

В соответствии с (7.48) имеем

$$\begin{aligned} Z \left\{ \frac{W_1(s)}{s} \right\} &= \frac{z}{z-1} D_1(z) = \\ &= \frac{z}{(z-1)(z-d)} \cdot \frac{1-d}{1-d}. \end{aligned}$$

Если принять $d = e^{-aT_0} = e^{-T_0/T_1}$, то по таблице z -преобразований находим

$$W_1(s) = \frac{1}{1-d} \cdot \frac{a}{s+a} = \frac{1}{1-d} \cdot \frac{1}{T_1 s + 1}.$$

Найденная функция соответствует аperiodическому звену с коэффициентом передачи $k_1 = \frac{1}{1-d} > 1$ и постоянной времени $T_1 = RC$. На основании (7.50)

$$Z \left\{ \frac{W_{o.c}(s)}{s} \right\} = \frac{z}{z-1} \left[\frac{1}{D_2(z)} - 1 \right] = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{d}{z-d} \cdot \frac{1-d}{1-d}.$$

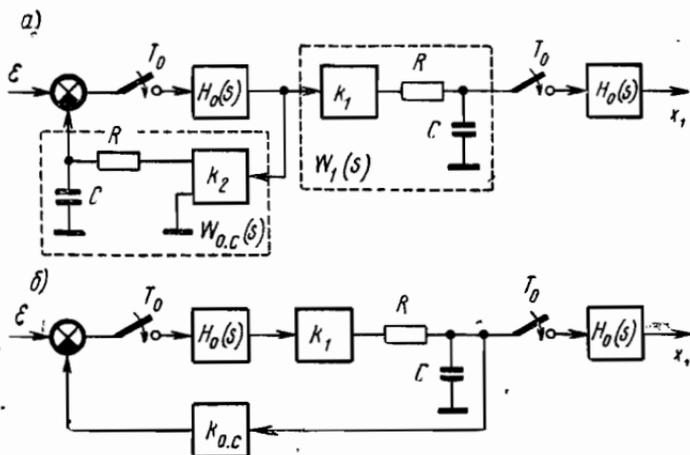


Рис. 7.21. Пример дискретного корректирующего устройства, выполненного по каскадной схеме

С помощью таблицы z-преобразований определяем

$$W_{0.c}(s) = \frac{d}{1-d} \cdot \frac{1}{T_{0.c} s \diamond 1} = \frac{d}{1-d} \cdot \frac{1}{T_1 s \diamond 1},$$

что также соответствует аperiodическому звену с той же постоянной времени, но с коэффициентом передачи $k_2 = \frac{d}{1-d} > 1$.

Структурная схема импульсной RC-цепи с заданной дискретной передаточной функцией изображена на рис. 7.21, а. Если звено $W_1(s)$ ввести в контур с отрицательной обратной связью, то реализация схемы упрощается (рис. 7.21, б). Во втором случае требуется только одно аperiodическое звено и один усилитель, в цепи же отрицательной обратной связи ставится делитель с коэффициентом передачи $k_{0.c} = d = e^{-T_0/T_1} < 1$.

Литература к главе VII

1. В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. Теория систем автоматического регулирования. «Наука», 1972.
2. Е. Д жури. Импульсные системы автоматического регулирования. Физматгиз, 1963.
3. Ю. Т. Ту. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. «Машиностроение», 1964.
4. С. М. Федоров, А. П. Литвинов. Автоматические системы с цифровыми управляющими машинами. «Энергия», 1965.
5. Корректирующие цепи в автоматике. Сб. статей под ред. М. З. Литвина - Седого. ИЛ, 1954.
6. П. Д. Верхопятницкий. Электрические элементы судовых радиоэлектронных и вычислительных устройств. «Судостроение», 1967.
7. Г. Ф. Зайцев. Коррекция систем автоматического управления постоянным и переменного тока. «Энергия», 1969.
8. В. И. Анисимов, А. А. Вавилов, А. В. Фатеев. Сборник примеров и задач по линейной теории автоматического регулирования. Госэнергоиздат, 1959.
9. А. В. Башарин, Ф. Н. Голубев, В. Г. Кепперман. Примеры расчетов автоматизированного электропривода. «Энергия», 1964.
10. Ф. Ф. Котченко. Следящие системы автоматических компенсаторов. «Недра», 1965.
11. Б. Я. Коган. Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования. Физматгиз, 1963.

РАСЧЕТ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ, ИНВАРИАНТНЫХ ДО ε

§ 8.1. Предварительные замечания

Применение методов теории инвариантности [1], т. е. использование в системе различных цепей, предназначенных для компенсации динамических ошибок (обусловленных возмущающими или управляющими воздействиями), открывает большие возможности повышения точности работы систем автоматического управления.

Если в системе управления выполняются условия абсолютной инвариантности относительно возмущающего воздействия, то выходная величина и ошибка в системе не зависят от этого возмущающего воздействия. Если в системе выполняются условия абсолютной инвариантности относительно управляющего воздействия, то ошибка в системе не зависит от управляющего воздействия.

В большинстве случаев в системе автоматического управления не удается реализовать условия абсолютной инвариантности относительно возмущающего или управляющего воздействия. Поэтому обычно осуществляются условия инвариантности до ε , позволяющие получить желаемые показатели качества системы регулирования.

При реализации инвариантных систем автоматического управления не устраняется переходная составляющая ошибки, обусловленная ненулевыми начальными условиями в системе.

Рассмотрим различные пути осуществления инвариантности относительно возмущающего и управляющего воздействий. Как показано в гл. III, изображение ошибки в системе управления

$$E(s) = E_f(s) + E_g(s) = \Phi_{ef}(s)F(s) + \Phi_{eg}(s)G(s), \quad (8.1)$$

где составляющая $E_f(s)$ обусловлена возмущающим воздействием, а составляющая $E_g(s)$ — управляющим воздействием. Передаточная функция системы по возмущению

$$\Phi_{ef}(s) = E_f(s)/F(s) = N_{ef}(s)/D_f(s)$$

и передаточная функция системы по управляющему воздействию

$$\Phi_{eg}(s) = E_g(s)/G(s) = N_{eg}(s)/D_g(s)$$

характеризуют инвариантную систему регулирования.

Выражение (8.1) позволяет определить следующие основные формы абсолютной инвариантности [1], когда вынужденные составляющие ошибок e_f или e_g равны нулю.

Первая форма инвариантности. Если $F(s) = 0$, то

$$E_f(s) = 0; \quad (8.2)$$

если $G(s) = 0$, то

$$E_g(s) = 0. \quad (8.3)$$

Эта форма инвариантности является тривиальной, так как соответствует случаю, когда возмущающее и управляющее воздействия равны нулю. Для следящих систем эта форма инвариантности практического значения не имеет, а для систем автоматической стабилизации она показывает возможность уменьшения ошибки при исключении отдельных возмущений, действующих на систему.

Вторая форма инвариантности. Если $\Phi_{ef}(s) = 0$, то

$$E_f(s) = 0 \quad (8.4)$$

и, следовательно, система инвариантна относительно возмущающего воздействия f . Если $\Phi_{eg}(s) = 0$, то

$$E_g(s) = 0 \quad (8.5)$$

и, следовательно, система инвариантна относительно управляющего воздействия g .

При реализации второй формы инвариантности в системе возможны два случая. В первом случае выполнение второй формы инвариант-

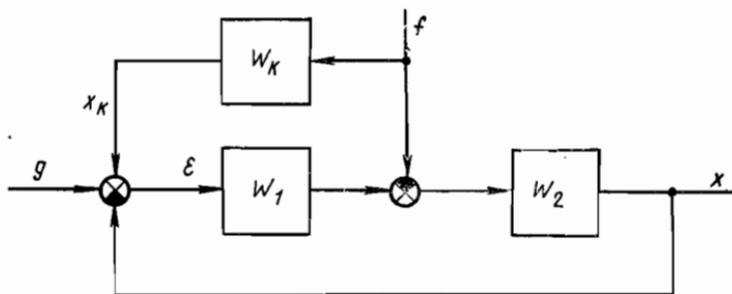


Рис. 8.1. Структурная схема комбинированной системы автоматического управления с компенсацией возмущения

ности обеспечивается тем, что полиномы в числителях передаточных функций $\Phi_{ef}(s)$ и $\Phi_{eg}(s)$ обращаются в нуль. При этом, если $N_{ef}(s) = 0$, то

$$E_f(s) = 0; \quad (8.6)$$

если $N_{eg}(s) = 0$, то

$$E_g(s) = 0. \quad (8.7)$$

Условия инвариантности в форме (8.6) или (8.7) выполняются в комбинированных системах автоматического управления, имеющих дополнительные каналы передачи возмущающего f или управляющего g воздействий.

В качестве иллюстрации на рис. 8.1 показана структурная схема комбинированной системы автоматического управления с компенса-

цией возмущающего воздействия f . Компенсирующая цепь с передаточной функцией

$$W_R(s) = X_R(s)/F(s) = N_R(s)/D_R(s)$$

предназначена для измерения и компенсации возмущающего воздействия.

Передаточная функция комбинированной системы относительно возмущающего воздействия

$$\Phi_{ef}(s) = [W_1(s)W_R(s) - 1]W_2(s)/[1 + W_1(s)W_2(s)]. \quad (8.8)$$

Абсолютная инвариантность относительно возмущающего воздействия достигается, если

$$W_1(s)W_R(s) - 1 = 0. \quad (8.9)$$

Условие абсолютной инвариантности (8.9) в большинстве случаев не может быть выполнено по двум причинам: из-за физической нереализуемости компенсирующей цепи W_R ; из-за ограничения мощности элементов системы управления. Однако при медленных изменениях f можно достигнуть хорошей компенсации возмущающего воздействия, т. е. выполнить условия инвариантности до ϵ .

Если на систему действует не одно, а несколько возмущающих воздействий, то реализация комбинированной системы усложняется, так как при этом появляется потребность в отдельных каналах для компенсации каждого из возмущающих воздействий.

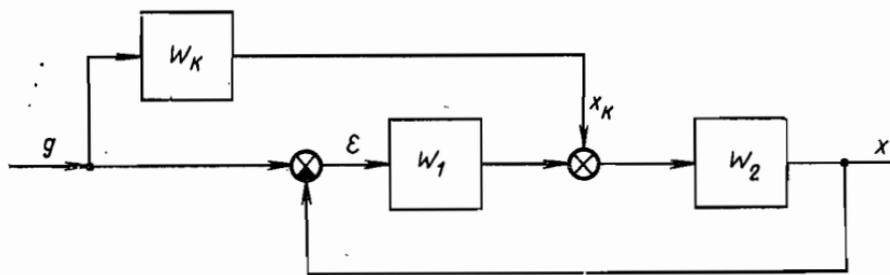


Рис. 8.2. Структурная схема комбинированной следящей системы

На рис. 8.2 показана структурная схема комбинированной следящей системы. Компенсирующая цепь служит для измерения управляющего воздействия и компенсации ошибки, обусловленной этим воздействием.

Передаточная функция комбинированной следящей системы относительно ошибки

$$\Phi_{eg}(s) = [1 - W_2(s)W_R(s)]/[1 + W_1(s)W_2(s)], \quad (8.10)$$

а условие абсолютной инвариантности выполняется при

$$W_2(s)W_R(s) - 1 = 0. \quad (8.11)$$

В комбинированной следящей системе условие абсолютной инвариантности (8.11) также обычно не выполняется. Однако за счет применения компенсирующих цепей W_K на входе реализуется условие инвариантности до ϵ , что позволяет значительно уменьшить установившуюся и переходную динамические ошибки в системе.

В комбинированных системах автоматического управления возмущающее и управляющее воздействия передаются по двум каналам, т. е. выполняется принцип двухканальности Б. Н. Петрова [2].

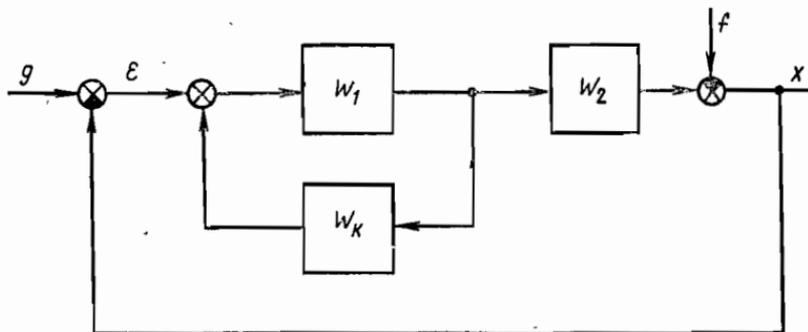


Рис. 8.3. Структурная схема системы с местной положительной обратной связью

Во втором случае реализация условий инвариантности может достигаться за счет того, что полиномы в знаменателях передаточных функций $\Phi_{ef}(s)$ и $\Phi_{eg}(s)$ обращаются в бесконечность. При этом, если $D_f(s) = \infty$, то

$$E_f(s) = 0; \quad (8.12)$$

если $D_g(s) = \infty$, то

$$E_g(s) = 0. \quad (8.13)$$

Реализация условий инвариантности в форме (8.12) или (8.13) осуществляется в системах управления по отклонению при бесконечно большом коэффициенте передачи разомкнутой системы [5]. В большинстве случаев условия абсолютной инвариантности в таких системах не могут быть выполнены, так как при больших коэффициентах передачи влияние малых параметров обуславливает неустойчивость системы.

В ряде случаев для увеличения коэффициента передачи системы вводятся местные положительные обратные связи (рис. 8.3). При этом передаточные функции системы относительно возмущающего и управляющего воздействия запишутся как

$$\Phi_{ef}(s) = \left[1 + \frac{W_1(s) W_2(s)}{1 - W_1(s) W_K(s)} \right]^{-1}; \quad (8.14)$$

$$\Phi_{eg}(s) = \left[1 + \frac{W_1(s) W_2(s)}{1 - W_1(s) W_K(s)} \right]^{-1}. \quad (8.15)$$

Условие абсолютной инвариантности

$$W_1(s) W_K(s) - 1 = 0 \quad (8.16)$$

в таких системах не может быть выполнено, так как при этом система оказывается негрубой к малым изменениям параметров и не может быть использована. Однако при помощи положительной обратной связи можно значительно увеличить точность работы системы в установившихся режимах, если выбирать ее параметры таким образом, чтобы малые изменения параметров не оказывали существенного влияния на работу системы.

Третья форма инвариантности. Эта форма инвариантности позволяет сформулировать условия, при которых установившееся значение вынужденной составляющей ошибки равно нулю только при определенном воздействии на систему.

Представим передаточные функции инвариантной системы в виде произведения:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{ef}(s) &= \Phi_{ef1}(s) K_f(s); \\ \Phi_{eg}(s) &= \Phi_{eg1}(s) K_g(s), \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

где $K_f(s) = 1/F(s)$ и $K_g(s) = 1/G(s)$.

Если при этом

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\Phi_{ef1}(s) = 0; \quad \lim_{s \rightarrow 0} s\Phi_{eg1}(s) = 0, \quad (8.18)$$

то установившаяся ошибка в системе при заданных воздействиях f и g равна нулю.

§ 8.2. Показатели качества инвариантных систем автоматического управления

Основным показателем качества систем автоматического управления, инвариантных до ϵ , является ошибка при обработке заданного воздействия на систему. Установившееся значение ошибки в системе при типовых воздействиях легко определяется по коэффициентам ошибок инвариантной системы управления [3], [6]. Разложив передаточную функцию инвариантной системы $\Phi_{ef}(s)$ в ряд по возрастающим степеням s (сходящийся при малых значениях s), можно получить изображение для ошибки, обусловленной возмущающим воздействием:

$$E_f(s) = F(s) \left(C_{0f} + C_{1f} \cdot s + \frac{1}{2!} C_{2f} s^2 + \frac{1}{3!} C_{3f} s^3 + \dots \right). \quad (8.19)$$

Коэффициенты ошибок, или, как их иногда называют, *коэффициенты инвариантности*, запишутся как

$$\left. \begin{aligned} C_{0f} &= \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_{ef}(s); \\ C_{1f} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [\Phi_{ef}(s) - C_{0f}]; \\ C_{2f} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} [\Phi_{ef}(s) - C_{0f} - s \cdot C_{1f}]; \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (8.20)$$

Аналогично можно получить изображение для ошибки системы по управляющему воздействию

$$E_g(s) = G(s) \left(C_{0g} + C_{1g} \cdot s + \frac{1}{2!} C_{2g} s^2 + \frac{1}{3!} C_{3g} s^3 + \dots \right), \quad (8.21)$$

которое также справедливо при малых s .

Коэффициенты ошибок, или коэффициенты инвариантности, в этом случае определяются с помощью следующих выражений:

$$\left. \begin{aligned} C_{0g} &= \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_{eg}(s); \\ C_{1g} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [\Phi_{eg}(s) - C_{0g}]; \\ C_{2g} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} [\Phi_{eg}(s) - C_{0g} - sC_{1g}]; \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (8.22)$$

Если задан порядок ν высшей производной воздействия на систему и величина этой производной, то установившаяся ошибка в инвариантной системе не будет больше заданного значения ϵ_∞ , если выполняются следующие условия:

для возмущающего воздействия

$$\left. \begin{aligned} C_{0f} = C_{1f} = \dots = C_{\nu-1, f} = 0; \\ \frac{C_{\nu f}}{\nu!} \leq \frac{\epsilon_{f\infty}}{f^{(\nu)}}; \end{aligned} \right\} \quad (8.23)$$

для управляющего воздействия

$$\left. \begin{aligned} C_{0g} = C_{1g} = \dots = C_{\nu-1, g} = 0; \\ \frac{C_{\nu g}}{\nu!} \leq \frac{\epsilon_{g\infty}}{g^{(\nu)}}. \end{aligned} \right\} \quad (8.24)$$

В этом случае инвариантная система управления эквивалентна (по значению установившейся ошибки) обыкновенной астатической системе с порядком астатизма, равным ν , и добротностью $k_{\nu f} = C_{\nu f}/\nu!$ или $k_{\nu g} = C_{\nu g}/\nu!$. Обычно при реализации инвариантных систем автоматического управления добиваются равенства нулю первых двух или трех коэффициентов инвариантности.

В ряде случаев при расчете инвариантных систем автоматического управления может быть задано максимальное значение динамической ошибки ϵ_{\max} при синусоидальном воздействии на систему $g = g_0 \sin \omega_0 t$. При этом параметры системы выбираются из условия

$$\epsilon_{\max} \leq \text{mod } \Phi_{eg}(j\omega_0) g_0. \quad (8.25)$$

Синусоидальное воздействие на систему может соответствовать реальному режиму работы или же являться эквивалентным синусоидальным воздействием при значениях ошибки ϵ_{\max} , скорости \dot{g}_{\max} и ускорения \ddot{g}_{\max} сигнала на входе системы [7].

В этом случае амплитуда и частота эквивалентного синусоидального воздействия запишутся как

$$g_0 = \dot{g}_{\max} / \omega_0; \quad \omega_0 = \ddot{g}_{\max} / \dot{g}_{\max}. \quad (8.26)$$

Оценка работы инвариантных систем по коэффициентам инвариантности, характеризующим установившуюся ошибку при заданном типовеом воздействии, или по максимальной ошибке при синусоидальном воздействии в большинстве случаев оказывается недостаточной, так как не гарантирует отсутствия недопустимо больших значений переходных динамических ошибок, слабого затухания, достаточного сглаживания помехи и т. д.

Установившиеся ошибки при том или ином характере воздействия, а также динамические свойства систем определяются путем анализа комбинированных следящих систем по логарифмическим частотным характеристикам [7]. Этот метод позволяет находить параметры компенсирующих цепей по заданной точности системы в установившемся режиме и заданному значению показателя колебательности

$$M = \max \operatorname{mod} \Phi_g(j\omega). \quad (8.27)$$

В ряде работ [8] при расчете систем, инвариантных до ε , за основу берется характер переходного процесса при скачкообразном изменении управляющего воздействия. При расчете систем автоматического управления обычно бывает полезно, а в ряде случаев и необходимо, знать не только установившиеся ошибки, но и максимальные значения динамических ошибок, время переходного процесса и другие показатели качества систем при скачкообразном изменении самого воздействия, а также при скачкообразных изменениях скорости или ускорения воздействия на систему. Такого вида воздействия наиболее близки к реальным воздействиям в системах приводов станков с программным управлением, следящих системах электромеханических вычислительных устройств, ряде силовых следящих систем и систем автоматической стабилизации.

В качестве иллюстрации показаны переходные процессы $x(t)$ и характер изменения ошибки $\varepsilon(t) = g(t) - x(t)$ в системе при отработке ступенчатого воздействия $g = g_0 \cdot 1(t)$ (рис. 8.4, а), отработке управляющего воздействия, изменяющегося с постоянными скоростью $g = \dot{g}_0 \cdot t$ (рис. 8.4, б) и ускорением $g = 0,5\ddot{g}_0 \cdot t^2$ без установившейся ошибки (рис. 8.4, в) и при наличии установившейся ошибки (рис. 8.4, г).

Из анализа кривых переходных процессов $x(t)$ и ошибок $\varepsilon(t)$ при различных сигналах на входе следует, что динамические свойства систем автоматического управления целесообразно характеризовать не видом реакции системы на то или иное воздействие, а видом динамической ошибки. В этом случае можно выбрать показатели качества, которые будут характеризовать систему при любом воздействии на нее. За такие показатели качества систем целесообразно принять максимальные значения установившейся ошибки

$$\varepsilon_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) \quad (8.28)$$

и переходной ошибки

$$\varepsilon_1 = \text{mod } \varepsilon(t_r), \quad (8.29)$$

а также время переходного процесса t_s , по истечении которого (при $t \geq t_s$) выполняется условие

$$\text{mod} [\varepsilon(t) - \varepsilon(\infty)] \leq 0,05\varepsilon_1. \quad (8.30)$$

Таким образом, максимальное значение динамической ошибки ε_1 равно первому максимальному отклонению выходной координаты системы от заданного значения, а время переходного процесса в системе t_s равно времени, по истечении которого ошибка в системе не превышает $\pm 5\%$ от своего максимального значения. Кроме основных показателей качества целесообразно в отдельных случаях знать максимальное значение второго отклонения выходной координаты

$$\varepsilon_2 = \text{mod } \varepsilon(t_p), \quad (8.31)$$

а также время t_r , при котором имеет место максимальное отклонение ε_1 , или время t_p , соответствующее отклонению ε_2 . В частном случае при скачкообразном изменении управляющего воздействия величина ε_2 характеризует перерегулирование $\sigma = (\varepsilon_2/\varepsilon_1) 100\%$, t_s — время регулирования, а t_p — время, при котором определяется перерегулирование.

Если определяющим показателем качества системы, инвариантной до ε , является максимальное значение динамической ошибки $\varepsilon_1 = \varepsilon_{\text{imax}}$, то параметры системы целесообразно выбирать таким образом, чтобы при заданном типовом воздействии на входе системы переходный процесс протекал за минимальное время $t_s = t_{s, \text{min}}$.

В тех случаях, когда максимальные значения динамических ошибок при типовых воздействиях не задаются, динамические свойства систем, инвариантных до ε , удобно характеризовать показателем колебательности [7].

Выбор параметров инвариантных систем с помощью линейных интегральных оценок

$$I_{00} = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) dt \quad (8.32)$$

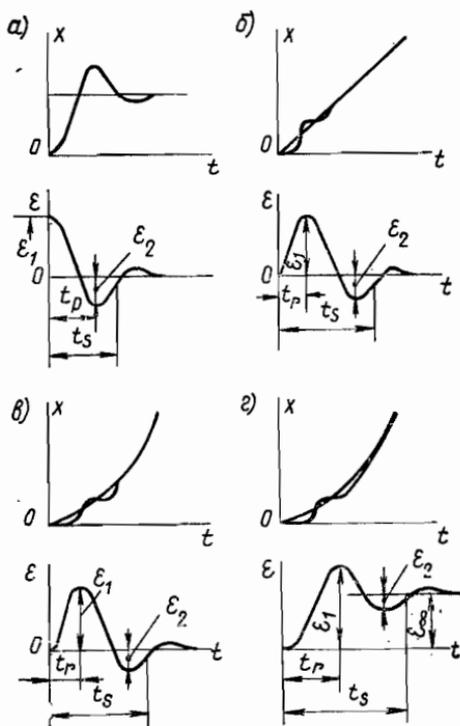


Рис. 8.4. Переходные процессы и характер изменения ошибки

или интегральных квадратичных оценок

$$I_{01} = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt \quad (8.33)$$

может приводить к слабому затуханию колебаний в системе.

Применение для оценки качества инвариантных систем улучшенных интегральных оценок

$$I_{0k} = \int_0^{\infty} [\varepsilon^2(t) + \tau_1^2 \dot{\varepsilon}^2(t) + \dots] dt \quad (8.34)$$

позволяет получить хороший переходный процесс в системе, но при этом оказывается весьма сложной связь между показателями качества и параметрами системы, что значительно усложняет расчет системы.

В зависимости от назначения и условий работы системы определяющими являются те или иные из рассмотренных показателей качества. Однако в большинстве случаев параметры инвариантной системы целесообразно выбирать таким образом, чтобы время переходного процесса было минимальным при заданном максимальном значении динамической ошибки.

§ 8.3. Связь между показателями качества и параметрами инвариантных систем автоматического управления

Из-за большого числа возможных вариантов систем с компенсацией динамических ошибок нельзя в общем виде установить связь между параметрами компенсирующих цепей, системы и показателями качества. Поэтому вместо системы с компенсацией динамических ошибок $\varepsilon(t)$ рассматриваются эквивалентные им системы с единичной обратной связью [7]:

$$\Phi_{\varepsilon_0}(s) = [1 + W_0(s)]^{-1} = \Phi_{\varepsilon_K}(s), \quad (8.35)$$

которые имеют в разомкнутом состоянии передаточную функцию $W_0(s)$. При этом выбираются параметры эквивалентной системы, удовлетворяющей заданным показателям качества, и определяются структурная схема и параметры системы с любой схемой компенсации динамических ошибок.

Если ограничить класс рассматриваемых систем минимально-фазовыми системами, то в качестве желаемых целесообразно взять системы с типовыми передаточными функциями или типовыми логарифмическими амплитудными характеристиками разомкнутой системы. В этом случае вместо бесчисленного множества возможных характеристик систем, инвариантных до ε , можно иметь дело с конечным числом типовых характеристик.

В качестве типовых логарифмических амплитудных характеристик целесообразно взять характеристики 2-1-2, 2-1-3, 3-1-2 и 3-1-3 (рис. 8.5).

Каждая из них характеризуется порядком астатизма системы ν , базовой частотой ω_0 или добротностью k_ν :

$$\omega_0 = \sqrt[\nu]{k_\nu}, \quad k_\nu = \omega_0^\nu, \quad (8.36)$$

параметрами

$$\alpha = \omega_2/\omega_c, \quad \beta = \omega_3/\omega_c, \quad (8.37)$$

а также наклоном логарифмической амплитудной характеристики в области высоких частот $-20\mu_1 \text{ дБ/дек}^{-1}$, где $\mu_1 = 2, 3$.

Частота среза системы ω_c связана с базовой частотой ω_0 , добротностью k_ν и параметром α соотношением

$$\omega_c = \omega_0 \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}} = \sqrt[\nu]{k_\nu/\alpha^{\nu-1}}. \quad (8.38)$$

Передаточная функция разомкнутой эквивалентной системы с типовыми характеристиками

$$W_a(s) = \frac{k_\nu (1 + T_2 s)^{\nu-1}}{s^\nu (1 + T_3 s)^{\mu-1}}. \quad (8.39)$$

Передаточные функции замкнутой эквивалентной системы с единичной обратной связью относительно выходной величины и ошибки запишутся соответственно как

$$\Phi_a(s) = \frac{k_\nu (1 + T_2 s)^{\nu-1}}{s^\nu (1 + T_3 s)^{\mu-1} + k_\nu (1 + T_2 s)^{\nu-1}}; \quad (8.40)$$

$$\Phi_{ez}(s) = \frac{s^\nu (1 + T_3 s)^{\mu-1}}{s^\nu (1 + T_3 s)^{\mu-1} + k_\nu (1 + T_2 s)^{\nu-1}}, \quad (8.41)$$

где

$$T_2 = 1/(\alpha\omega_c); \quad T_3 = 1/(\beta\omega_c); \quad k_\nu = \omega_c^\nu \cdot \alpha^{\nu-1}.$$

Номограммы для анализа и синтеза систем автоматического управления, инвариантных до ε . В отличие от номограмм Г. Честната и Р. Майера [9] номограммы, приведенные ниже [10], позволяют производить анализ и синтез систем с астатизмом второго и третьего порядков при скачкообразных изменениях не только управляющего воздействия g , но также скорости \dot{g} и ускорения \ddot{g} управляющего воздействия. Номограммы построены для фиксированных значений $\beta = 1, 2, 4, \text{ и } 8$, а показатели качества системы определяются в зависимости от величины α .

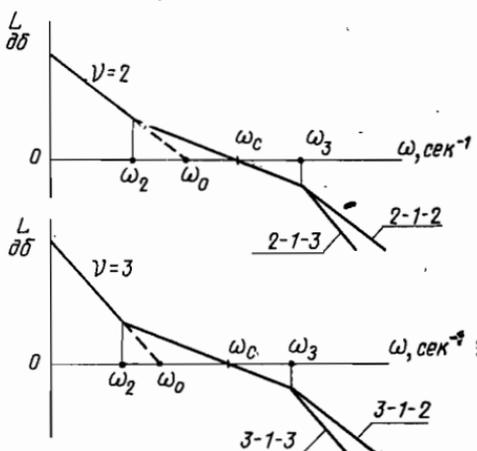


Рис. 8.5. Типовые логарифмические амплитудные характеристики

На рис. 8.6 и 8.7 показаны номограммы, связывающие показатели качества систем при скачкообразном изменении управляющего воздействия с параметрами типовых систем. Зависимости $\eta_{p1} = \varepsilon_2/g_0 = F_{p1}(\alpha, \beta)$ и $M = F_M(\alpha, \beta)$ позволяют найти величину ошибки

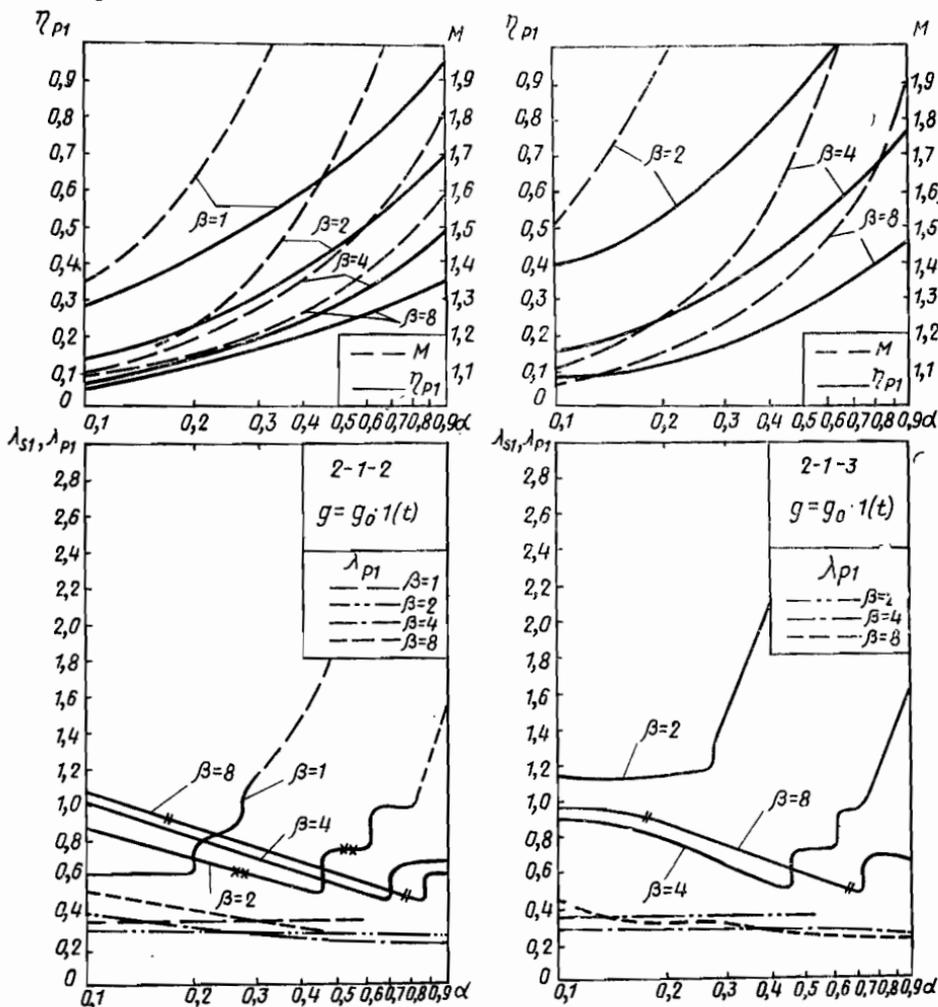


Рис. 8.6. Номограммы для синтеза систем с характеристиками типа 2-1-2 и 2-1-3 при скачкообразном изменении управляющего воздействия

$\varepsilon_2 = \eta_{p1} g_0$ или величину перерегулирования $\sigma\% = \eta_{p1} 100\%$ и показатель колебательности системы M . С помощью кривых

$$\lambda_{s1} = \omega_c t_s / 10 = f_{s1}(\alpha, \beta); \lambda_{p1} = \omega_c t_{p1} / 10 = f_{p1}(\alpha, \beta)$$

определяется время переходного процесса:

$$t_s = 10\lambda_{s1} / \omega_c$$

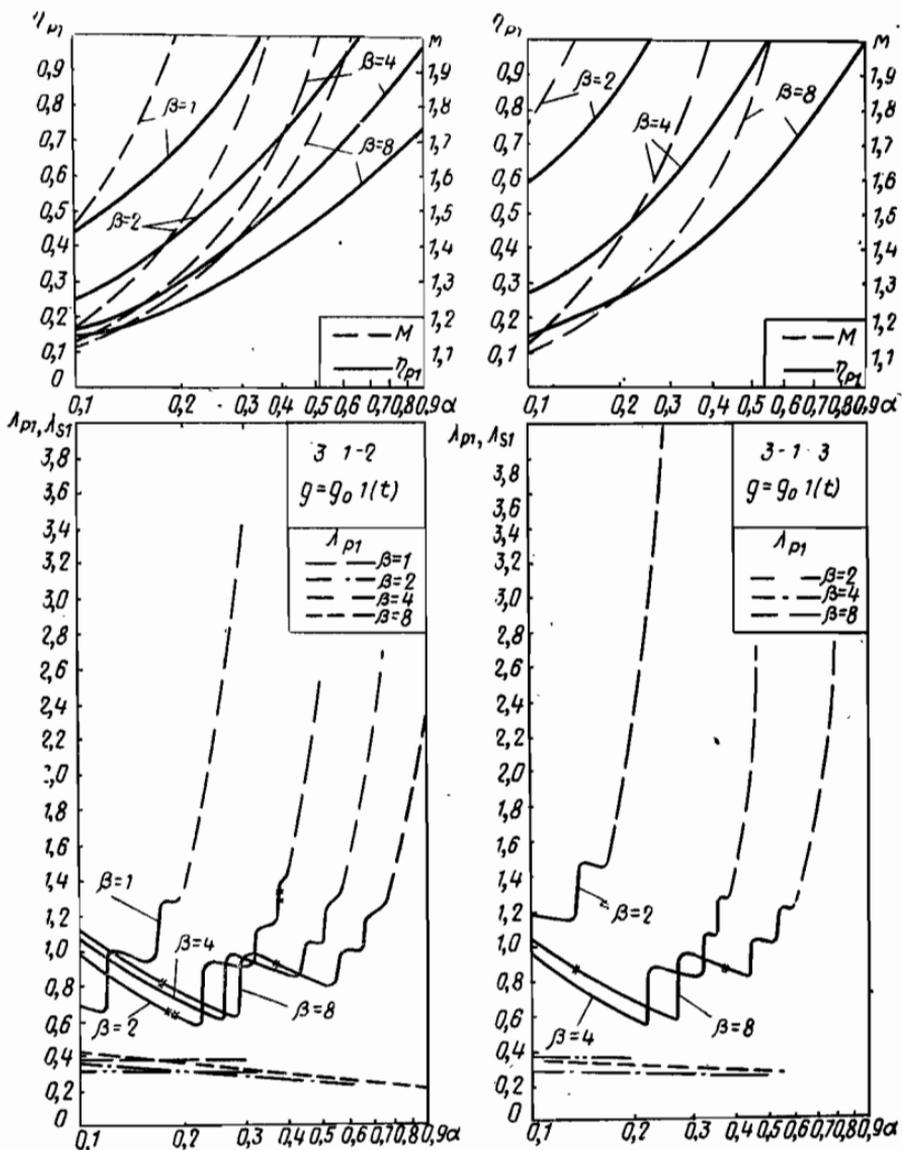


Рис. 8.7. Номограммы для синтеза систем с характеристиками типа 3-1-2 и 3-1-3 при скачкообразном изменении управляющего воздействия

и время, при котором ошибка равна ε_2 :

$$t_{p1} = 10\lambda_{p1}/\omega_c.$$

На рис. 8.8 и 8.9 показаны номограммы, связывающие показатели качества систем при скачкообразном изменении скорости управляющего воздействия с параметрами типовых систем.

На верхних номограммах показаны зависимости

$$\eta_{r2} = \omega_c \varepsilon_1 / g_0 = F_{r2}(\alpha, \beta); \quad \eta_{p2} = \omega_c \varepsilon_2 / g_0 = F_{p2}(\alpha, \beta),$$

позволяющие определить по заданным значениям скачка скорости \dot{g}_0 и частоте среза системы ω_c ошибки:

$$\varepsilon_1 = (\eta_{r2}/\omega_c) \dot{g}_0 = \eta_{r2}^* \dot{g}_0;$$

$$\varepsilon_2 = (\eta_{p2}/\omega_c) \dot{g}_0 = \eta_{p2}^* \dot{g}_0.$$

На нижних номограммах показаны зависимости

$$\lambda_{s2} = \omega_c t_{s2}/10 = f_{s2}(\alpha, \beta);$$

$$\lambda_{r2} = \omega_c t_{r2}/10 = f_{r2}(\alpha, \beta),$$

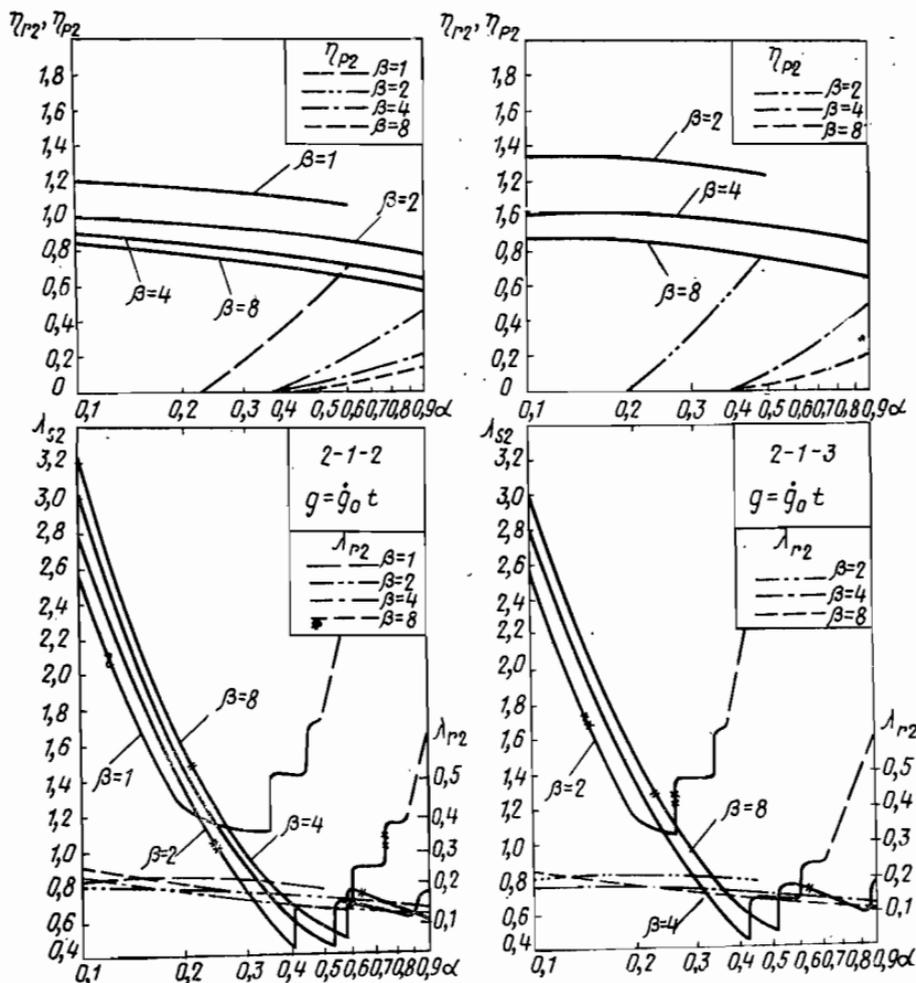


Рис. 8.8. Номограммы для синтеза систем с характеристиками типа 2-1-2 и 2-1-3 при скачкообразном изменении скорости воздействия

на основании которых определяется время переходного процесса:

$$t_{s2} = 10\lambda_{s2}/\omega_c$$

и время, при котором ошибка равна ε_1 :

$$t_{r2} = 10\lambda_{r2}/\omega_c.$$

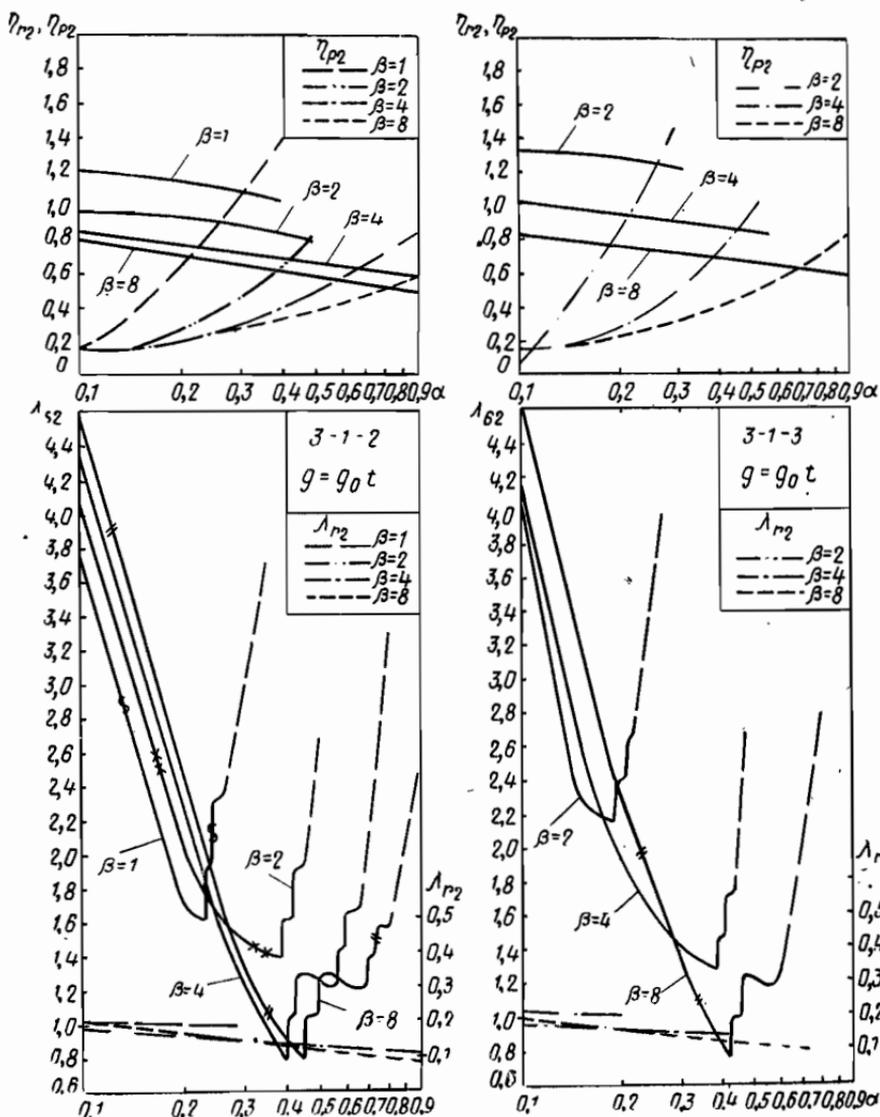


Рис. 8.9. Номограммы для синтеза систем с характеристиками типа 3-1-2 и 3-1-3 при скачкообразном изменении скорости воздействия

На рис. 8.10 и 8.11 приведены номограммы для анализа и синтеза систем при скачкообразном изменении ускорения управляющего воздействия. Зависимости

$$\eta_{r3} = \omega_c^2 \varepsilon_1 / \ddot{g}_0 = F_{r3}(\alpha, \beta); \quad \eta_{p3} = \omega_c^2 \varepsilon_2 / \ddot{g}_0 = F_{p3}(\alpha, \beta)$$

позволяют по заданному значению скачка ускорения \ddot{g}_0 и частоте среза ω_c определить ошибки:

$$\varepsilon_1 = (\eta_{r3} / \omega_c^2) \ddot{g}_0 = \eta_{r3}^* \ddot{g}_0; \quad \varepsilon_2 = (\eta_{p3} / \omega_c^2) \ddot{g}_0 = \eta_{p3}^* \ddot{g}_0.$$

Кроме того, на верхних номограммах (см. рис. 8.10) для систем с типовыми характеристиками 2-1-2 и 2-1-3 показаны зависимости

$$\eta_{\infty} = \omega_c^2 \varepsilon_{\infty} / \ddot{g}_0 = F_{\infty}(\alpha, \beta),$$

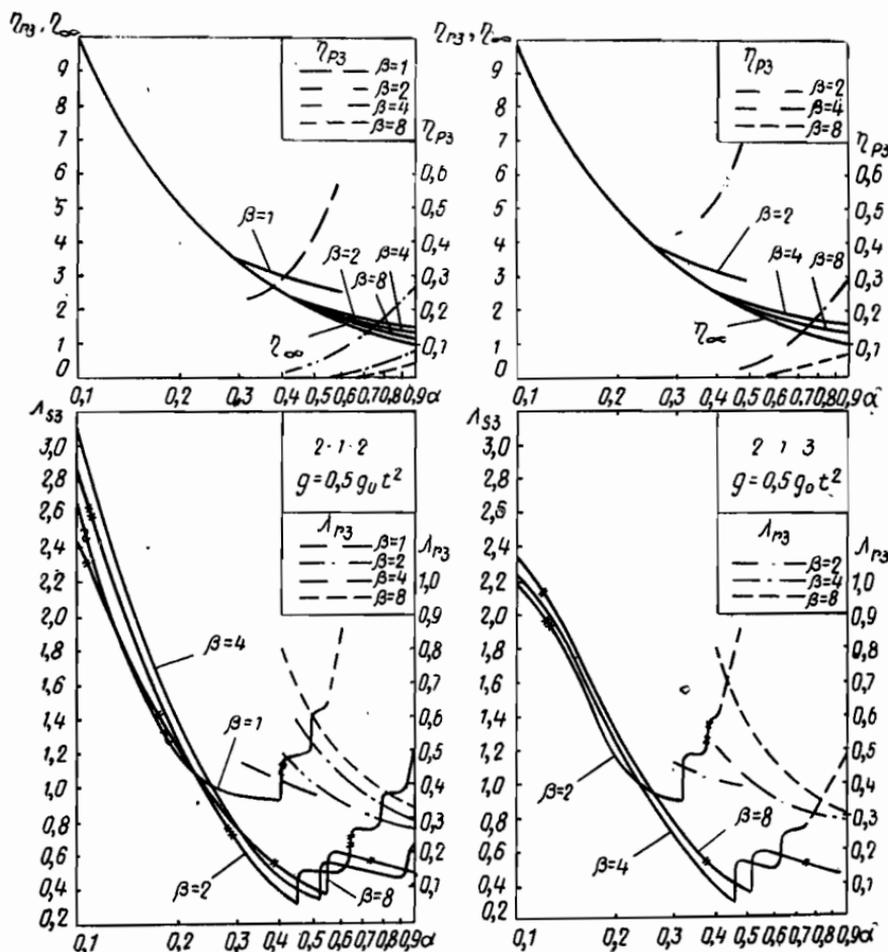


Рис. 8.10. Номограммы для синтеза систем с характеристиками типа 2-1-2 и 2-1-3 при скачкообразном изменении ускорения воздействия

характеризующие величину установившейся ошибки

$$\varepsilon_{\infty} = (\eta_{\infty} / \omega_c^2) \ddot{g}_0 = \eta_{\infty}^* \ddot{g}_0$$

при обработке управляющего воздействия с постоянным ускорением.

На нижних номограммах (см. рис. 8.10 и 8.11) показаны зависимости

$$\lambda_{s3} = \omega_c t_{s3} / 10 = f_{s3}(\alpha, \beta); \quad \lambda_{r3} = \omega_c t_{r3} / 10 = f_{r3}(\alpha, \beta),$$

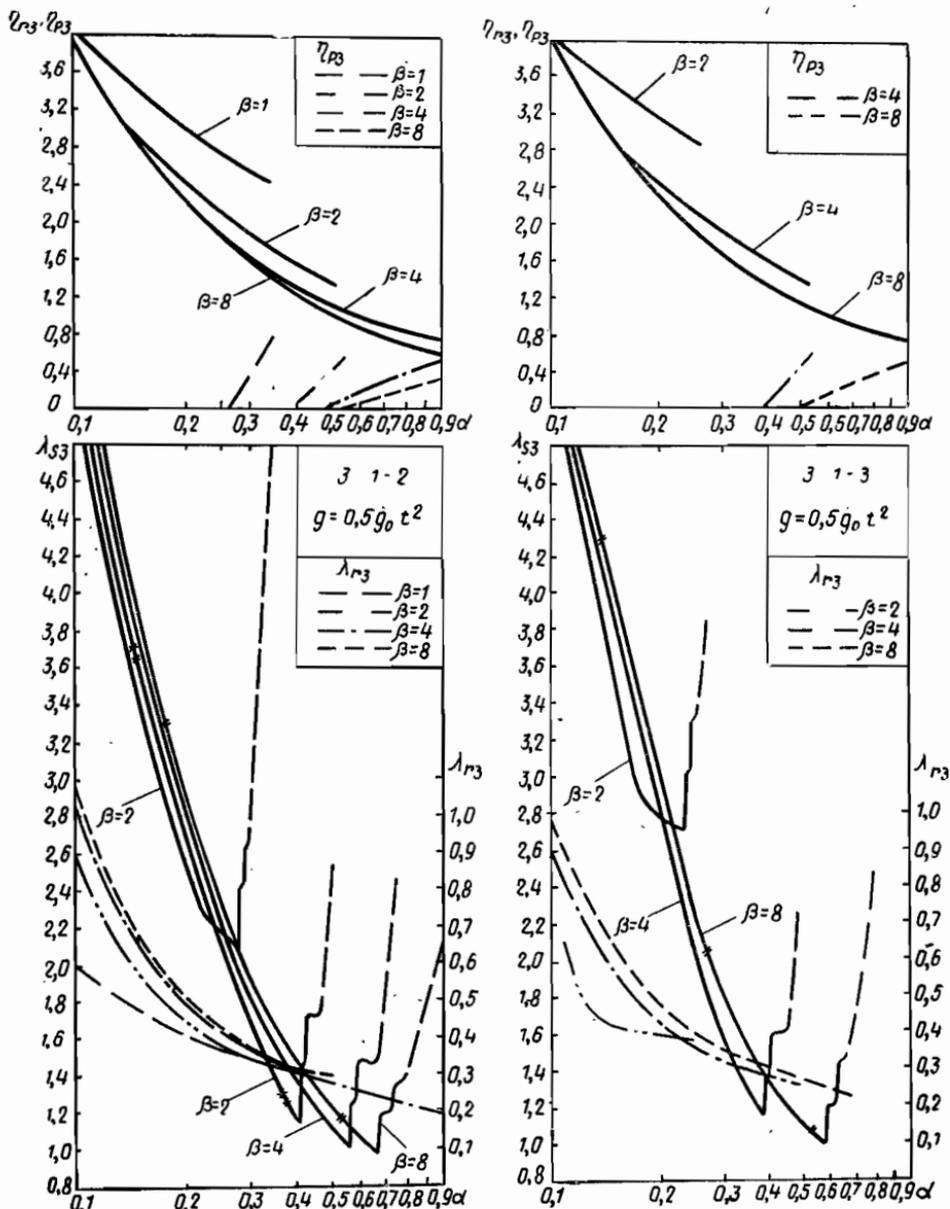


Рис. 8.11. Номограммы для синтеза систем с характеристиками типа 3-1-2 и 3-1-3 при скачкообразном изменении ускорения воздействия

определяющие время переходного процесса:

$$t_{s3} = 10\lambda_{s3}/\omega_c$$

и время, при котором ошибка равна ϵ_1 :

$$t_{r3} = 10\lambda_{r3}/\omega_c.$$

Скачкообразные изменения λ на номограммах обусловлены изменениями времени переходного процесса на половину периода. В области больших значений β зависимости $\lambda_s = f(\alpha, \beta)$ изображены штриховой линией.

Номограммы для анализа и синтеза желаемых характеристик систем с минимальным временем переходного процесса при заданном значении максимальной динамической ошибки. Для синтеза желаемой характеристики эквивалентной системы с минимальным временем переходного процесса при заданном значении динамиче-

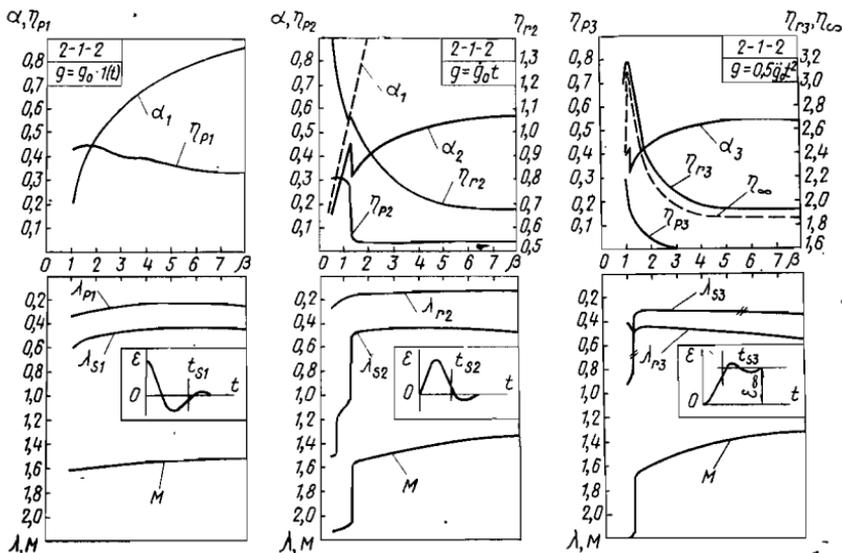


Рис. 8.12. Номограммы для синтеза систем с характеристиками типа 2-1-2 с минимальным временем переходного процесса

ской ошибки можно воспользоваться соответствующими номограммами (рис. 8.6 ÷ 8.11) и найти такие значения α и β , при которых λ_{s1} , λ_{s2} и λ_{s3} имеют минимальные значения, что обеспечивает время переходного процесса, близкое к минимальному. Однако оптимальные параметры могут быть выбраны и при других значениях β . Поэтому были проведены дополнительные исследования типовых систем на аналоговой вычислительной машине.

На рис. 8.12 ÷ 8.15 приведены специальные номограммы для синтеза систем автоматического управления, инвариантных до ϵ , с минимальным временем переходного процесса при заданном значении ошибки. Номограммы позволяют для каждой из типовых систем определить при заданных значениях β и характере изменения управляющего воздействия оптимальные величины α , а также значения η , λ и M .

На номограммах для синтеза систем при скачкообразном изменении скорости управляющего воздействия штриховыми линиями показана

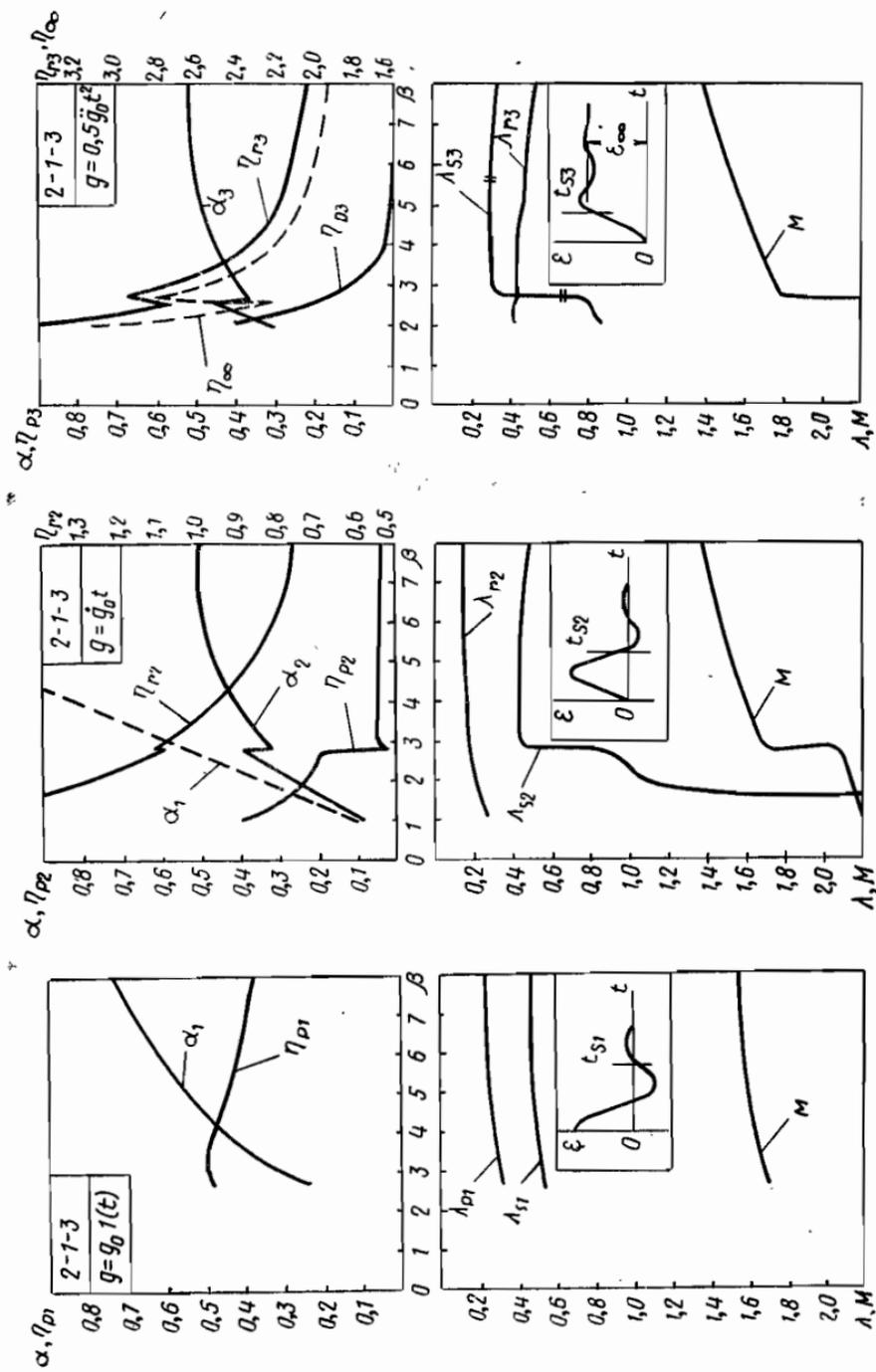


Рис. 8.13. Номограммы для синтеза систем с характеристиками типа 2-1-3 с минимальным временем переходного процесса

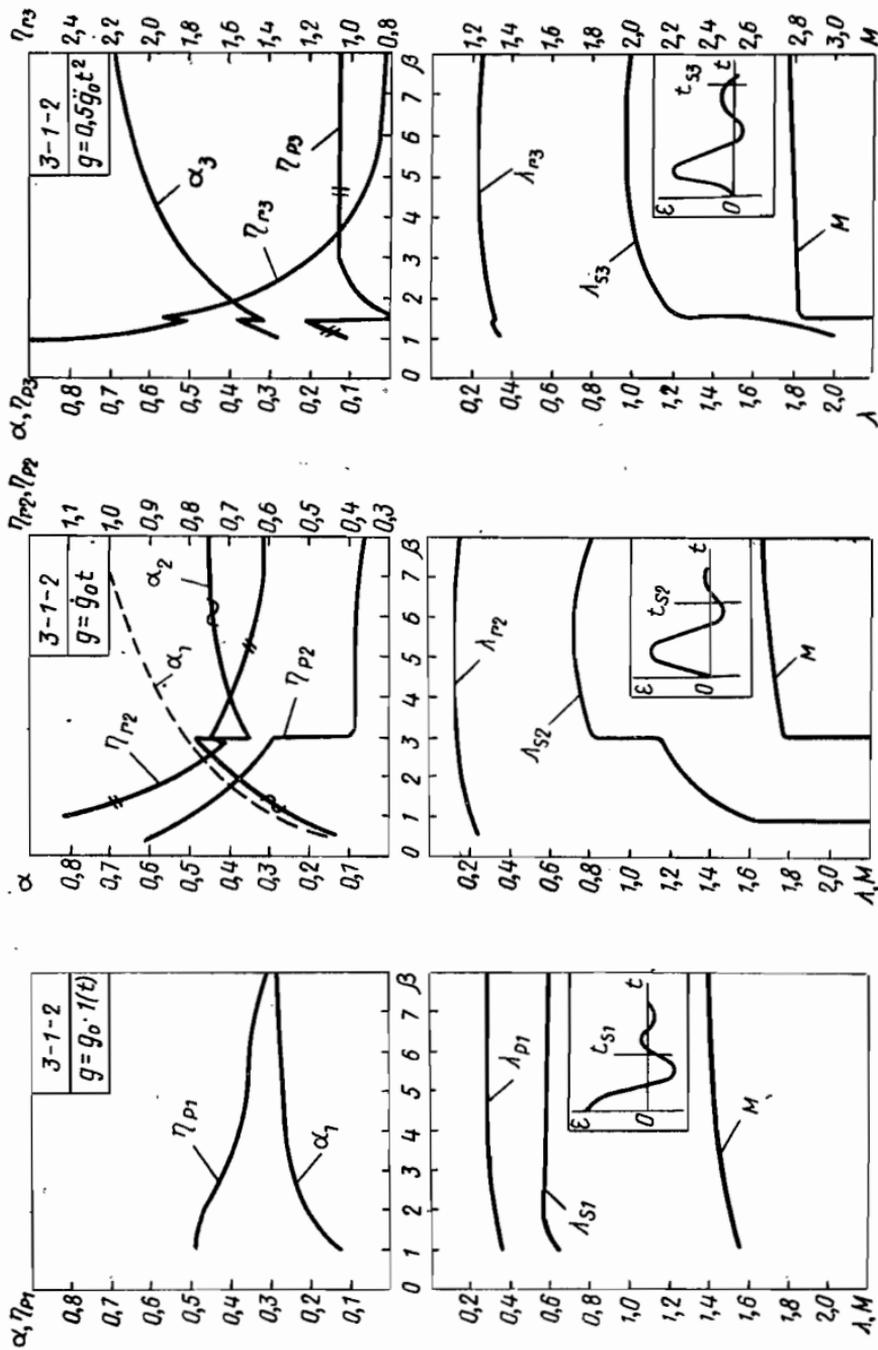


Рис. 8.14. Номограммы для синтеза систем с характеристиками типа 3-1-2 с минимальным временем переходного процесса

ны зависимости $\alpha_1 = F_1(\beta)$, позволяющие определить значение α , при котором имеет место минимальное значение интегральной квадратичной оценки, т. е.

$$I_{01} = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt = \min \quad \text{при } \beta = \beta_i.$$

Как видно из номограмм (рис. 8.12 ÷ 8.15), при малых значениях β , т. е. сильно колебательных процессах, оценки по минимуму времени переходного процесса t_s близко совпадают с оценками по минимуму I_{01} . При быстром затухании переходного процесса эти оценки существенно

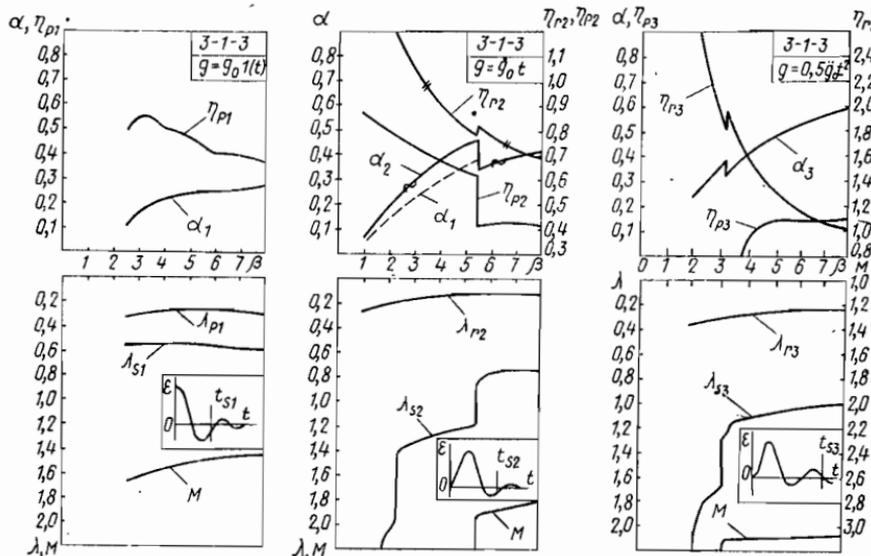


Рис. 8.15. Номограммы для синтеза систем с характеристиками типа 3-1-3 с минимальным временем переходного процесса

отличаются. Оптимальные значения α и β следует выбирать таким образом, чтобы время переходного процесса было минимальным, т. е. выбирать значения β больше тех, при которых имеют место скачки на кривых $\alpha = F_\alpha(\beta)$. Для большей наглядности на номограммах показан примерный вид изменения ошибки $\varepsilon(t)$ при оптимальных значениях параметров и указана точка, где определяется время переходного процесса.

Анализ номограмм (см. рис. 8.12 и 8.13) показывает, что для систем типа 2-1-2 и 2-1-3 можно так подобрать параметры, что переходный процесс будет близким к оптимальному при любом из рассмотренных воздействий. Выбор оптимальных параметров систем типа 3-1-2 и 3-1-3 (см. рис. 8.14 и 8.15) зависит от характера воздействия на систему. Однако если выбирать параметры системы при скачкообразном изменении скорости управляющего воздействия, то такая система будет обеспечивать удовлетворительные показатели качества и при других управляющих воздействиях.

Распространение номограмм на системы с астатизмом первого порядка. В качестве типовых логарифмических характеристик систем с астатизмом первого порядка целесообразно взять характеристики типа 1- ν -1- μ (при $\nu=2,3$; $\mu=2,3$), т. е. характеристики типа 1-2-1-2, 1-2-1-3, 1-3-1-2 и 1-3-1-3 (рис. 8.16). По этим характеристикам

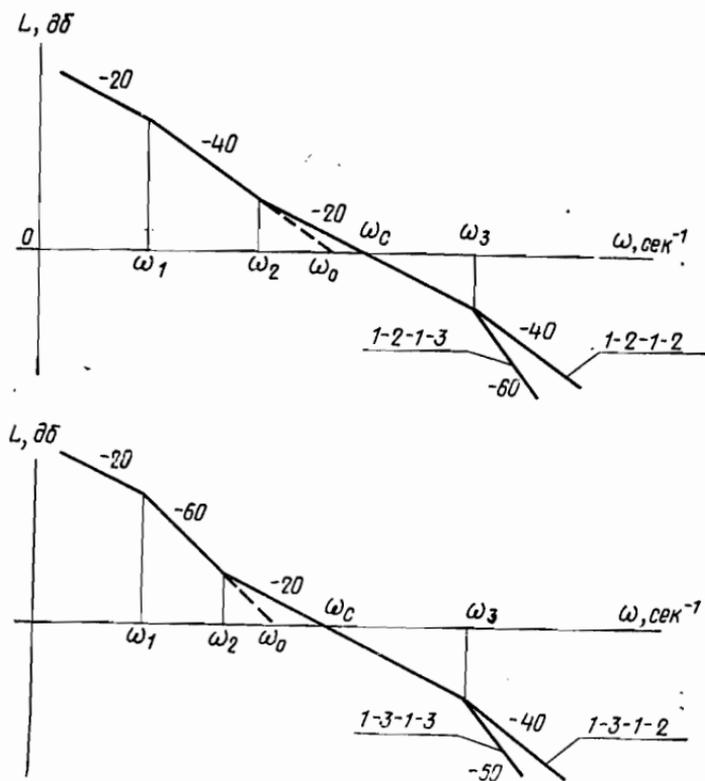


Рис. 8.16. Типовые логарифмические характеристики систем с астатизмом первого порядка

определяются параметры $\alpha = \omega_2/\omega_c$, $\beta = \omega_3/\omega_c$, $\gamma = \omega_1/\omega_c$ и $\psi = \omega_1/\omega_2$, базовая частота ω_0 , а также наклон характеристики в области частот $\omega_1 < \omega < \omega_2$, равный -20ν дБ·дек⁻¹, и в области высоких частот, равный -20μ дБ·дек⁻¹.

Частота среза ω_c и базовая частота ω_0 связаны с добротностью системы k (сек⁻¹) и параметрами α и ψ соотношениями

$$\omega_c = k\psi^{\nu-1}, \quad \omega_0 = k\psi^{\nu-1} \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}. \quad (8.42)$$

Передаточная функция разомкнутой системы с астатизмом первого порядка

$$W_3(s) = \frac{k(1 + T_2 s)^{\nu-1}}{s(1 + T_1 s)^{\nu-1}(1 + T_3 s)^{\mu-1}}, \quad (8.43)$$

а передаточные функции замкнутой системы относительно выходной

величины и ошибки запишутся соответственно как

$$\Phi_{\sigma}(s) = \frac{k(1+T_2s)^{\nu-1}}{s(1+T_1s)^{\nu-1}(1+T_3s)^{\mu-1} + k(1+T_2s)^{\nu-1}}; \quad (8.44)$$

$$\Phi_{\varepsilon_3}(s) = \frac{s(1+T_1s)^{\nu-1}(1+T_3s)^{\mu-1}}{s(1+T_1s)^{\nu-1}(1+T_3s)^{\mu-1} + k(1+T_2s)^{\nu-1}}, \quad (8.45)$$

где $T_1 = (\gamma\omega_c)^{-1}$; $T_2 = (\alpha\omega_c)^{-1}$; $T_3 = (\beta\omega_c)^{-1}$; $k = \omega_c \cdot \psi^{1-\nu}$.

Для анализа и синтеза следящих систем с астатизмом первого порядка при скачкообразном изменении управляющего воздействия можно использовать номограммы Г. Честната и Р. Майера. Однако задание в этих номограммах дополнительного параметра $\mu_1 = 20 \lg R(\omega_1)$, характеризующего коэффициент передачи разомкнутой системы при частоте ω_1 , приводит к необходимости иметь большое количество номограмм для фиксированных значений $\mu_1 = 20, 30, 40, 60$ и 80 дБ, что затрудняет их практическое использование.

Реальные значения μ_1 в исследуемой или проектируемой системе обычно не совпадают с фиксированными на номограммах значениями μ_1 , поэтому показатели качества или параметры системы определяются с некоторой ошибкой. Кроме того, номограммы Г. Честната и Р. Майера не позволяют определить ошибки при скачкообразном изменении скорости управляющего воздействия. Поэтому рационально для анализа и синтеза систем с астатизмом первого порядка при скачкообразном изменении управляющего воздействия или его первой производной использовать приведенные в настоящей главе номограммы [10]. На основании этих номограмм можно установить приближенную связь между показателями качества $\varepsilon_1, \varepsilon_2, t_r$ и t_s и параметрами типовых логарифмических частотных характеристик α, β, γ и ψ систем с астатизмом первого порядка. Показатели качества систем с астатизмом первого порядка, определенные по соответствующим номограммам для систем с астатизмом второго и третьего порядков, будут меньше отличаться от точных значений при меньших величинах α и ψ .

На рис. 8.17, а показаны логарифмические частотные характеристики типа 1-2-1-3 при $\beta = 4$ для различных значений $\alpha = 0,2; 0,4; 0,6$ и $\psi = 0,1; 0,2; 0,4$. На рис. 8.17, б и в приведены кривые $\Delta\eta_{\text{рп}}\% = f_p(\alpha, \psi)$ и $\Delta\eta_{\text{рп}}\% = f_r(\alpha, \psi)$, характеризующие ошибку при определении показателей качества в зависимости от α и ψ .

При расчете систем 1- ν -1- μ с астатизмом первого порядка по номограммам для систем ν -1- μ целесообразно пользоваться участками, лежащими вблизи минимума $\lambda_s = f_s(\alpha, \beta)$, что соответствует меньшим значениям α и менее колебательным переходным процессам. В этом случае показатели качества будут определяться с максимальной ошибкой при значениях α , лежащих вблизи минимума кривых $\lambda_s = f_s(\alpha, \beta)$.

Если допустить ошибку при определении показателей качества порядка 10—15%, то:

а) анализ и синтез систем с характеристиками типа 1-2-1-2 и 1-2-1-3 можно выполнять по номограмме для систем с астатизмом второго порядка при $k > 3\omega_c$;

б) анализ и синтез систем с характеристиками типа 1-3-1-2 и 1-3-1-3 можно выполнять по номограмме для систем с астатизмом третьего порядка при $k > 7\omega_c$.

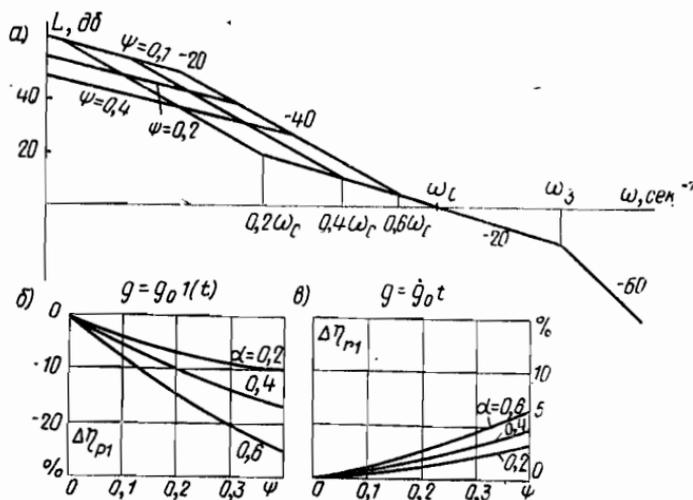


Рис. 8.17. Логарифмические частотные характеристики типа 1-2-1-3

При этом порядок построения желаемых логарифмических амплитудных характеристик системы с астатизмом первого порядка производится таким же образом, как и системы с астатизмом второго и третьего порядков.

§ 8.4. Примеры расчета инвариантных систем автоматического управления

Расчет инвариантных систем по коэффициентам ошибок. Рассмотрим примеры расчета инвариантных систем автоматического регулирования при задании различных показателей качества системы.

Пример 8.1. Определим параметры компенсирующей цепи в комбинированной следящей системе (см. рис. 8.2), обеспечивающие нулевую установившуюся ошибку при обработке управляющего воздействия, изменяющегося с постоянной скоростью $g = \text{const}$.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s) = W_1(s) W_2(s) = k/[s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)]; \quad W_1(s) = 1. \quad (8.46)$$

В качестве компенсирующей цепи используется тахогенератор с передаточной функцией

$$W_K(s) = k_{TR}s. \quad (8.47)$$

Передаточная функция комбинированной следящей системы

$$\Phi_{\text{ек}}(s) = \frac{1 - W(s)W_K(s)}{1 + W(s)} = \frac{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2) s^2 + (1 - k k_{TR}) s}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k}. \quad (8.48)$$

Установившаяся ошибка в следящей системе при обработке управляющего воздействия, изменяющегося с постоянной скоростью, равна нулю, если коэффициенты ошибок C_{g0} и C_{g1} равны нулю:

$$C_{g0} = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_{\text{ЕК}}(s) = 0; \quad (8.49)$$

$$C_{g1} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [\Phi_{\text{ЕК}}(s) - C_{g0}] = 0. \quad (8.50)$$

Условия (8.49) и (8.50) выполняются при $kk_{\text{ТР}} = 1$. Чтобы в процессе работы системы условия компенсации в системе не нарушались, необходимо стабилизировать значения k и $k_{\text{ТР}}$.

Пример 8.2. Определим параметры компенсирующей цепи в комбинированной следящей системе (см. рис. 8.2), обеспечивающие нулевую установившуюся ошибку при обработке управляющего воздействия, изменяющегося с постоянным ускорением $\ddot{g} = \text{const}$.

Передаточная функция разомкнутой системы определяется выражением (8.46). В качестве компенсирующей цепи используется тахогенератор постоянного тока с дифференцирующей RC -цепью на выходе (рис. 8.18).

Передаточная функция компенсирующей цепи

$$W_K(s) = \alpha_1 k_{\text{ТР}} s (1 + T_3 s) / (1 + T_4 s), \quad (8.51)$$

где

$$T_3 = \frac{T_4}{\alpha_1}; \quad T_4 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}; \quad C; \quad \alpha_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Передаточная функция комбинированной следящей системы

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{ЕК}}(s) &= \frac{1 - W_1(s) W_2(s) W_K(s)}{1 + W_1(s) W_2(s)} = \\ &= \frac{T_1 T_2 T_4 s^4 + (T_1 T_2 + T_1 T_4 + T_2 T_4) s^3 + (T_1 + T_2 + T_4 - k\alpha_1 k_{\text{ТР}} T_3) s^2 + (1 - k\alpha_1 k_{\text{ТР}}) s}{[s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k](T_4 s + 1)}. \end{aligned} \quad (8.52)$$

Установившаяся ошибка в системе при обработке управляющего воздействия с постоянным ускорением равна нулю, если

$$C_{g0} = C_{g1} = C_{g2} = 0. \quad (8.53)$$

Условие (8.53) выполняется при

$$k\alpha_1 k_{\text{ТР}} = 1 \quad \text{и} \quad T_1 + T_2 + T_4 = T_3.$$

Чтобы условия компенсации ошибки не нарушались в процессе эксплуатации системы, необходимо стабилизировать значения всех ее параметров.

Пример 8.3. Определим параметры компенсирующей цепи в следящей системе с неединичной обратной связью (рис. 8.19, а), обеспечивающие равенство нулю ошибок C_{g0} и C_{g1} .

Передаточная функция системы

$$W_1(s) = k / [s(T_1 s + 1)^2]. \quad (8.54)$$

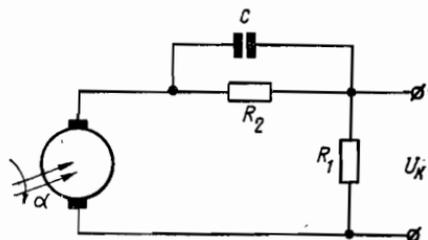


Рис. 8.18. Схема компенсирующей цепи

Передаточная функция компенсирующей интегрирующей RC-цепи (рис. 8.19, б)

$$W_R(s) = (T_2 s + 1) / (T_3 s + 1), \quad (8.55)$$

где

$$T_2 = \alpha T_3; \quad T_3 = (R_1 + R_2) C; \quad \alpha = R_1 / (R_1 + R_2).$$

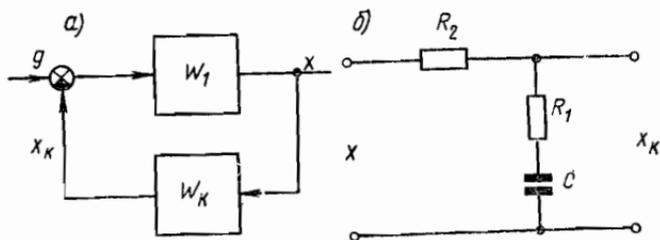


Рис. 8.19. Структурная схема следящей системы (а) и схема корректирующей цепи (б)

Передаточная функция замкнутой системы с неединичной обратной связью

$$\begin{aligned} \Phi_{eg}(s) &= \frac{1 + W_1(s) [W_R(s) - 1]}{1 + W_1(s) W_R(s)} = \\ &= \frac{[T_3 (T_1 s + 1)^2 + T_1 (T_1 s + 2)] s^2 + [1 - k (T_3 - T_2)] s}{s (T_1 s + 1)^2 (T_3 s + 1) + k (T_2 s + 1)}. \end{aligned} \quad (8.56)$$

Как видно из (8.56), коэффициент ошибки C_{g0} равен нулю; коэффициент ошибки C_{g1} будет равен нулю при

$$(T_3 - T_2)k = 1.$$

Применение номограмм для синтеза желаемых характеристик систем, инвариантных до ε . Если определяющим показателем качества системы является ошибка в установившемся режиме, перерегулирование или показатель колебательности, то синтез желаемой логарифмической амплитудной характеристики следует начинать с определения порядка астатизма системы и построения низкочастотной асимптоты желаемой характеристики.

Чтобы установившаяся ошибка ε_∞ не превышала заданного значения $\varepsilon_{\text{к max}}$, необходимо порядок астатизма системы ν выбрать равным порядку высшей производной сигнала управления. Тогда добротность системы и базовая частота

$$k_\nu \geq g^{(\nu)} / \varepsilon_{\text{к max}}; \quad \omega_0 = \sqrt[\nu]{k_\nu} \geq \sqrt{g^{(\nu)} / \varepsilon_{\text{к max}}} \quad (8.57)$$

определяют низкочастотную асимптоту логарифмической характеристики.

Если задано максимальное значение ошибки ε_{max} при синусоидальном воздействии на систему $g = g_0 \sin \omega_0 t$, то низкочастотная асимптота логарифмической амплитудной характеристики находится также на основании добротности или базовой частоты:

$$k_\nu \geq \omega_0^\nu (g_0 / \varepsilon_{\text{max}}); \quad \omega_0 = \omega_0 \sqrt[\nu]{g_0 / \varepsilon_{\text{max}}}. \quad (8.58)$$

Синусоидальное воздействие на систему может соответствовать реальному режиму работы системы или же являться эквивалентным воздействием, характеризующим работу системы при заданных максимальных значениях скорости и ускорения.

Задание низкочастотной асимптоты приводит к тому, что диапазон частот желаемой характеристики, а следовательно, и время переходного процесса в системе не могут быть произвольными.

Построение желаемой характеристики в области средних и высоких частот целесообразно начинать с определения типа характеристики и значения β , при которых могут быть получены заданные величины σ или M . Для выбранного типа желаемой характеристики или для желаемых характеристик нескольких типов по номограммам находятся значения α , λ_{s1} и λ_{p1} для различных β , а затем вычисляются величины

$$\left. \begin{aligned} \omega_c &= \omega_0 / \sqrt{\alpha^{(v-1)}}; & t_{s1} &= 10\lambda_{s1} / \omega_c; \\ & & t_{p1} &= 10\lambda_{p1} / \omega_c. \end{aligned} \right\} \quad (8.59)$$

Показатели качества системы при скачкообразных изменениях скорости или ускорения управляющего воздействия определяются на основании соответствующих номограмм по заданным значениям α и β . В результате сравнения показателей качества систем с различными β выбирается наиболее предпочтительная желаемая характеристика.

Пример 8.4. Построим желаемые логарифмические амплитудные характеристики эквивалентной системы, имеющей установившуюся ошибку $e_\infty = 0,1$ мм при обработке сигнала с постоянным ускорением $\ddot{g}_0 = 2$ мм·сек⁻²; перерегулирование при скачкообразном изменении управляющего воздействия не должно превышать значения $\sigma = 30\%$.

Заданную величину установившейся ошибки можно получить в системе с астатизмом второго порядка ($v = 2$) при значении добротности $k_v = 20$ сек⁻² и базовой частоте $\omega_0 = 4,47$ рад·сек⁻¹.

Параметры желаемых характеристик типа 2-1-2 и 2-1-3 и показатели качества системы при различных β и типовых воздействиях на входе, определенные по номограммам рис. 8.6, 8.8 и 8.10, приведены в табл. 8.1, а желаемые характеристики показаны на рис. 8.20, а и б соответственно.

Таблица 8.1

Параметры	Тип характеристики					
	2-1-2				2-1-3	
	1	2	4	8	4	8
β						
α	0,115	0,28	0,55	0,76	0,26	0,56
ω_c	13,2	8,47	6,05	5,13	8,78	5,98
t_{s1}	0,47	0,72	0,86	0,93	0,77	0,89
t_{p1}	0,26	0,37	0,41	0,45	0,33	0,42
M	1,39	1,35	1,43	1,44	1,32	1,42
η_{r2}	0,09	0,11	0,12	0,12	0,11	0,12
$\eta_{p2} \cdot 10^3$	—	—	0,008	0,016	—	0,008
t_{s2}	1,72	0,98	1,2	1,36	1,04	1,25
t_{r2}	0,17	0,2	0,23	0,25	0,19	0,23
η_{r3}	0,05	0,05	0,051	0,056	0,05	0,053
t_{s3}	1,7	0,85	0,93	1,1	0,95	0,97
t_{r3}	—	—	0,76	0,78	—	0,82

Как видно из табл. 8.1, предпочтение следует отдать желаемым характеристикам типа 2-1-2 при $\beta = 2$ или 2-1-3 при $\beta = 4$, так как в этом случае обеспечиваются меньшие значения ошибок и времени переходного процесса при скачкообразных изменениях скорости или ускорения управляющего воздействия и лучшие сглаживающие свойства для высокочастотной помехи.

Если определяющим показателем качества системы является время переходного процесса и порядок астатизма задан, то низкочастотная асимптота может быть построена после формирования характеристики в области средних частот. В этом случае по номограммам для заданного значения β находятся величины α , λ_s , λ_p , λ_r , а затем определяются частота $\omega_c = 10\lambda_s/t_s$ и все другие показатели качества системы.

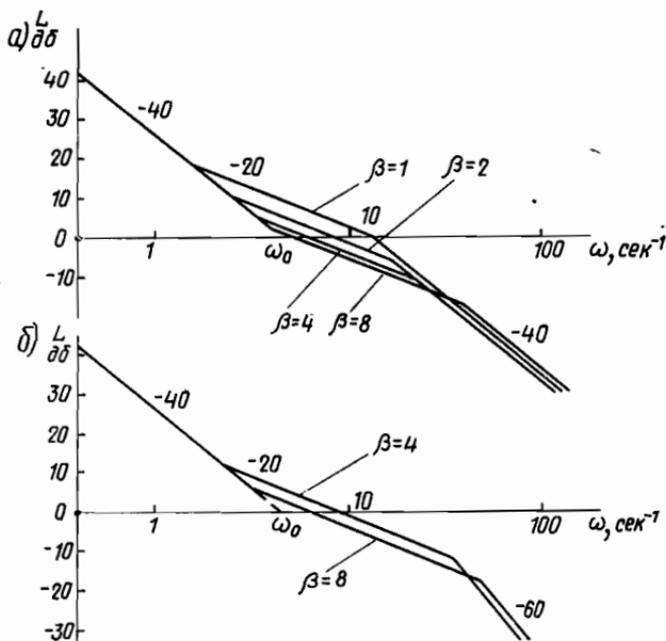


Рис. 8.20. Желаемые логарифмические амплитудные характеристики

Пример 8.5. Определим желаемые логарифмические амплитудные характеристики эквивалентной системы, имеющей при скачкообразном изменении скорости управляющего воздействия на величину $\dot{g}_0 = 12 \text{ град} \cdot \text{сек}^{-1}$ максимальное значение динамической ошибки $\varepsilon_1 = 10'$ и минимальное время переходного процесса. Параметры системы выберем таким образом, чтобы время переходного процесса было близко к минимальному при скачкообразных изменениях управляющего воздействия и ускорения.

Как видно из номограммы (см. рис. 8.13), заданным техническим требованиям удовлетворяет система типа 2-1-3 при $3,5 < \beta < 5$. Если выбрать $\beta = 3,5$ и $\alpha = 0,39$, то время переходного процесса в системе будет минимальным также при скачке управляющего воздействия и близким к минимальному при скачке ускорения. При $\beta = 3,5$ и $\alpha = 0,39$ система имеет частоту среза

$$\omega_c = \eta_{r2} \dot{g}_0 / \varepsilon_1 = 0,5 \cdot 12 \cdot 60 / 10 = 36 \text{ сек}^{-1}$$

и показатели качества:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \eta_{p2} g_0 / \omega_c = 0,05 \cdot 12 \cdot 60 / 36 = 1', \\ t_{s2} &= 10\lambda_{s2} / \omega_c = 10 \cdot 0,43 / 36 = 0,12 \text{ сек}; \\ t_{r2} &= 10\lambda_{r2} / \omega_c = 10 \cdot 0,18 / 36 = 0,05 \text{ сек}. \end{aligned}$$

Литература к главе VIII

1. А. Г. Ивахненко. Кибернетические системы с комбинированным управлением. «Техника», 1966.
2. Б. Н. Петров. О реализуемости условий инвариантности. Труды I Всесоюзного совещания по теории инвариантности. ОТН АН УССР, 1959.
3. Г. М. Уланов. Регулирование по возмущению. Госэнергоиздат, 1960.
4. А. И. Кухтенко. Проблема инвариантности в автоматике. ГИТЛ УССР, 1963.
5. М. В. Мееров. Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. Физматгиз, 1959.
6. В. Г. Терсков. Основы теории расчета систем с комбинированным управлением. Элементы и приводы силовых следящих систем. МАИ, 1961, вып. 134.
7. В. А. Бесекерский, С. М. Федоров. Расчет следящих систем комбинированного управления методом логарифмических характеристик. Труды I Всесоюзного совещания по теории инвариантности. ОТН АН УССР, 1959.
8. А. А. Вавилов, М. Е. Верхолат, И. Б. Рубашкин. Силовые электромеханические следящие системы копировально-фрезерных станков. «Машиностроение», 1964.
9. Г. Честнат, Р. Майер. Проектирование и расчет следящих систем и систем регулирования. Госэнергоиздат, 1959.
10. А. А. Вавилов, А. А. Безвиковный. Номограммы для анализа и синтеза астатических систем автоматического управления. «Электромеханика», 1967, № 1.
11. А. А. Вавилов, А. А. Безвиковный. Синтез инвариантных систем автоматического управления. ЛЭТИ, 1967, вып. 58.
12. Г. М. Уланов. Динамическая точность и компенсация возмущений в системах автоматического управления. «Машиностроение», 1971.

РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ СИСТЕМ ПО ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

§ 9.1. Логарифмические характеристики нелинейных элементов при симметричных колебаниях

Одним из приближенных методов исследования нелинейных систем автоматического управления, получивших наибольшее применение, является метод эквивалентной линеаризации Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова. Для нелинейных систем автоматического регулирования метод гармонической линеаризации получил свое развитие в работах Л. С. Гольдфарба [1], Е. П. Попова [2] и других авторов и является наиболее эффективным приближенным методом исследования периодических режимов.

Рассмотрим основные положения эквивалентной гармонической линеаризации нелинейностей и некоторые практические приемы применения эквивалентных характеристик нелинейных элементов.

Коэффициенты гармонической линеаризации и эквивалентные комплексные коэффициенты передачи нелинейных элементов. На рис. 9.1 показана структурная схема автоматической системы с не-

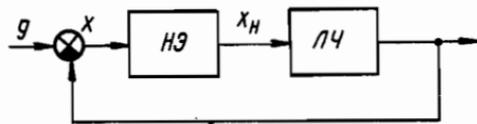


Рис. 9.1. Структурная схема системы автоматического управления с нелинейностью

линейным элементом. Предположим, что параметры линейной части системы ЛЧ и нелинейного элемента НЭ выбраны таким образом, что в системе существуют симметричные периодические колебания с частотой ω .

В основе метода эквивалентной гармонической линеаризации лежит предположение, что периодические колебания на входе нелинейного элемента близки к гармоническим колебаниям с частотой ω и амплитудой A , т. е.

$$x \approx A \sin \psi, \quad \text{где } \psi = \omega t.$$

Такие колебания имеют место в нелинейной системе (см. рис. 9.1) в том случае, когда ее линейная часть значительно ослабляет высшие гармоники периодических колебаний, поданных на ее вход, или в случае, когда характеристика нелинейного элемента мало отличается от линейной.

Если выполняется одно из перечисленных условий, то нелинейный элемент в системе можно заменить в первом приближении некоторым элементом с эквивалентным коэффициентом передачи, который опре-

деляет первую гармонику периодических колебаний на выходе в зависимости от частоты и амплитуды синусоидальных колебаний на входе. Так, для нелинейного элемента с характеристикой $x_H = F(x)$ периодические колебания на выходе при синусоидальном входном воздействии $x = A \sin \psi$ и отсутствии постоянной составляющей определяются уравнением

$$x_H = F(A \sin \psi). \quad (9.1)$$

Первая гармоника периодических колебаний на выходе нелинейного элемента может быть найдена путем разложения периодической функции $F(x)$ в ряд Фурье.

Для нелинейных элементов с петлевыми нечетно-симметричными характеристиками (рис. 9.2) и других нелинейных элементов с подоб-

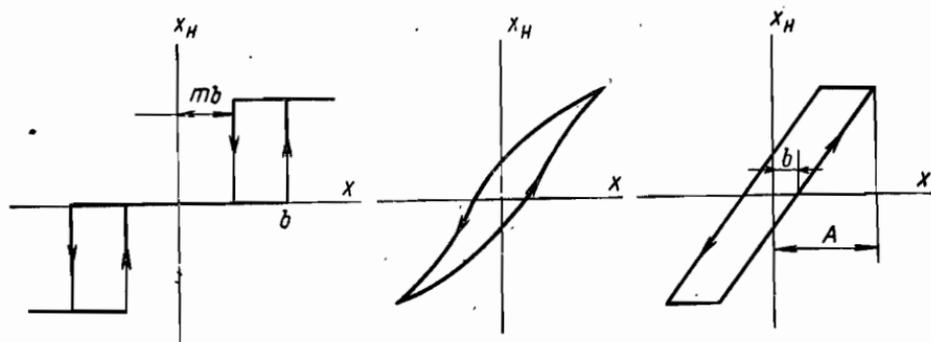


Рис. 9.2. Петлевые симметричные характеристики нелинейных элементов

ными характеристиками в результате разложения периодической функции $F(x)$ в ряд Фурье при синусоидальных колебаниях на входе $x = A \sin \psi$ получим выражение для первой гармоники:

$$x_{H1} = b_{1F} \sin \psi + a_{1F} \cos \psi, \quad (9.2)$$

где $b_{1F} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \sin \psi d\psi$ и $a_{1F} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \cos \psi d\psi$

— коэффициенты разложения в ряд Фурье, определяющие амплитуды соответственно синфазной и квадратурной составляющих первой гармоники на выходе нелинейного элемента.

Поскольку

$$px = A\omega \cos \psi, \quad p = d/dt, \quad (9.3)$$

то связь между первой гармоникой периодических колебаний на выходе нелинейного элемента и синусоидальными колебаниями на его входе можно представить в следующем виде:

$$x_{H1} = [q(A) + q'(A) p/\omega] x, \quad (9.4)$$

где $q(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \sin \psi d\psi$ и $q'(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \cos \psi d\psi$ —

коэффициенты гармонической линеаризации, характеризующие отношения амплитуд соответственно синфазной и квадратурной составляющих первой гармоники колебаний на выходе нелинейного элемента к амплитуде синусоидальных колебаний на входе.

Уравнение (9.4) нелинейного элемента отличается от уравнения линейного элемента тем, что его коэффициенты изменяются при изменении амплитуды колебаний.

На основании уравнений (9.2) и (9.4) первую гармонику периодических колебаний на выходе нелинейного элемента с характеристикой $x_n = F(x)$ можно представить как

$$x_{н1} = A_{н1} \sin(\omega t + \varphi_{н1}), \quad (9.5)$$

где $A_{н1} = A \sqrt{[q(A)]^2 + [q'(A)]^2}$ — амплитуда первой гармоники периодических колебаний на выходе нелинейного элемента; $\varphi_{н1} = \arctg[q'(A)/q(A)]$ — фазовый сдвиг первой гармоники периодических колебаний на выходе нелинейного элемента по отношению к синусоидальным колебаниям на входе.

Представим гармонические колебания на входе и первую гармонику периодических колебаний на выходе нелинейного элемента в комплексной форме:

$$x = Ae^{j\omega t}; \quad x_{н1} = A_{н1}e^{j(\omega t + \varphi_{н1})}, \quad (9.6)$$

откуда получим эквивалентный комплексный коэффициент передачи нелинейного элемента:

$$W_{\vartheta}(A) = R_{\vartheta}(A) e^{j\varphi_{\vartheta}(A)}, \quad (9.7)$$

где $R_{\vartheta}(A) = A_{н1}/A = \sqrt{[q(A)]^2 + [q'(A)]^2}$ — модуль эквивалентного комплексного коэффициента передачи нелинейного элемента; $\varphi_{\vartheta}(A) = \arg W_{\vartheta}(A) = \varphi_{н1} = \arctg[q'(A)/q(A)]$ — аргумент эквивалентного комплексного коэффициента передачи нелинейного элемента.

В ряде случаев оказывается удобным представить эквивалентный комплексный коэффициент передачи нелинейного элемента в виде произведения коэффициента передачи нелинейного элемента, не зависящего от амплитуды, и нормированного эквивалентного комплексного коэффициента передачи:

$$W_{\vartheta}(A) = k_n W_0(A) = k_n R_0(A) e^{j\varphi_{\vartheta}(A)}, \quad (9.8)$$

где $R_0(A) = R_{\vartheta}(A)/k_n$ — модуль нормированного эквивалентного коэффициента передачи нелинейного элемента.

При расчете нелинейной системы целесообразно ввести относительное значение амплитуды входного синусоидального воздействия

$$\mu = A/b, \quad (9.9)$$

где b — некоторая постоянная величина, и определять коэффициенты гармонической линеаризации и эквивалентный комплексный коэффициент передачи для относительного значения амплитуды μ , т. е. $q(\mu)$, $q'(\mu)$ и $W_{\vartheta}(\mu)$ [3].

Для нелинейных элементов с однозначными нечетно-симметричными характеристиками (рис. 9.3) и других элементов с подобными характеристиками первая гармоника периодических колебаний будет совпадать по фазе с синусоидальными колебаниями на входе нелинейного элемента. При этом квадратурная составляющая первой гармоники

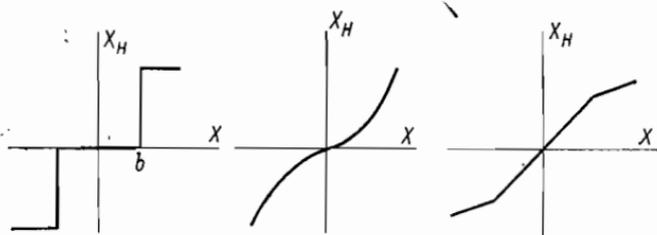


Рис. 9.3. Однозначные симметричные характеристики нелинейных элементов

на выходе нелинейного элемента будет равна нулю и, следовательно, будет равен нулю коэффициент гармонической линеаризации:

$$q'(A) = 0.$$

В этом случае первая гармоника периодических колебаний на выходе

$$x_{н1} = q(A)x, \quad (9.10)$$

а модуль эквивалентного комплексного коэффициента передачи нелинейного элемента

$$R_0(A) = q(A) = W_0(A). \quad (9.11)$$

Если выходная величина нелинейного элемента зависит не только от входного сигнала, но и от его производной, т. е. если характеристика нелинейного элемента имеет вид

$$x_n = F(x, px), \quad (9.12)$$

то первая гармоника периодических колебаний на выходе при синусоидальном входном воздействии $x = A \sin \psi$ будет также иметь вид (9.5). Связь между $x_{н1}$ и x будет определяться уравнением

$$x_{н1} = [q(A, \omega) + q'(A, \omega)p/\omega] x, \quad (9.13)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q(A, \omega) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A\omega \cos \psi) \sin \psi d\psi; \\ q'(A, \omega) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A\omega \cos \psi) \cos \psi d\psi \end{aligned} \right\}$$

— коэффициенты гармонической линеаризации.

Как видно из уравнения (9.13), коэффициенты гармонической линеаризации $q(A, \omega)$ и $q'(A, \omega)$ в этом случае зависят не только от амплитуды, но и от частоты синусоидальных колебаний на входе нелинейного элемента.

Таким образом, для нелинейного элемента с характеристикой (9.12) эквивалентный комплексный коэффициент передачи

$$W_0(j\omega, A) = R_0(A, \omega) e^{j\varphi_0(A, \omega)} \quad (9.14)$$

зависит от частоты и амплитуды синусоидальных колебаний на входе нелинейного элемента. При этом модуль и аргумент эквивалентного комплексного коэффициента передачи нелинейного элемента связаны с коэффициентами гармонической линеаризации выражениями

$$\left. \begin{aligned} R_0(A, \omega) &= \sqrt{[q(A, \omega)]^2 + [q'(A, \omega)]^2}; \\ \varphi_0(A, \omega) &= \operatorname{arctg} [q'(A, \omega)/q(A, \omega)]. \end{aligned} \right\} \quad (9.15)$$

Эквивалентные логарифмические амплитудная и фазовая характеристики нелинейных элементов. Эквивалентные логарифмические амплитудная и фазовая характеристики нелинейных элементов для любого фиксированного значения частоты $\omega = \omega_i$ запишутся как

$$\left. \begin{aligned} L_0(A, \omega_i) &= 20 \lg |W_0(A, j\omega_i)| = L_k + L_0(A, \omega_i); \\ \varphi_0(A, \omega_i) &= \arg W_0(A, j\omega_i), \end{aligned} \right\} \quad (9.16)$$

где $L_k = 20 \lg k_n$; $L_0(A, \omega_i) = 20 \lg |W_0(A, j\omega_i)|$

— нормированная эквивалентная логарифмическая амплитудная характеристика нелинейного элемента.

Эквивалентные логарифмические амплитудная и фазовая характеристики нелинейного элемента могут быть построены в зависимости от амплитуды колебаний A на входе, если по оси абсцисс отложить вместо частоты ω , как это делается при построении логарифмических амплитудных и фазовых частотных характеристик линейных элементов, значение амплитуды A . Задаваясь различными значениями частоты (ω_1, ω_2 и т. д.), можно построить семейство эквивалентных логарифмических амплитудных и фазовых характеристик нелинейного элемента.

На рис. 9.4 для $\omega = 10 \text{ сек}^{-1}$ (сплошная) и $\omega = 100 \text{ сек}^{-1}$ (штриховая) приведены эквивалентные логарифмические и фазовые характеристики конкретной нелинейной корректирующей цепи.

Аналогично могут быть построены эквивалентные амплитудная и фазовая характеристики частотно-независимых нелинейных элементов:

$$L_0(A) = 20 \lg |W_0(A)|; \quad \varphi_0(A) = \arg W_0(A).$$

В качестве примера рассмотрим эквивалентные логарифмические характеристики релейного элемента $x_n = F(x)$, имеющего симметричную характеристику общего вида с гистерезисом и зоной нечувств-

вительности (рис. 9.5, а и б). Эту релейную характеристику определяют зона нечувствительности b , коэффициент возврата реле m и величина сигнала на выходе реле c . Коэффициент возврата реле может изменяться в пределах $-1 \leq m \leq 1$ в зависимости от характеристики реле.

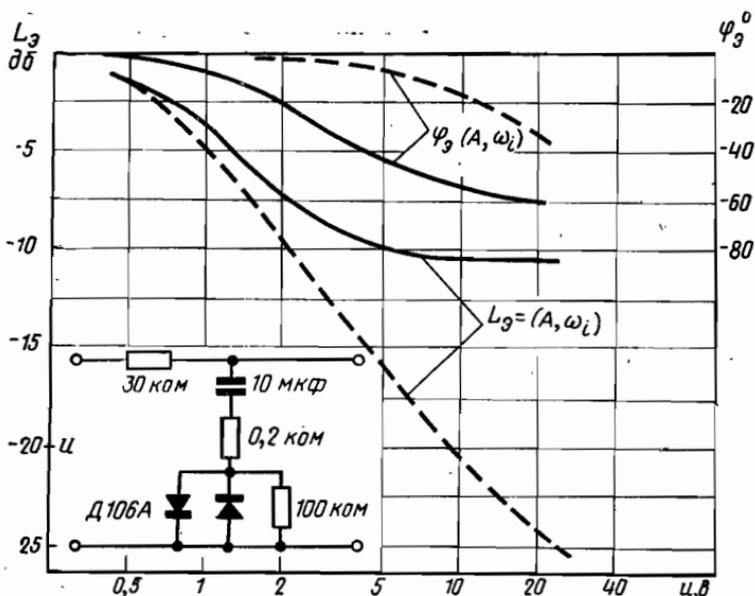


Рис. 9.4. Нелинейная корректирующая цепь и семейство логарифмических амплитудных и фазовых характеристик

При $\mu \geq 1$ коэффициенты гармонической линеаризации релейного элемента имеют вид

$$\left. \begin{aligned} q(\mu) &= \frac{2}{\pi b \mu} \int_{\psi_1}^{\psi_2} c \sin \psi d\psi = \frac{k_H}{\mu} \cdot \frac{\sqrt{\mu^2 - 1} + \sqrt{\mu^2 - m^2}}{2\mu}; \\ q'(\mu) &= \frac{2}{\pi b \mu} \int_{\psi_1}^{\psi_2} c \cos \psi d\psi = -\frac{k_H}{\mu} \cdot \frac{1 - m}{2\mu}, \end{aligned} \right\} \quad (9.17)$$

где $\mu = A/b$ — относительное значение амплитуды входного воздействия; $\psi_1 = \arcsin(1/\mu)$ — значение аргумента в точке переключения реле $x = b$; $\psi_2 = \pi - \arcsin(m/\mu)$ — значение аргумента в точке переключения $x = mb$; $k_H = 4c/(\pi b)$ — коэффициент передачи релейного элемента, не зависящий от амплитуды.

При расчете релейных систем целесообразно коэффициент передачи релейного элемента $k_H = 4c/(\pi b)$ относить к линейной части

системы, а для релейных элементов строить нормированные логарифмические амплитудные характеристики [3]:

$$L_0(\mu) = 20 \lg \frac{1}{\mu} \sqrt{\left(\frac{\sqrt{\mu^2 - 1} \mp \sqrt{\mu^2 - m^2}}{2\mu}\right)^2 \mp \left(\frac{1-m}{2\mu}\right)^2}. \quad (9.18)$$

Нормированная логарифмическая амплитудная характеристика при $\mu \gg 1$ имеет асимптоту

$$L_{a0}(\mu) = -20 \lg \mu,$$

которая проходит с наклоном -20 дБ/дек через точку с координатами $L = 0$, $\mu = 1$. Нормированная логарифмическая фазовая характеристика релейного элемента определяется формулой

$$\varphi(\mu) = -\text{arctg} \frac{1-m}{\sqrt{\mu^2 - 1} \mp \sqrt{\mu^2 - m^2}}. \quad (9.19)$$

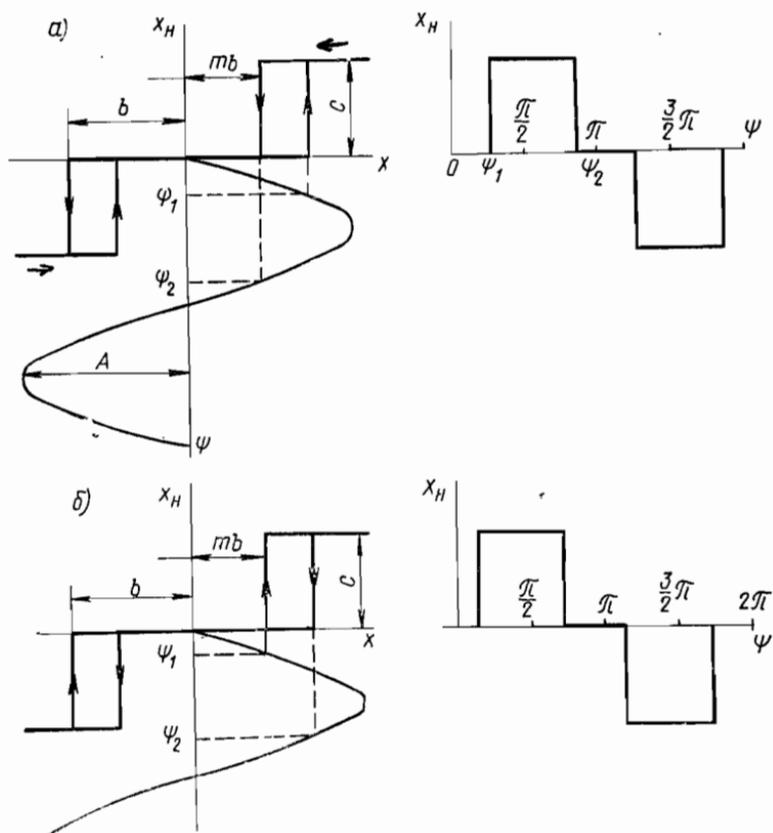


Рис. 9.5. Релейная характеристика общего вида, имеющая зону нечувствительности и гистерезис (а); релейная характеристика с зоной нечувствительности и гистерезисными петлями опережающего типа (б)

На рис. 9.6 приведено семейство нормированных эквивалентных логарифмических амплитудных характеристик, а на рис. 9.7 — семейство эквивалентных логарифмических фазовых характеристик. Семейства характеристик построены для значений коэффициента возврата реле $-1 \leq m \leq 1$.

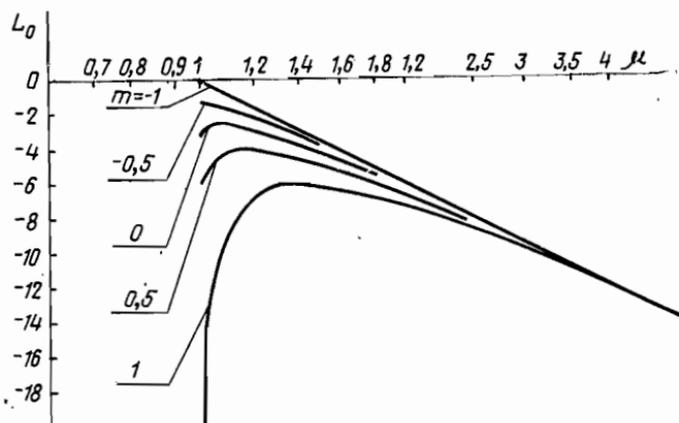


Рис. 9.6. Семейство нормированных эквивалентных логарифмических амплитудных характеристик релейного элемента

Релейному элементу со смещенной гистерезисной петлей соответствуют эквивалентные логарифмические характеристики при $-1 < m \leq 0$.

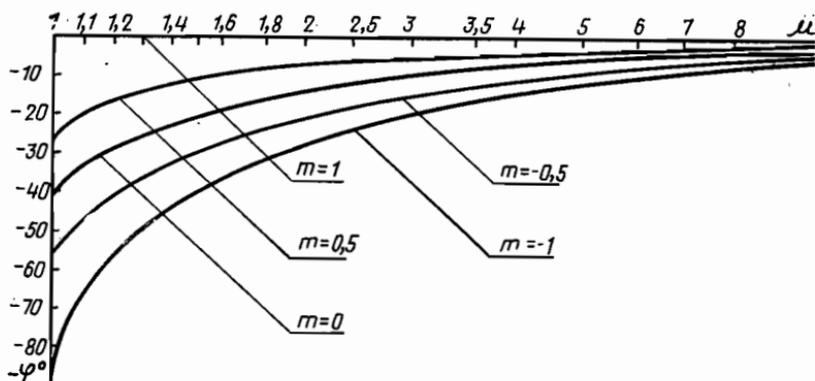


Рис. 9.7. Семейство эквивалентных фазовых характеристик релейного элемента

Коэффициент возврата реле $m = -1$ соответствует релейному элементу с гистерезисом, а $m = 1$ — релейному элементу с зоной нечувствительности. При $b = 0$ релейная характеристика превращается в идеальную.

Релейные элементы с однозначной релейной характеристикой не вносят дополнительных фазовых сдвигов в систему. Релейные элементы с гистерезисом вносят в систему дополнительный отрицательный фазовый сдвиг, за счет которого обычно увеличивается амплитуда автоколебаний в системе, т. е. ухудшаются ее показатели качества.

Логарифмические характеристики релейных элементов с опережающими гистерезисными петлями. С целью увеличения частоты и уменьшения амплитуды автоколебаний в релейных системах используются релейные элементы с опережающими гистерезисными петлями. Релейная характеристика общего вида с зоной нечувствительности и опережающими гистерезисными петлями показана на рис. 9.5, б.

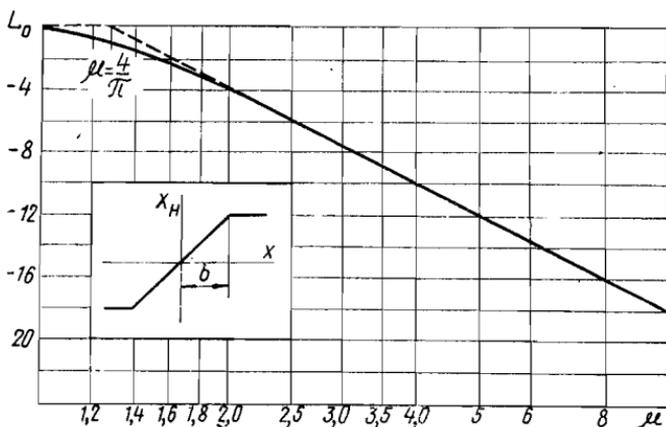


Рис. 9.8. Нормированная эквивалентная логарифмическая характеристика нелинейного элемента с насыщением

Нормированная логарифмическая амплитудная характеристика релейного элемента с зоной нечувствительности и опережающими петлями полностью совпадает с характеристикой релейного элемента с зоной нечувствительности и гистерезисом.

Логарифмическая фазовая характеристика релейного элемента с зоной нечувствительности и опережающими петлями и соответствующая характеристика релейного элемента с зоной нечувствительности и гистерезисом отличаются только знаком.

Логарифмические характеристики типовых нелинейных элементов. Далее приводятся выражения для построения логарифмических характеристик и сами характеристики некоторых типовых нелинейных элементов при симметричных колебаниях на входе. Показывается, что в отдельных случаях логарифмические амплитудные характеристики типовых нелинейных элементов с достаточной для практических расчетов точностью могут быть заменены асимптотическими характеристиками, которые и следует использовать для дальнейших расчетов.

Логарифмическая характеристика нелинейного элемента с насыщением. Нормированная эквивалентная логарифмическая характеристика нелинейного эле-

мента с насыщением при $\mu \geq 1$ (рис. 9.8, сплошная линия) выражается формулой

$$L_0(\mu) = 20 \lg \frac{2}{\pi} \left[\arcsin \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\mu}\right)^2} \right]. \quad (9.20)$$

Асимптотическая характеристика (штриховая линия) нелинейного элемента с насыщением мало отличается от точной и состоит из двух прямых. Первая прямая совпадает с осью абсцисс при $1 \leq \mu \leq 1,27$, т. е.

$$L_{a0}(\mu) = 0, \quad (9.21)$$

а вторая прямая проходит с наклоном -20 дБ/дек через точку $\mu = 1,27$, лежащую на оси абсцисс, т. е.

$$L_{a0}(\mu) = 20 \lg(1,27/\mu). \quad (9.22)$$

Логарифмическая характеристика нелинейного элемента с зоной нечувствительности. Нормированная эквивалентная логарифмическая характеристика не-

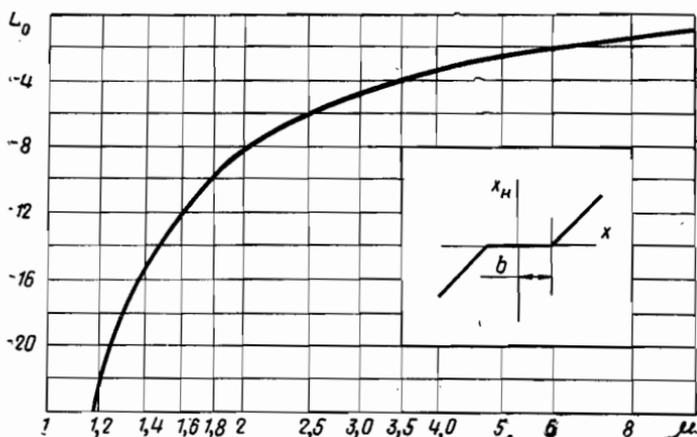


Рис. 9.9. Нормированная эквивалентная логарифмическая характеристика нелинейного элемента с зоной нечувствительности

линейного элемента с зоной нечувствительности при $\mu \geq 1$ (рис. 9.9) построена на основании выражения

$$L_0(\mu) = 20 \lg \left[1 - \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\mu}\right)^2} \right) \right]. \quad (9.23)$$

Логарифмическая характеристика нелинейного элемента с зоной нечувствительности и насыщением (рис. 9.10).

Относительная величина сигнала на входе нелинейного элемента $\mu = A/b$, величина $h = b_1/b$ и коэффициент передачи $k_n = c/(b_1 - b) = c/[b(h - 1)]$ определяются по характеристике нелинейного элемента.

Нормированная логарифмическая характеристика нелинейного элемента с зоной нечувствительности и насыщением при $\mu \geq 1$ выражается формулой

$$L_0(\mu) = 20 \lg \frac{2}{\pi} \left[\arcsin \frac{h}{\mu} - \arcsin \frac{1}{\mu} + \frac{h}{\mu} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{\mu}\right)^2} - \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\mu}\right)^2} \right]. \quad (9.24)$$

При $\mu \gg h$ нормированная логарифмическая характеристика нелинейного элемента стремится к асимптотической характеристике

$$L_{a0}(\mu) = 20 \lg [4(h-1)/(\pi\mu)], \quad (9.25)$$

проходящей через точку с координатами $L = 0$, $\mu = 4(h-1)/\pi$ с наклоном -20 дб/дек.

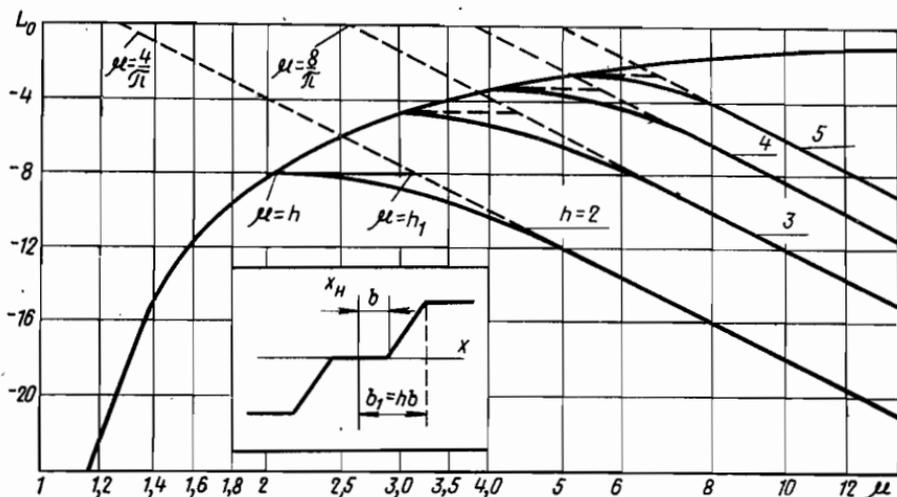


Рис. 9.10. Логарифмическая характеристика нелинейного элемента с зоной нечувствительности и насыщением

При значениях $1 \leq \mu \leq h$ нормированная логарифмическая характеристика проходит так же, как характеристика элемента с зоной нечувствительности.

В большинстве случаев точную нормированную характеристику нелинейного элемента с зоной нечувствительности и насыщением можно заменить приближенной характеристикой, которая при $1 \leq \mu \leq h$ совпадает с характеристикой элемента с зоной нечувствительности, при $\mu \geq h_1$ совпадает с асимптотической характеристикой, а при $h \leq \mu \leq h_1$ проходит параллельно оси абсцисс. На рис. 9.10 показаны нормированные логарифмические $L_0(\mu)$ (сплошные линии) и асимптотические (штриховые линии) характеристики $L_{a0}(\mu)$ нелинейного элемента при $h = 2, 3, 4, 5$.

Логарифмическая характеристика нелинейного элемента с переменным коэффициентом

передачи (рис. 9.11). Нормированные логарифмические характеристики нелинейных элементов с переменным коэффициентом передачи при $\mu \geq 1$ и $N_1 = k_2/k_1 = 2, 3, 4$ и 10 (рис. 9.12) построены по формуле

$$L_0(\mu) = 20 \lg \left\{ 1 - (N_1 - 1) \times \right. \\ \times \left[1 - \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{1}{\mu} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\mu} \right)^2} \right) \right] \right\}. \quad (9.26)$$

При $\mu \leq 1$ логарифмическая характеристика $L_0(\mu) = 0$, а при $\mu \gg 1$ логарифмическая характеристика стремится к асимптотической характеристике $L_{a0}(\mu) = 20 \lg N_1$.

Логарифмическая характеристик элементов со степенными нелинейными характеристиками. В ряде случаев характеристики элементов систем автоматического управления можно описать с помощью степенной зависимости

$$F(x) = k (\text{mod } x)^\alpha \text{sign } x, \quad (9.27)$$

где $\alpha > 0$.

На рис. 9.13 показаны характеристики при $k = 1$ и показателях степени $\alpha = 0,2; 0,5; 1; 2$ и 4. Если показатель степени α представляет собой целое число, то общее выражение для коэффициентов гармонической линеаризации нелинейной характеристики можно получить сравнительно просто. Так, например, для нелинейной характеристики $F(x) = kx^n$ при n целом нечетном и нелинейной характеристики $F(x) = kx^n \text{sign } x$ при n целом четном коэффициенты гармонической линеаризации запишутся соответственно как

$$q_1(A) = \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n}{4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (n \nabla 1)} k A^{n-1} = c_1 A^{n-1}; \quad (9.28)$$

$$q_2(A) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n \nabla 1)} k A^{n-1} = c_2 A^{n-1}. \quad (9.29)$$

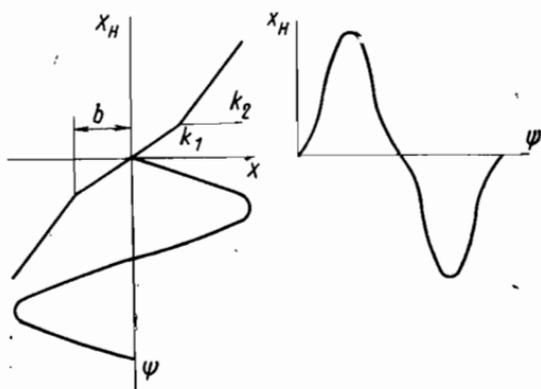


Рис. 9.11. Характеристика нелинейного элемента с переменным коэффициентом передачи

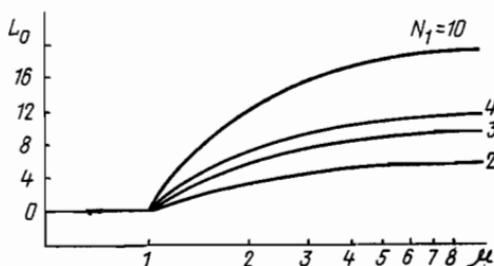


Рис. 9.12. Нормированные логарифмические характеристики нелинейных элементов с переменным коэффициентом передачи

В частных случаях для характеристики $F(x) = kx^2 \operatorname{sign} x$

$$q_2(A) = 0,85 kA;$$

для характеристики $F(x) = kx^3$

$$q_2(A) = 0,75 kA^2;$$

для характеристики $F(x) = kx^4 \operatorname{sign} x$

$$q_2(A) = 0,68 kA^3.$$

Логарифмическая характеристика нелинейного элемента [коэффициенты гармонической линейризации которого выражаются формулами (9.28) и (9.29)]

$$L_i(A) = 20 \lg q_i(A) = 20 \lg c_i + (n - 1) 20 \lg A$$

представляет собой прямую с наклоном $(n - 1) 20 \text{ дб/дек}$, проходящую через точку с координатами $A = 1$ и $L = 20 \lg c_i$.

В общем случае при $\alpha > 0$ коэффициенты гармонической линейризации нелинейных элементов со степенной нелинейной характеристикой можно определить на основании приближенного выражения, полученного Я. З. Цыпкиным:

$$q(A) \approx \frac{2}{3A} [F(A) + F(A/2)]. \quad (9.30)$$

Для рассматриваемых нелинейных элементов имеем

$$\begin{aligned} q(A) &\approx k \frac{2}{3A} \left[A^\alpha + \left(\frac{A}{2} \right)^\alpha \right] = \\ &= k \frac{2^{(1-\alpha)} (2^\alpha + 1)}{3A^{1-\alpha}}. \end{aligned} \quad (9.31)$$

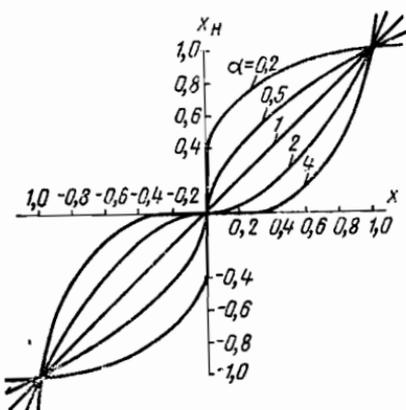


Рис. 9.13. Нелинейные характеристики в виде степенных зависимостей

Приближенная логарифмическая характеристика нелинейного элемента

$$L(A) = 20 \lg \frac{k 2^{(1-\alpha)} (2^\alpha + 1)}{3} - (1 - \alpha) 20 \lg A \quad (9.32)$$

представляет собой прямую линию, проходящую с наклоном $-(1 - \alpha) 20 \text{ дб/дек}$ через точку с координатами $A = 1$ и

$$L = 20 \lg \frac{k 2^{(1-\alpha)} (2^\alpha + 1)}{3}.$$

Так, например, при $k=1$ для характеристики $F(x) = (\operatorname{mod} x)^{0,2} \times \operatorname{sign} x$

$$q(A) \approx \frac{1,25}{A^{0,8}}; \quad L(A) = 20 \lg 1,25 - 16 \lg A;$$

для характеристики $F(x) = (\text{mod } x)^{0,5} \text{ sign } x$

$$q(A) \approx 1,13/A^{0,5},$$

$$L(A) = 20 \lg 1,13 - 10 \lg A;$$

для характеристики $F(x) = (\text{mod } x)^{0,8} \text{ sign } x$

$$q(A) \approx 1,05/A^{0,2},$$

$$L(A) = 20 \lg 1,05 - 4 \lg A.$$

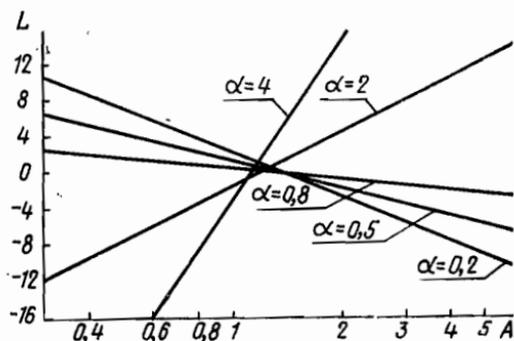


Рис. 9.14. Эквивалентные логарифмические характеристики элементов со степенными нелинейными характеристиками

Эквивалентные логарифмические характеристики для $\alpha = 0,2; 0,5; 0,8; 2$ и 4 показаны на рис. 9.14.

Логарифмические характеристики проходят с наклоном -16 дб/дек , -10 дб/дек и -4 дб/дек через точки с координатами $A = 1, L_1 = 2 \text{ дб}$, $L_2 = 1 \text{ дб}$ и $L_3 = 0,4 \text{ дб}$.

Чтобы оценить величину ошибки при расчете коэффициентов гармонической линеаризации по приближенным выражениям, целесообразно определить значения $q(A)$ для $\alpha = 2, 3$ и 4 соответственно, т. е.

$$\left. \begin{aligned} q(A) &\approx 2^{-1} (2^2 + 1) A/3 = 0,835A; \\ q(A) &\approx 2^{-2} (2^3 + 1) A^2/3 = 0,75A^2; \\ q(A) &\approx 2^{-3} (2^4 + 1) A^3/3 = 0,71A^3; \end{aligned} \right\} \quad (9.33)$$

и сравнить их с определенными точными значениями. Сравнение показывает, что результаты близки. Приведенные на рис. 9.14 логарифмические характеристики нелинейных элементов при $\alpha = 2$ и 4 проходят с наклоном 20 и 60 дб/дек соответственно.

Л о г а р и ф м и ч е с к и е х а р а к т е р и с т и к и л ю ф т а. Коэффициенты гармонической линеаризации люфта при $\mu \geq 1$ запишутся как

$$q(\mu) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\mu-2}{\mu} + \frac{2(\mu-2)}{\mu} \sqrt{\frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)} \right]; \quad (9.34)$$

$$q'(\mu) = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\mu-1}{\mu^2}. \quad (9.35)$$

Нормированные логарифмические характеристики люфта (рис. 9.15) выражаются формулами

$$L_0(\mu) = 20 \lg \sqrt{[q(\mu)]^2 + [q'(\mu)]^2}; \quad (9.36)$$

$$\varphi(\mu) = \arctg [q'(\mu)/q(\mu)]. \quad (9.37)$$

При малых значениях амплитуды люфт оказывает сильное влияние на работу системы, а при больших амплитудах влияние люфта на систему уменьшается.

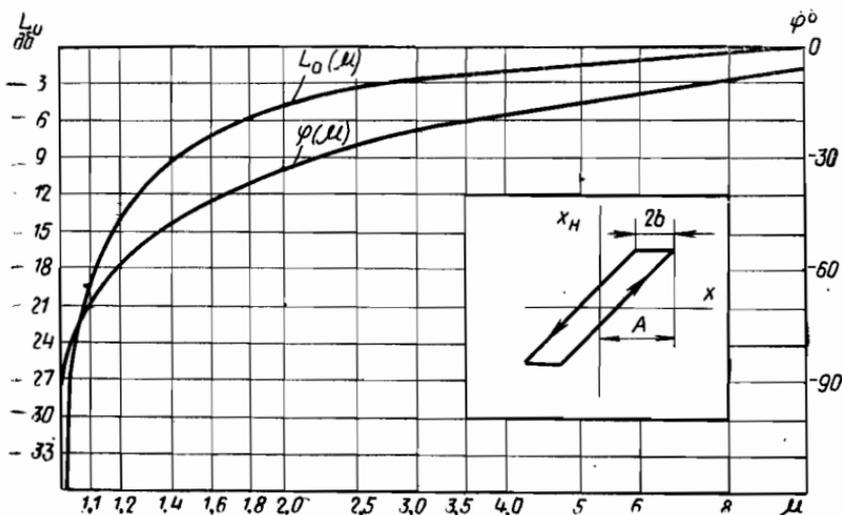


Рис. 9.15. Логарифмические характеристики люфта

Логарифмические характеристики люфта с ограничением. Нелинейная характеристика люфта с ограничением показана на рис. 9.16. Коэффициенты гармонической линеаризации при $k = 1$ и $\mu > h$ можно представить как

$$q(\mu) = \frac{1}{\pi} \left[\arcsin \frac{h}{\mu} + \arcsin \frac{h-2}{\mu} + \frac{h}{\mu} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{\mu}\right)^2} + \frac{h-2}{\mu} \sqrt{1 - \left(\frac{h-2}{\mu}\right)^2} \right]; \quad (9.38)$$

$$q'(\mu) = -4(h-1)/(\pi\mu^2). \quad (9.39)$$

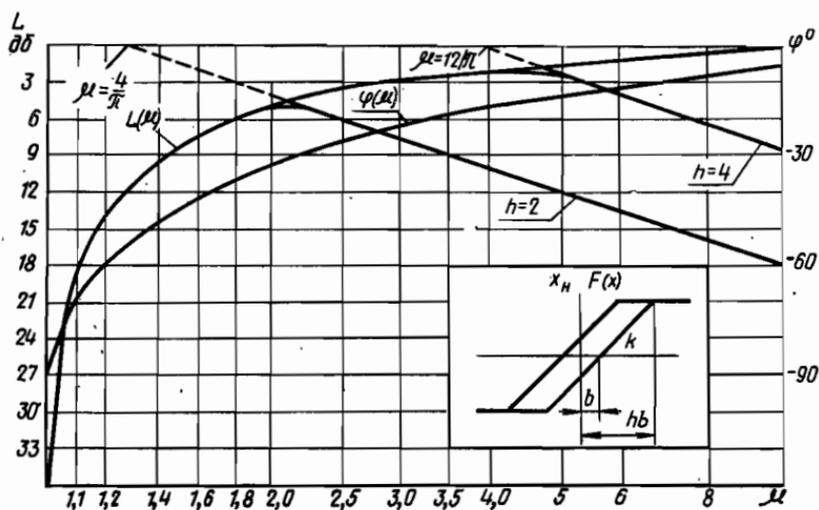


Рис. 9.16. Логарифмические характеристики люфта с ограничением

Нормированные логарифмические характеристики $L_0(\mu)$ и $\varphi(\mu)$ люфта с ограничением при $h = 2$ и 4 (сплошные) показаны на рис. 9.16. Логарифмические характеристики люфта с ограничением при $1 \leq \mu \leq h$ совпадают с характеристикой люфта, а при $\mu > h$ начинает оказывать влияние насыщение. При $\mu \gg h$ нормированная логарифмическая амплитудная характеристика люфта с ограничением стремится к асимптотической характеристике (штриховые)

$$L_{a0}(\mu) = 4(h - 1)/(\pi\mu), \quad (9.40)$$

проходящей через точку с координатами $L = 0$, $\mu = 4(h - 1)/\pi$ с наклоном -20 дб/дек.

§ 9.2. Симметричные периодические режимы в нелинейных системах

Симметричные периодические режимы в нелинейных системах с однозначными характеристиками нелинейного элемента $x_n = F(x)$. В таких системах коэффициент гармонической линеаризации $q'(A) = 0$, а следовательно, и фазовый сдвиг, вносимый нелинейным элементом, $\varphi_n(A) = 0$.

В этом случае периодическое решение уравнения нелинейной системы с однозначной характеристикой нелинейного элемента

$$[D(p) + N(p)q(A)]x = 0 \quad (9.41)$$

существует, если выполняются условия

$$L(\omega) = -L(A) = L_{кр}(\omega, A); \quad (9.42)$$

$$\varphi(\omega) = -\pi. \quad (9.43)$$

Уравнение (9.42) позволяет определить амплитуду $A = A_0$ периодического решения, а уравнение (9.43) — частоту $\omega = \omega_0$ этого решения.

При сравнительно простой линейной части решения этих уравнений могут быть получены аналитически. Однако в большинстве случаев эти уравнения целесообразно решать графически. При исследовании систем с типовыми нелинейными характеристиками удобно пользоваться нормированными характеристиками линейной части $L_0(\omega)$ и нелинейного элемента $L_0(A)$. При этом вместо условия (9.41) будет иметь место условие

$$L_0(\omega) = -L_0(A) = L_{кpo}(\omega, A). \quad (9.44)$$

Если при определении периодического решения воспользоваться характеристикой нелинейного элемента $L_0(\mu)$, то на основании условия

$$L_0(\omega) = -L_0(\mu) = L_{кpo}(\omega, \mu) \quad (9.45)$$

можно определить относительное значение амплитуды периодического решения $\mu = A/b$.

Пример 9.1. Определим периодическое решение в нелинейной системе с ограничением. Нормированные амплитудно-фазовая характеристика $W_0(j\omega)$, логарифмические характеристики $L_0(\omega)$ и $\varphi_0(\omega)$ линейной части системы построены на рис. 9.17, а и б. На этом же рисунке показаны нормированные обратные характеристики ограничения $-W_H^{-1}(\mu) = -1/q(\mu)$ и $-L_0(\mu)$.

В рассматриваемой системе имеет место одно периодическое решение с амплитудой $\mu = \mu_0$ и частотой $\omega = \omega_0$. При этом частота периодического решения ω_0 определяется в точке пересечения фазовой характеристики $\varphi(\omega)$ и линии $-\pi$. Амплитуда периодического решения $\mu = \mu_0$ находится из условия (9.45) по характеристикам $L_0(\omega)$ и $-L_0(\mu)$. Графический способ получения амплитуды

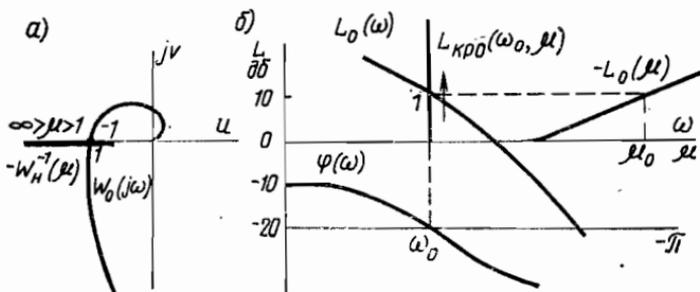


Рис. 9.17. Определение периодического решения

периодического решения μ_0 показан на рисунке штриховой линией. Чтобы увеличить наглядность при последующем анализе устойчивости периодического решения, целесообразно изображать логарифмическую характеристику критического коэффициента передачи $L_{кр0}(\omega_0, \mu)$ (см. рис. 9.17), причем на этой характеристике необходимо указывать стрелкой направление движения, при котором увеличивается амплитуда периодического решения μ_0 .

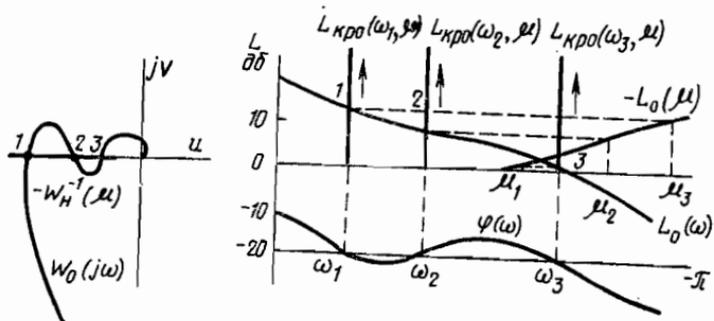


Рис. 9.18. Определение периодических решений в нелинейной системе с ограничением

Пример 9.2. Определим, в частности, периодические решения в нелинейной системе с ограничением (рис. 9.18). В такой системе имеется три периодических решения с частотами ω_1 , ω_2 и ω_3 , соответствующими точкам пересечения фазовой характеристики $\varphi(\omega)$ с линией $-\pi$.

Амплитуды периодического решения μ_1 , μ_2 и μ_3 находятся по точкам пересечения нормированной логарифмической амплитудной характеристики $L_0(\omega)$ с характеристиками

$$L_{кр0}(\omega_1, \mu), \quad L_{кр0}(\omega_2, \mu) \quad \text{и} \quad L_{кр0}(\omega_3, \mu).$$

В ряде случаев уравнение системы может иметь два периодических решения с одной частотой ω и разными амплитудами μ_1 и μ_2 .

Пример 9.3. Найдем частоту и амплитуды периодических решений в системе, релейный элемент которой имеет зону нечувствительности, если передаточная функция линейной части системы

$$W(s) = k / [s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)];$$

где $k = 200 \text{ сек}^{-1}$, $T_1 = 2 \text{ сек}$, $T_2 = 0,05 \text{ сек}$.

Нормированные логарифмические характеристики $L_0(\omega)$ и $-L_0(\mu)$ линейной части системы и релейного элемента показаны на рис. 9.19. На этом же рисунке построены фазовая характеристика $\varphi(\omega)$ и характеристика критического коэффициента передачи $L_{\text{КРР}}(\omega_0, \mu)$.

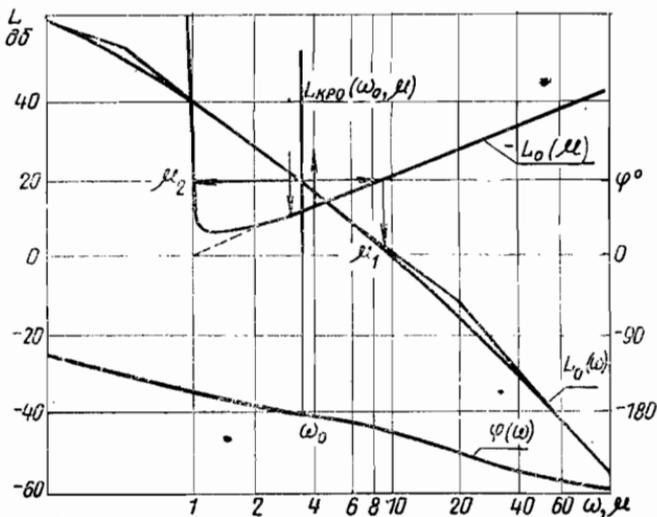


Рис. 9.19. Определение периодического решения в релейной системе с зоной нечувствительности

Частота периодического решения $\omega_0 = 3,3 \text{ сек}^{-1}$ определяется в точке пересечения фазовой характеристики $\varphi(\omega)$ и линии $-L_0(\mu)$. Амплитуды периодических решений $\mu_1 = 8,3$ и $\mu_2 = 1,05$ находятся по характеристикам $L_0(\omega)$, $-L_0(\mu)$ и $L_{\text{КРР}}(\omega_0, \mu)$.

При исследовании устойчивости периодического решения уравнения (9.41), т. е. при определении существования автоколебаний, следует предположить, что амплитуда имеет малые приращения $\pm \Delta A$, и исследовать устойчивость системы при $A_0 \pm \Delta A$. Если при малых по величине приращениях $\Delta A > 0$ все корни уравнения

$$[D(p) + N(p)q(A_0 + \Delta A)] = 0 \dots \quad (9.46)$$

лежат в левой полуплоскости, а часть корней уравнения

$$[D(p) + N(p)q(A_0 - \Delta A)] = 0 \quad (9.47)$$

лежит в правой полуплоскости, т. е. система неустойчива, то периодическое решение с амплитудой A_0 устойчиво, так как колебания с амплитудой $(A_0 + \Delta A)$ затухают, а с амплитудой $(A_0 - \Delta A)$ расходятся.

При исследовании устойчивости периодических решений по логарифмическим характеристикам следует пользоваться критерием Най-

квиста. Предварительно следует сформулировать критерий устойчивости периодического решения для амплитудно-фазовых характеристик $W_0(j\omega)$, учитывающий переходы характеристики $W_0(f\omega)$ через отрезки вещественной оси $[-\infty, -R_0^{-1}(A_0 + \Delta A)]$ и $[-\infty, -R_0^{-1}(A_i - \Delta A)]$.

Периодическое решение устойчиво, если при изменении частоты ω от 0 до ∞ при $\Delta A > 0$ разность между числом положительных (сверху вниз) и отрицательных (снизу вверх) переходов амплитудно-фазовой характеристики линейной части системы $W_0(j\omega)$ через отрезок вещественной оси $[-\infty, -R_0^{-1}(A_0 + \Delta A)]$ равна нулю, а через отрезок вещественной оси $[-\infty, -R_0^{-1}(A_0 - \Delta A)]$ не равна нулю.

Исследуем устойчивость периодических решений в рассмотренных системах. Периодическое решение в системе с характеристиками, показанными на рис. 9.17, устойчиво, так как амплитудно-фазовая характеристика $W_0(j\omega)$ пересекает один раз отрезок вещественной оси $[-\infty, -R^{-1}(\mu_0 - \Delta\mu)]$ и не пересекает отрезок вещественной оси $[-\infty, -R^{-1}(\mu_0 + \Delta\mu)]$.

На основе критерия устойчивости, учитывающего переходы амплитудно-фазовой характеристики $W_0(j\omega)$ через соответствующие отрезки вещественной оси, можно сформулировать критерий для исследования устойчивости периодических решений по логарифмическим характеристикам.

Периодическое решение с частотой ω_0 и амплитудой A_0 устойчиво, если с изменением частоты от 0 до ∞ при $\Delta A > 0$ разность между числом положительных (снизу вверх) и отрицательных (сверху вниз) переходов фазовой характеристики линейной части системы $\varphi(\omega)$ через линию $-\pi$ равна нулю в диапазоне частот, где $L_0(\omega) \geq L_0(A_0 + \Delta A)$, и не равна нулю в диапазоне частот, где $L_0(\omega) \geq L_0(A_0 - \Delta A)$.

В формулировке критерия устойчивости вместо характеристик $L_0(A_0 + \Delta A)$ и $L_0(A_0 - \Delta A)$ можно использовать характеристики $L_{кр0}(\omega_0, A_0 + \Delta A)$ и $L_{кр0}(\omega_0, A_0 - \Delta A)$.

Пример 9.4. Исследуем устойчивость периодических решений в рассмотренных выше примерах.

Периодическое решение с частотой ω_0 и амплитудой $\mu = \mu_0$ (см. рис. 9.17) устойчиво. Из трех периодических решений, определенных на рис. 9.18, устойчивы два решения. Периодическое решение с частотой ω_1 и амплитудой μ_1 устойчиво, так как в диапазоне частот, где $L_0(\omega) \geq L_{кр0}(\omega_1, A_1 + \Delta A)$, фазовая характеристика $\varphi(\omega)$ не пересекает линию $-\pi$, а в диапазоне частот, где $L_0(\omega) \geq L_{кр0}(\omega_1, A_1 - \Delta A)$, фазовая характеристика один раз пересекает линию $-\pi$. Периодическое решение с частотой ω_2 и амплитудой μ_2 неустойчиво, так как в диапазоне частот, где $L_0(\omega) \geq L_{кр0}(\omega_2, A_2 + \Delta A)$, фазовая характеристика один раз пересекает линию $-\pi$. Высокочастотное периодическое решение с частотой ω_3 и амплитудой μ_3 устойчиво. Действительно, в диапазоне частот, где $L_0(\omega) \geq L_{кр0}(\omega_3, A_3 + \Delta A)$, имеется один отрицательный и один положительный переход фазовой характеристики $\varphi(\omega)$ через линию $-\pi$, а в диапазоне частот, где $L_0(\omega) \geq L_{кр0}(\omega_3, A_3 - \Delta A)$, имеется два отрицательных и один положительный переход фазовой характеристики $\varphi(\omega)$ через линию $-\pi$.

В рассматриваемой системе (см. рис. 9.17) при малых по величине возмущениях установятся высокочастотные автоколебания с частотой ω_3 и амплитудой μ_3 , а при больших по величине возмущениях установятся низкочастотные автоколебания с частотой ω_1 и амплитудой μ_1 . В релейной системе (см. рис. 9.18) периодическое решение с малой амплитудой μ_2 неустойчиво, а периодическое решение с большой амплитудой μ_1 устойчиво.

Исследование симметричных периодических режимов в нелинейных системах по логарифмическим характеристикам линейной части и нелинейного элемента с однозначными нелинейными характеристиками дает большие преимущества. При этом просто исследовать сложные системы, описываемые уравнениями высокого порядка, а также выявлять влияние отдельных параметров на характер процессов в нелинейной системе и т. д.

Симметричные периодические режимы в нелинейных системах с неоднозначными характеристиками нелинейного элемента $x_{н} = F(x)$. В таких системах коэффициент гармонической линеаризации $q'(A) \neq 0$, следовательно, и фазовый сдвиг, вносимый нелинейным элементом в систему, $\varphi(A) \neq 0$, что несколько усложняет методику исследования.

Периодическое решение уравнения нелинейной системы с неоднозначной характеристикой нелинейного элемента

$$\{D(p) + N(p) [q(A) + q'(A) p/\omega]\}x = 0 \quad (9.48)$$

существует, если выполняются условия

$$L(\omega) = -L(A) = -20 \lg R(A); \quad (9.49)$$

$$\varphi(\omega) = -\pi - \varphi(A) = \varphi_k(A), \quad (9.50)$$

в каждое из которых входит амплитуда A и частота ω . Следовательно, чтобы определить параметры периодического решения, уравнения (9.49) и (9.50) необходимо решать совместно.

При исследовании нелинейных систем по логарифмическим характеристикам целесообразно, определяя периодические решения, вместо выражений (9.49) и (9.50) пользоваться условием

$$L(\omega) = L_{кр}(\omega, A), \quad (9.51)$$

связывающим логарифмические амплитудные характеристики линейной части $L(\omega)$ и критического коэффициента передачи $L_{кр}(\omega, A)$.

Ординаты характеристики $L_{кр}(\omega, A)$ находятся аналитически или графо-аналитически по уравнениям (9.49), (9.50) или характеристикам $\varphi(\omega)$, $\varphi_k(A)$, $L(A)$, если задаться рядом фиксированных значений амплитуд A_1, A_2 и т. д.

Для заданного значения A_i на основании (9.50) определяется частота ω_i , а на основании (9.49) — ордината

$$L_{кр}(\omega_i, A_i) = -L(A_i).$$

В случае исследования систем с типовыми нелинейными характеристиками целесообразно пользоваться нормированными характеристиками линейной части системы $L_0(\omega)$ и нелинейного элемента $L_0(A)$. При этом вместо условия (9.51) будет иметь место условие

$$L_0(\omega) = L_{кpo}(\omega, A). \quad (9.52)$$

Относительная амплитуда периодического решения $\mu = A/b$ также находится из характеристик линейной части системы $L_0(\omega)$ и критиче-

ского коэффициента передачи $L_{кр0}(\omega, \mu)$. В этом случае характеристика $L_{кр0}(\omega, \mu)$ определяется по уравнениям

$$L_0(\omega) = -L_0(\mu) = -20 \lg R(\mu); \quad (9.53)$$

$$\varphi(\omega) = -\pi - \varphi(\mu) = \varphi_k(\mu), \quad (9.54)$$

позволяющим определить существование периодического решения с амплитудой μ_0 и частотой ω_0 .

Пример 9.5. Рассмотрим релейную систему, у которой характеристика релейного элемента имеет зону нечувствительности и гистерезис (рис. 9.20). Передаточная функция линейной части обозначена через W (s).

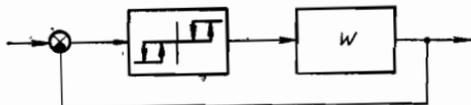


Рис. 9.20. Структура нелинейной системы с релейным элементом, имеющим зону нечувствительности и гистерезис

Нормированная амплитудно-фазовая характеристика линейной части $W_0(j\omega)$ и нормированная обратная характеристика релейного элемента $-W_H^{-1}(\mu)$ показаны на рис. 9.21, а, на рис. 9.21, б приведены нормированные логарифмические характеристики линейной части $L_0(\omega)$ и релейного элемента $-L_0(\mu)$, а также

фазовые характеристики $\varphi(\omega)$, $\varphi_k(\mu)$ и характеристика критического коэффициента передачи $L_{кр0}(\omega, \mu)$. Стрелками на рисунке показан ход определения одной из точек (точки 1) характеристики $L_{кр0}(\omega, \mu)$.

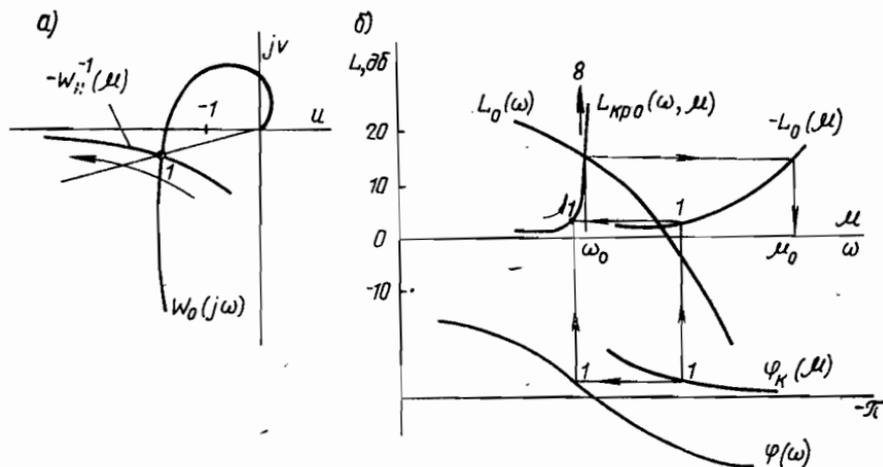


Рис. 9.21. Определение периодического решения в нелинейной системе с неоднозначной характеристикой нелинейного элемента

Пример 9.6. Исследуем существование периодических решений в релейной системе (см. рис. 9.20) при более сложной частотной характеристике линейной части. Нормированная амплитудно-фазовая характеристика линейной части $W_0(j\omega)$ трижды пересекает (рис. 9.22, а, точки 1, 2, и 3) обратную характеристику релейного элемента $-W_H^{-1}(\mu)$. Следовательно, уравнение системы имеет три периодических решения. На рис. 9.22, б показаны нормированные амплитудные характеристики линейной части $L_0(\omega)$ и релейного элемента $-L_0(\mu)$, фазовые

характеристики $\Phi(\mu)$ и $\Phi_k(\mu)$, а также ветви характеристики критического коэффициента передачи $L_{кр0}(\omega, \mu)$. Периодические решения $(\omega_1, \mu_1; \omega_2, \mu_2; \omega_3, \mu_3)$ определяются в точках пересечения логарифмических характеристик $L_0(\omega)$ и $L_{кр0}(\omega, \mu)$.

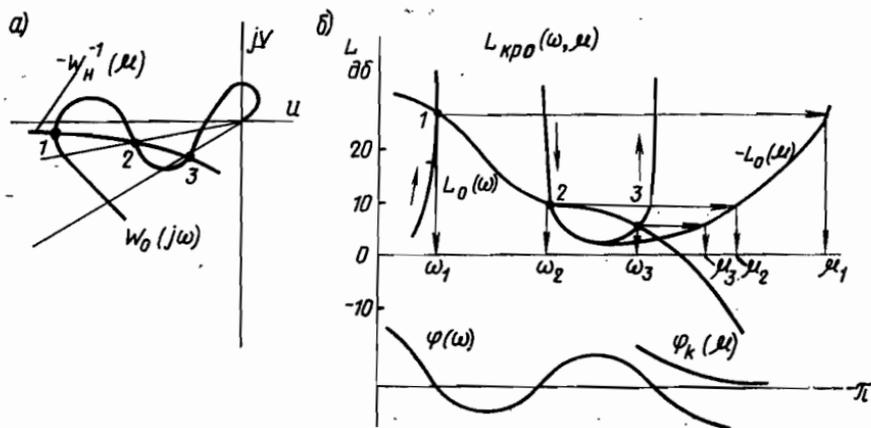


Рис. 9.22. Определение периодических решений

Периодическое решение уравнения (9.48) нелинейной системы с неоднозначной характеристикой нелинейного элемента устойчиво, если при малых по величине приращениях $\Delta A > 0$ все корни уравнения

$$[D(p) + N(p) \{q(A + \Delta A) + q'(A + \Delta A)p/\omega\}] = 0 \quad (9.55)$$

лежат в левой полуплоскости, а часть корней уравнения

$$[D(p) + N(p) \{q(A - \Delta A) + q'(A - \Delta A)p/\omega\}] = 0 \quad (9.56)$$

лежит в правой полуплоскости.

При исследовании устойчивости периодического решения по амплитудно-фазовым характеристикам можно сформулировать критерий, учитывающий переходы характеристики $W_0(j\omega)$ через отрезки линий:

$$\operatorname{Re} \{ [-\pi + \Phi(A_0 + \Delta A)] \}, \quad R \geq R^{-1}(A_0 + \Delta A);$$

$$\operatorname{Re} \{ [-\pi + \Phi(A_0 - \Delta A)] \}, \quad R \geq R^{-1}(A_0 - \Delta A).$$

Периодическое решение с частотой ω_0 и амплитудой A_0 устойчиво, если с изменением частоты ω от 0 до ∞ при $\Delta A > 0$ разность между числом положительных (сверху вниз) и отрицательных (снизу вверх) переходов амплитудно-фазовой характеристики линейной части системы $W_0(j\omega)$ через отрезок линии

$$\operatorname{Re} \{ [-\pi + \Phi(A_0 + \Delta A)] \}, \quad R \geq R^{-1}(A_0 + \Delta A),$$

равна нулю, а через отрезок линии

$$\operatorname{Re} \{ [-\pi + \Phi(A_0 - \Delta A)] \}, \quad R \geq R^{-1}(A_0 - \Delta A),$$

не равна нулю.

Аналогично можно сформулировать критерий устойчивости, позволяющий исследовать устойчивость периодического решения по логарифмическим частотным характеристикам.

Периодическое решение устойчиво, т. е. в нелинейной системе существуют автоколебания с частотой ω_0 и амплитудой A_0 , если с изменением частоты ω от 0 до $+\infty$ при $\Delta A > 0$ выполняются следующие условия:

а) разность между числом положительных и отрицательных переходов фазовой характеристики линейной части системы через линии $\varphi_h(A_0 + \Delta A) = -\pi - \varphi(A_0 + \Delta A)$ равна нулю при всех значениях ω , где $L_0(\omega) > -L_0(A + \Delta A)$;

б) разность между числом положительных и отрицательных переходов фазовой характеристики линейной части системы через линии $\varphi_h(A_0 - \Delta A) = -\pi - \varphi(A_0 - \Delta A)$ не равна нулю в диапазоне частот, где

$$L_0(\omega) \geq L_0(A_0 - \Delta A).$$

Периодическое решение неустойчиво, т. е. в системе не могут существовать автоколебания с частотой ω_0 , если хотя бы одно из этих условий не выполняется.

Под положительным переходом фазовой характеристики линейной части системы $\varphi(\omega)$ через линии $\varphi_h(A_0 + \Delta A)$ и $\varphi_h(A_0 - \Delta A)$ понимается переход снизу вверх при изменении частоты от 0 до ∞ , а под отрицательным — переход $\varphi(\omega)$ сверху вниз.

Если в формулировке критерия устойчивости характеристики $L_0(A_0 + \Delta A)$ и $L_0(A_0 - \Delta A)$ заменить характеристиками $L_{\text{кpo}}(\omega_0, A_0 + \Delta A)$ и $L_{\text{кpo}}(\omega_0, A_0 - \Delta A)$, то при исследовании устойчивости периодического решения можно пользоваться характеристикой $L_{\text{кpo}}(\omega, \quad)$.

Пример 9.7. Исследуем устойчивость периодических решений в системах с характеристиками, показанными на рис. 9.21 и 9.22.

Периодическое решение с частотой ω_0 и амплитудой A_0 в системе с характеристиками, приведенными на рис. 9.21, устойчиво, так как фазовая характеристика $\varphi(\omega)$ не пересекает линию $\varphi_h(A_0 + \Delta A)$ в диапазоне частот, где $L_0(\omega) \geq -L_0(A_0 + \Delta A)$, и один раз пересекает линию $\varphi_h(A_0 - \Delta A)$ в диапазоне частот, где $L_0(\omega) > -L_0(A_0 - \Delta A)$.

В системе с характеристиками, показанными на рис. 9.22, периодические решения ω_1, μ_1 и ω_3, μ_3 устойчивы, а периодическое решение ω_2, μ_2 неустойчиво. Высокочастотный периодический режим (ω_3, μ_3) возникает в системе при малых возмущениях, низкочастотный периодический режим (ω_1, μ_1) — при больших возмущениях.

Симметричные периодические режимы в системах с нелинейными элементами, характеристики которых зависят от частоты. При исследовании систем с характеристиками нелинейного элемента $x_H = F(x, px)$ или более сложными нелинейными характеристиками $x_H = F(x, px, px^2)$ и т. д. возникают дополнительные затруднения, обусловленные тем, что характеристики нелинейного элемента зависят от амплитуды A и частоты ω .

Периодическое решение уравнения нелинейной системы с нелинейным элементом, зависящим от частоты

$$\{D(p) + N(p) [q(A_1\omega) + q'(A, \omega) p/\omega]\} x = 0, \quad (9.57)$$

существует, если выполняются условия

$$L(\omega) = -L(A, \omega) = L_{кр}(A, \omega); \quad (9.58)$$

$$\varphi(\omega) = -\pi - \varphi(A, \omega) = \varphi_k(A, \omega). \quad (9.59)$$

Каждое из уравнений (9.58) и (9.59) зависит от амплитуды A и частоты ω , поэтому при определении периодического решения (9.57) эти условия необходимо решить совместно. Для этого можно рекомендовать два варианта.

Первый вариант совместного решения уравнений (9.58) и (9.59) целесообразно применять в тех случаях, когда заданы семейства логарифмических амплитудных $L(\omega, A_i)$ и фазовых $\varphi(\omega, A_i)$ характеристик нелинейного элемента при нескольких фиксированных значениях амплитуды колебаний A_i на входе нелинейного элемента. Характеристики $L(\omega, A_i)$ и $\varphi(\omega, A_i)$ можно определить аналитически или получить экспериментально. Чтобы найти периодическое решение уравнения (9.57), необходимо построить семейство логарифмических характеристик нелинейного элемента

$$-L(\omega, A_i), \varphi_k(\omega, A_i) = -\pi - \varphi(\omega, A_i) \quad (9.60)$$

и характеристики $L(\omega)$, $\varphi(\omega)$ линейной части системы (рис. 9.23).

Пересечение фазовых характеристик $\varphi(\omega)$ и $\varphi_k(\omega, A_i)$ дает возможные частоты периодического решения ω_i при заданной амплитуде A_i . Каждой частоте ω_i соответствует критическое значение коэффициента передачи линейной части системы

$$L_{кр}(\omega_i, A_i) = -L(\omega_i, A_i), \quad (9.61)$$

получаемое по амплитудной характеристике нелинейного элемента. По найденным значениям $L_{кр}(\omega_i, A_i)$ при различных A_i строится характеристика критического коэффициента передачи $L_{кр}(\omega, A)$, как это показано на рис. 9.23.

Точки пересечения характеристик $L(\omega)$ и $L_{кр}(\omega, A)$ дают возможность найти частоту ω_0 и амплитуду A_0 периодического решения. При этом частота определяется непосредственно в точке пересечения характеристик, а амплитуда — в результате интерполяции по ближайшим значениям A_i .

Устойчивость периодического решения устанавливается по результатам исследования устойчивости системы при амплитудах периодического решения $A_0 \pm \Delta A$. Если характеристика $L_{кр}(\omega, A)$ лежит выше характеристики $L(\omega)$, то при заданных значениях A_i в системе периодического решения не существует. Периодический режим в нелинейной системе с характеристиками, показанными на рис. 9.23, устойчив, так как при $A_0 + \Delta A$ система устойчива, а при $A_0 - \Delta A$ — неустойчива.

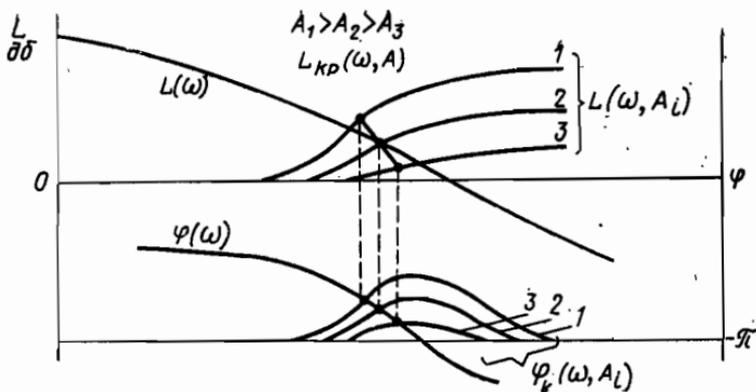


Рис. 9.23. Семейство логарифмических характеристик нелинейного элемента и характеристики линейной части

Второй вариант совместного решения уравнений (9.58) и (9.59) следует применять в тех случаях, когда заданы семейства логарифмических характеристик $L(\omega, A_i)$ и $\varphi(\omega, A_i)$ разомкнутой нелинейной системы, определенных аналитически или полученных экспериментально для нескольких фиксированных значений амплитуды A_i на входе системы. В этом случае условия существования периодического решения (9.58) и (9.59) следует заменить условиями

$$L(\omega, A) = 0; \quad \varphi(\omega, A) = -\pi. \quad (9.62)$$

На рис. 9.24 показаны логарифмические характеристики системы $L(\omega, A_i)$, $\varphi(\omega, A_i)$ с включенной последовательно нелинейной интегрирующей RC -цепью. При увеличении амплитуды сигнала

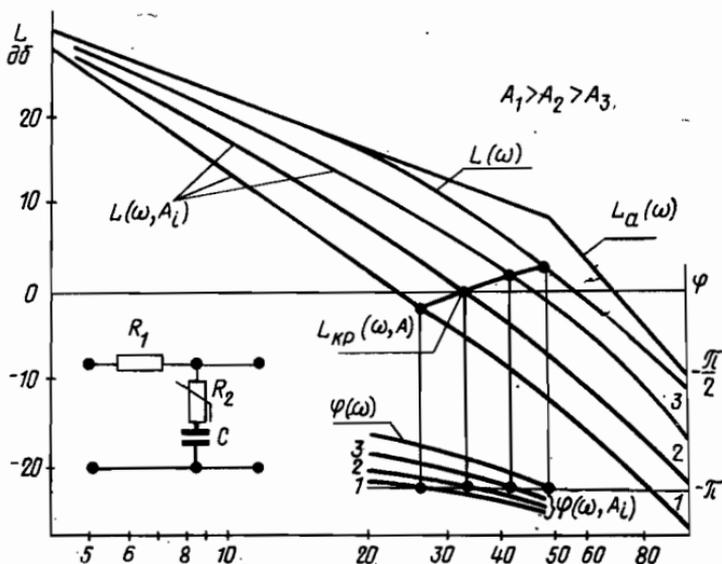


Рис. 9.24. Семейство логарифмических характеристик системы с нелинейной RC -цепью

на входе нелинейной RC -цепи уменьшается величина сопротивления R_2 , а следовательно, и коэффициент передачи системы в диапазоне средних и высоких частот. На этом же рисунке показаны характеристики $L(\omega)$, $\varphi(\omega)$ и асимптотическая характеристика $L_a(\omega)$ системы при малых сигналах ($A \rightarrow 0$), когда нелинейная характеристика RC -цепи может быть заменена предельной линейной характеристикой.

Порядок определения периодического решения в нелинейной системе заключается в следующем. Из условия $\varphi(\omega, A_i) = -\pi$ в точках пересечения фазовых характеристик $\varphi(\omega, A_i)$ с линией $-\pi$ находится возможная частота периодического решения ω_i при амплитуде колебаний A_i . Через соответствующие точки амплитудных характеристик $L(\omega_i, A_i)$ проводится характеристика критического коэффициента передачи $L_{кр}(\omega, A)$. Окончательно периодическое решение получается при $L_{кр}(\omega, A) = 0$ в точке пересечения характеристики критического коэффициента передачи $L_{кр}(\omega, A)$ с осью абсцисс (см. рис. 9.24). При этом частота периодического решения ω_0 определяется непосредственно в точке пересечения характеристики $L_{кр}(\omega, A)$ с осью абсцисс, а амплитуда A_0 — в результате интерполяции по ближайшим значениям A_i .

Исследование устойчивости периодического решения проводится обычным образом. В системе (см. рис. 9.24) периодическое решение с частотой $\omega_0 = 35 \text{ сек}^{-1}$ устойчиво, так как при амплитуде колебаний $A_3 < A_0$ система неустойчива, а при $A_2 > A_0$ — устойчива. Амплитуда автоколебаний $A_2 > A_0 > A_3$ определяется по ближайшим значениям A_i .

§ 9.3. Синтез нелинейных систем с заданными значениями амплитуды и частоты автоколебаний

Методика синтеза нелинейных систем автоматического управления, использующая метод гармонической линеаризации, определяется характером поставленной задачи и видом нелинейных элементов, включаемых в систему. Далее рассматривается методика синтеза нелинейных систем по логарифмическим характеристикам, позволяющая выбрать параметры нелинейного элемента и линейной части системы таким образом, чтобы автоколебания в системе отсутствовали или имели заданные значения амплитуды A_0 и частоты ω_0 .

Синтез систем с однозначной характеристикой нелинейного элемента. Предположим, что задана нормированная однозначная характеристика нелинейного элемента $x_H = F(x)$, включенного последовательно с линейной частью системы. Необходимо определить параметры системы, при которых автоколебания имеют заданные значения амплитуды A_0 и частоты ω_0 .

Чтобы получить заданные параметры, необходимо выполнить условия

$$L_0(\omega_0) = -L_0(A_0); \quad (9.63)$$

$$\varphi(\omega_0) = -\pi, \quad (9.64)$$

т. е. необходимо, чтобы нормированные логарифмические характеристики линейной части системы $\varphi(\omega)$ и $L_0(\omega)$ при частоте ω_0 проходили через контрольные точки O_1 и O_2 с координатами $[\omega_0, -L_0(\mu_0)]$ и $[\omega_0, -\pi]$, как это показано на рис. 9.25 для системы с насыщением. Значение $-L_0(\mu_0)$ определяется по нормированной логарифмической амплитудной характеристике нелинейного элемента.

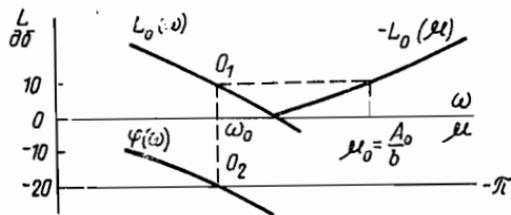


Рис. 9.25. Синтез системы с однозначной характеристикой нелинейного элемента при заданных значениях амплитуды и частоты автоколебаний

амплитуды автоколебаний A_0 выбрать требуемый коэффициент передачи в системе и параметры нелинейного элемента.

После выбора параметров системы необходимо исследовать устойчивость полученного периодического решения. Если периодическое решение устойчиво, то задача синтеза решена правильно; если периодическое решение неустойчиво, то необходимо соответствующим образом изменить характеристики линейной части системы.

Часто параметры системы выбираются таким образом, чтобы автоколебания отсутствовали.

В системе с однозначной характеристикой нелинейного элемента $x_{н} = F(x)$ автоколебаний не будет, если при частоте ω^* , соответствующей фазовому сдвигу

$$\varphi(\omega^*) = -\pi, \quad (9.65)$$

выполняется условие

$$L_0(\omega^*) < L_{кр}, \quad (9.66)$$

т. е. нормированная логарифмическая амплитудная характеристика $L_0(\omega)$ проходит ниже контрольной точки O_1 , показанной на рис. 9.26 для системы с зоной нечувствительности.

Таким образом, методика синтеза систем с однозначной характеристикой нелинейного элемента по логарифмическим характеристикам подобна методике синтеза линейных систем при заданном запасе устойчивости по модулю.

В большинстве случаев при синтезе системы целесообразно использовать относительное значение амплитуды $\mu_0 = A_0/b$ и соответствующие нормированные логарифмические характеристики нелинейного элемента $L_0(\mu)$, построенные для относительного значения амплитуды.

В рассматриваемом случае условие для фазовой характеристики (9.64) позволяет по заданному значению частоты автоколебаний ω_0 выбрать необходимые постоянные времени системы и параметры корректирующих цепей. Условие для амплитудной характеристики (9.63) позволяет по заданному значению амплитуды автоколебаний A_0 выбрать требуемый коэффициент передачи

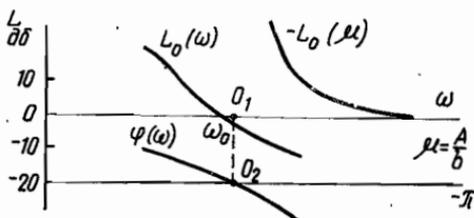


Рис. 9.26. Синтез системы, удовлетворяющей условию отсутствия автоколебаний

Синтез систем с неоднозначной характеристикой нелинейного элемента $x_n = F(x)$. Методика синтеза таких систем практически мало отличается от рассмотренной выше методики синтеза систем с однозначной характеристикой нелинейного элемента. Чтобы в нелинейной системе с неоднозначной характеристикой нелинейного элемента были возможны автоколебания с амплитудой A_0 и частотой ω_0 , необходимо выполнить условия

$$L_0(\omega_0) = -L_0(A_0); \quad (9.67)$$

$$\varphi(\omega_0) = -\pi - \varphi(A_0) = \varphi_h(A_0), \quad (9.68)$$

т. е. необходимо, чтобы нормированные логарифмические характеристики линейной части проходили через точки O_1 и O_2 с координатами $[\omega_0, -L_0(A_0)]$

и $[\omega_0, \varphi_h(A_0)]$, как это показано на рис. 9.27 для релейной системы с гистерезисом. Значения $\varphi_h(A_0)$ и $-L_0(A_0)$ определяются по соответствующим нормированным характеристикам нелинейного элемента.

После выбора параметров линейной части системы и нелинейного элемента исследуется устойчивость найденного периодического решения. Отсутствие автоколебаний в системе можно обеспечить при всех значениях A в диапазоне частот, где

$$\varphi(\omega) = -\pi - \varphi(A) = \varphi_h(A) \quad (9.69)$$

при выполнении условия

$$L_0(\omega) < -L_0(A). \quad (9.70)$$

Вместо условий (9.69) и (9.70) можно пользоваться условием

$$L_0(\omega) < L_{кр}(\omega, A), \quad (9.71)$$

связывающим нормированную логарифмическую амплитудную характеристику линейной части системы $L_0(\omega)$ и характеристику критического коэффициента передачи $L_{кр}(\omega, A)$. Характеристика $L_{кр}(\omega, A)$ строится по характеристикам $\varphi(\omega)$, $\varphi_h(A)$ и $-L_0(A)$, как это показано в § 9.2.

На рис. 9.28 показаны характеристики $\varphi(\omega)$, $L_0(\omega)$, $\varphi_h(\mu)$, $-L_0(\mu)$ и $L_{кр}(\omega, \mu)$ для релейной системы с гистерезисом и зоной нечувствительности. Характеристика $L_0(\omega)$ не пересекает характеристику $L_{кр}(\omega, \mu)$, следовательно, автоколебания в системе отсутствуют.

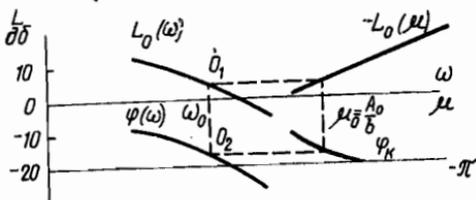


Рис. 9.27. Синтез системы с неоднозначной характеристикой нелинейного элемента при заданных значениях амплитуды и частоты автоколебаний

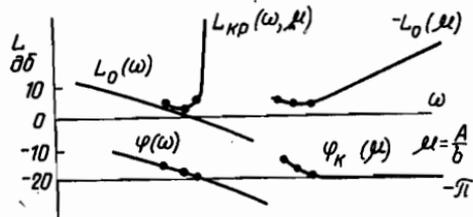


Рис. 9.28. Характеристика релейной системы, в которой отсутствуют автоколебания

§ 9.4. Переходные процессы в нелинейных системах

Исследование затухающих и расходящихся колебательных процессов в нелинейных системах. Одним из приближенных методов оценки качества колебательного переходного процесса в нелинейных системах является метод, разработанный Е. П. Поповым на основе обобщения асимптотического метода Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова на быстрозатухающие переходные процессы.

При исследовании переходного процесса в нелинейной системе (см. рис. 9.1) по методу Е. П. Попова предполагается, что переходный процесс в основном определяется парой ближайших к мнимой оси комплексных корней $s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega$, а линейная часть системы удовлетворяет условию фильтра.

Первое приближение для переходного процесса на входе нелинейного элемента ищется в виде

$$x = a \sin \psi; \quad (9.72)$$

$$da/dt = \alpha a; \quad \omega = d\psi/dt, \quad (9.73)$$

где α и ω — медленно меняющиеся функции времени.

По аналогии с линейными системами величина α называется *показателем затухания*, а ω — *частотой колебаний*, хотя эти величины и не являются постоянными, а зависят от начальных условий, параметров системы и времени.

Текущие значения амплитуды a и частоты ω определяются уравнениями

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 \exp \left(- \int_0^t \alpha dt \right); \\ \omega &= d\psi/dt, \end{aligned} \right\} \quad (9.74)$$

где $\psi = \int_0^t (\omega dt + \psi_0)$, в которые входят начальные значения амплитуды a_0 и фазы ψ_0 .

При анализе и синтезе линейных систем автоматического управления с колебательным переходным процессом вместо показателя затухания α , характеризующего уменьшение ($\alpha > 0$) или увеличение ($\alpha < 0$) амплитуды колебаний за единицу времени, можно пользоваться *логарифмическим декрементом затухания*

$$\delta_0 = \ln \operatorname{mod} \frac{x(t)}{x(t + T/2)} = \frac{\pi \alpha}{\omega}, \quad (9.75)$$

где $x(t)$ и $x(t + T/2)$ — ординаты двух соседних экстремумов колебательных процессов.

Логарифмический декремент затухания характеризует уменьшение ($\delta_0 > 0$) или увеличение ($\delta_0 < 0$) амплитуды колебаний за половину периода и поэтому позволяет сравнить скорость затухания колебаний в системах с различной частотой.

При расчете систем по логарифмическим характеристикам целесообразно вместо логарифмического декремента затухания для оценки качества переходного процесса применять затухание

$$\delta = \alpha/\omega = \delta_0/\pi, \quad (9.76)$$

которое также характеризует уменьшение ($\delta < 0$) или увеличение ($\delta > 0$) амплитуды колебаний за половину периода $\psi = \pi$:

$$x = a_0 \exp(-\delta\psi) \sin \psi \quad (\psi = \omega t). \quad (9.77)$$

На рис. 9.29 показаны кривые

$$x_{i+1}/x_i = F_1(\delta)$$

$$\text{и } x_{i+1}/x_i = F_2(\delta),$$

позволяющие по заданному значению затухания δ определить отношение двух соседних экстремумов (амплитуд) затухающих $F_1(\delta)$ или расходящихся $F_2(\delta)$ колебательных процессов.

Для нелинейных систем показатель затухания α , частота ω и затухание δ не остаются постоянными, поэтому приближение переходного процесса на входе нелинейного элемента запишется в виде

$$x = a \sin \psi; \quad (9.78)$$

$$da/d\psi = \delta a, \quad \omega = d\psi/dt. \quad (9.79)$$

При этом частота и затухание предполагаются медленно меняющимися функциями времени.

Текущие значения амплитуды a и частоты ω колебаний и времени t определяются выражениями

$$a = a_0 \exp\left(-\int_0^{\psi-\psi_0} \delta d\psi\right); \quad (9.80)$$

$$\omega = \frac{d\psi}{dt}; \quad t = \int_0^{\psi-\psi_0} \frac{d\psi}{\omega}. \quad (9.81)$$

Расширенные логарифмические частотные характеристики линейной части системы. При анализе и синтезе систем автоматического управления, особенно нелинейных систем, целесообразно использовать расширенные логарифмические частотные характеристики. Под *расширенными* понимаются логарифмические амплитудные и фазовые характеристики

$$L(\omega, \delta) = 20 \lg \text{mod } W [j\omega (1 + j\delta)]; \quad (9.82)$$

$$\varphi(\omega, \delta) = \arg W [j\omega (1 + j\delta)], \quad (9.83)$$

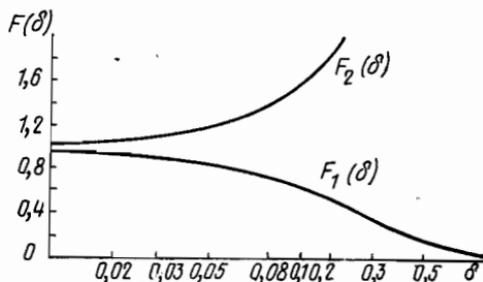


Рис. 9.29. Определение отношения соседних экстремумов в зависимости от значения затухания

построенные для отдельных звеньев или линейной части системы с передаточной функцией $W(s)$ в результате подстановки значения $s = -\delta\omega + j\omega$ при заданной величине затухания $\delta = \delta_i$.

Расширенные логарифмические частотные характеристики системы могут быть построены по расширенным характеристикам отдельных звеньев так же, как и обычные частотные характеристики.

Чтобы перейти от обычных характеристик к расширенным, целесообразно расширенную амплитудную характеристику $L(\omega, \delta)$ представить в виде суммы расширенной асимптотической характеристики $L_a(\omega, \delta)$ и кривой поправок $\Delta L(\omega, \delta)$:

$$L(\omega, \delta) = L_a(\omega, \delta) + \Delta L(\omega, \delta). \quad (9.84)$$

Расширенную фазовую характеристику $\varphi(\omega, \delta)$ следует представить в виде суммы обычной фазовой характеристики $\varphi(\omega)$ и кривой поправок $\Delta\varphi(\omega, \delta)$:

$$\varphi(\omega, \delta) = \varphi(\omega) + \Delta\varphi(\omega, \delta). \quad (9.85)$$

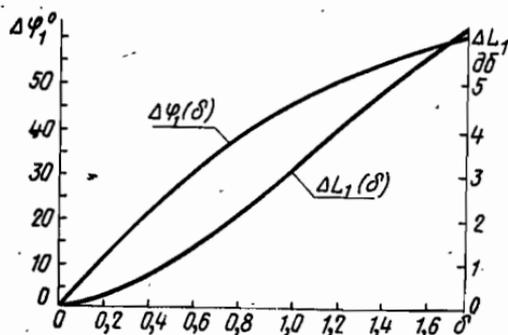


Рис. 9.30. Кривые поправок к логарифмическим характеристикам дифференцирующего звена

Определим кривые поправок $\Delta L(\omega, \delta)$ и $\Delta\varphi(\omega, \delta)$ для типовых звеньев систем автоматического управления.

Дифференцирующее $[W(s) = Ts]$ и интегрирующее $[W(s) = (Ts)^{-1}]$ звенья. Расширенные логарифмические характеристики дифференцирующего звена

$$L(\omega, \delta) = 20 \lg \omega T \sqrt{1 + \delta^2} = L(\omega) + \Delta L_1(\omega, \delta); \quad (9.86)$$

$$\varphi(\omega, \delta) = \pi/2 + \operatorname{arctg} \delta = \varphi(\omega) + \Delta\varphi_1(\omega, \delta) \quad (9.87)$$

могут быть построены по обычным характеристикам $L(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, если к ним прибавить поправки:

$$\Delta L_1(\omega, \delta) = 20 \lg \sqrt{1 + \delta^2}; \quad (9.88)$$

$$\Delta\varphi_1(\omega, \delta) = \operatorname{arctg} \delta. \quad (9.89)$$

Как видно, в этом случае поправки ΔL_1 и $\Delta\varphi_1$ не зависят от ω . Соответствующие кривые дифференцирующего звена показаны на рис. 9.30.

Расширенные логарифмические характеристики интегрирующего звена

$$L(\omega, \delta) = -20 \lg \omega T \sqrt{1 + \delta^2} = L(\omega) - \Delta L_1(\omega, \delta); \quad (9.90)$$

$$\varphi(\omega, \delta) = -\pi/2 - \operatorname{arctg} \delta = \varphi(\omega) - \Delta\varphi_1(\omega, \delta) \quad (9.91)$$

являются зеркальным отображением характеристики дифференцирующего звена относительно оси частот и могут быть построены по обычным характеристикам и кривым поправок $\Delta L_1(\omega, \delta)$ и $\Delta \varphi_1(\omega, \delta)$, показанным на рис. 9.30.

Дифференцирующее $[W(s) = Ts + 1]$ и апериодическое $[W(s) = (Ts + 1)^{-1}]$ звенья. Расширенные логарифмические частотные характеристики дифференцирующего звена определяются выражениями

$$L(\omega, \delta) = L_{a2}(\omega, \delta) + \Delta L_2(\omega, \delta) = 20 \lg \sqrt{(\omega T)^2 + (1 - \delta \omega T)^2}; \quad (9.92)$$

$$\varphi(\omega, \delta) = \varphi_2(\omega) + \Delta \varphi_2(\omega, \delta). \quad (9.93)$$

Расширенная асимптотическая амплитудная характеристика имеет два участка:

$$L_{a2}(\omega, \delta) = 0 \text{ при } \omega \leq (T\sqrt{1 + \delta^2})^{-1};$$

$$L_{a2}(\omega, \delta) = 20 \lg \omega T \sqrt{1 + \delta^2} \text{ при } \omega \geq (T\sqrt{1 + \delta^2})^{-1}.$$

Первый участок характеристики $L_{a2}(\omega, \delta)$ совпадает с осью абсцисс, а второй — проходит с наклоном 20 дб/дек через точку $\omega^* = (T\sqrt{1 + \delta^2})^{-1}$ на оси абсцисс.

На рис. 9.31 изображены кривые поправок $\Delta L_2(\omega, \delta)$ для дифференцирующего звена при изменении δ от 0,2 до 1.

Обычно при расчете систем величина затухания $\delta = 0,3 \div 0,7$. Следовательно, поправка к расширенной асимптотической амплитуд-

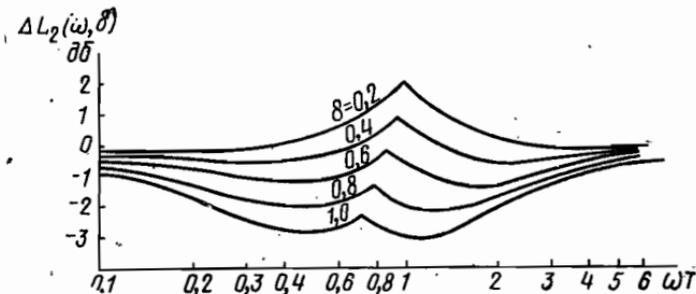


Рис. 9.31. Кривые поправок к логарифмической амплитудной характеристике дифференцирующего звена

ной характеристике в этом случае не будет превышать $\pm 1,7 \text{ дб}$. Такую погрешность можно не учитывать, так как сам метод расчета является приближенным. При необходимости поправки $\Delta L_2(\omega, \delta)$ учитываются так же, как при построении обычных логарифмических частотных характеристик.

Кривая поправок к фазовой характеристике $\varphi_2(\omega)$ может быть построена с помощью выражения

$$\Delta \varphi_2(\omega, \delta) = \text{arctg} \frac{\omega T}{1 - \delta \omega T} - \text{arctg} \omega T.$$

Кривые поправок дифференцирующего звена $\Delta\varphi_2(\omega, \delta)$ при изменении затухания δ от 0,1 до 1 показаны на рис. 9.32.

Расширенные логарифмические характеристики аperiodического звена $[W(s) = (Ts + 1)^{-1}]$ определяются выражениями

$$L(\omega, \delta) = -20 \lg \sqrt{(\omega T)^2 + (1 - \delta\omega T)^2};$$

$$\varphi(\omega, \delta) = -\arctg[\omega T / (1 - \delta\omega T)]$$

и являются зеркальными отображениями расширенных характеристик дифференцирующего звена относительно оси абсцисс. Расширенные характеристики аperiodического звена также строятся по характеристикам $L_a(\omega, \delta)$, $\varphi(\omega)$ и кривым поправок $\Delta L_2(\omega, \delta)$ и $\Delta\varphi_2(\omega, \delta)$.

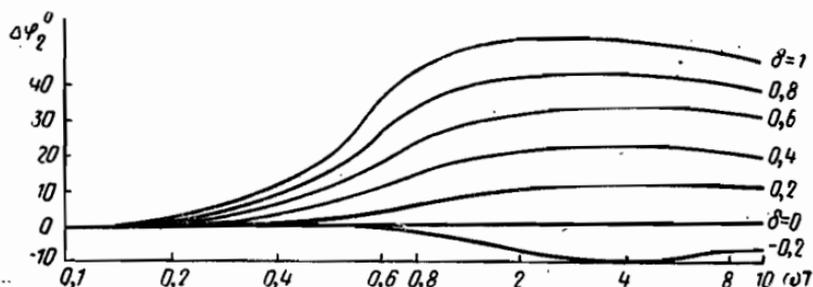


Рис. 9.32. Кривые поправок к фазовой характеристике дифференцирующего звена

Неминимально-фазовые дифференцирующие звенья $[W(s) = Ts - 1]$ и аperiodические $[W(s) = (Ts - 1)^{-1}]$ звенья. Расширенная асимптотическая логарифмическая характеристика дифференцирующего звена $W(s) = Ts - 1$ совпадает с характеристикой минимально-фазового звена $W(s) = Ts + 1$.

Расширенная асимптотическая логарифмическая характеристика неустойчивого звена первого порядка $W(s) = (Ts - 1)^{-1}$ является зеркальным отображением характеристики дифференцирующего звена $W(s) = Ts - 1$ относительно оси абсцисс.

Кривые поправок к расширенной асимптотической амплитудной $L_{a3}(\omega, \delta)$ и фазовой $\varphi_3(\omega)$ характеристикам дифференцирующего звена и неустойчивого звена первого порядка равны кривым поправок звеньев с характеристиками $W(s) = Ts + 1$ и $W(s) = (Ts + 1)^{-1}$ при перемене знака δ . Следовательно, при построении расширенных характеристик можно пользоваться кривыми поправок, показанными на рис. 9.31 и 9.32, но при другом знаке δ .

Звено с запаздыванием $[W_\tau(s) = \exp(-s\tau)]$. Расширенные логарифмические частотные характеристики звена с запаздыванием (рис. 9.33) построены на основании выражений

$$L_\tau(\omega, \delta) = 20 \lg \exp \delta\omega\tau = -8,6\delta\omega\tau; \quad (9.94)$$

$$\varphi_\tau(\omega, \delta) =$$

Оценка качества переходного процесса в нелинейных системах по расширенным логарифмическим характеристикам. Рассмотрим методику определения переходного процесса по логарифмическим характеристикам в системе с нелинейным элементом $y = F(x)$.

В системе существует затухающий ($\delta > 0$) или расходящийся ($\delta < 0$) переходный процесс с амплитудой a и заданным затуханием δ_i , если выполняется условие

$$W [j\omega (1 + j\delta_i)] = -[W_0(a)]^{-1} \quad (9.96)$$

или

$$R(\omega, \delta_i) = \frac{1}{R_0(a)}; \quad (9.97)$$

$$\varphi(\omega, \delta_i) = -\pi - \varphi_0(a) = \varphi_k(a). \quad (9.98)$$

Переходя к логарифмическим характеристикам, получим следующие условия существования колебательного переходного процесса в нелинейной системе:

$$L(\omega, \delta_i) = 20 \lg R(\omega, \delta_i) = -L_0(a) = -20 \lg R_0(a); \quad (9.99)$$

$$\varphi(\omega, \delta_i) = \arg W [j\omega (1 + j\delta)] = -\pi - \arg W_0(a) = \varphi_k(a). \quad (9.100)$$

Уравнения (9.99) и (9.100) для фиксированных значений затухания $\delta = \delta_i$ позволяют найти по расширенным логарифмическим характеристикам линейной части системы и логарифмическим характеристикам нелинейного элемента текущие значения амплитуды a_i и частоты ω_i колебательного переходного процесса. При этом методика определения текущих значений a_i и ω_i не отличается от описанной выше методики определения амплитуды A и частоты ω периодического решения в нелинейной системе.

Диаграммы качества переходных процессов. По характеристикам линейной части системы $[L(\omega, \delta_i), \varphi(\omega, \delta_i)]$ для различных значений затухания δ_i и характеристикам нелинейного элемента $[L_0(a), \varphi_0(a)]$ на основании выражений (9.99) и (9.100) можно построить для фиксированных значений параметров системы диаграмму качества переходного процесса. Диаграмма качества устанавливает связь между текущими значениями амплитуды a , частоты ω и затухания δ колебательного переходного процесса:

$$\delta = f_1(a); \quad \omega = f_2(\delta). \quad (9.101)$$

На рис. 9.34 показаны диаграммы качества переходных процессов $\delta = f_1(a)$, $\omega = f_2(\delta)$ для системы, у которой в установившемся

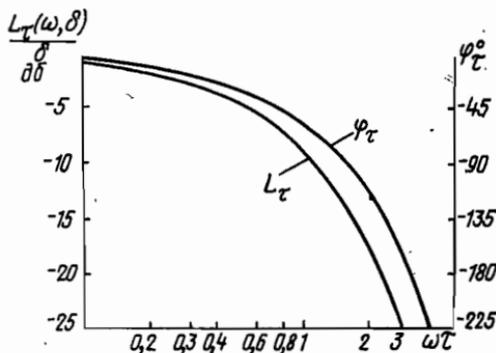


Рис. 9.33. Расширенные логарифмические характеристики звена с запаздыванием

режиме отсутствуют автоколебания (а), и для системы, у которой в установившемся режиме имеют место автоколебания с частотой ω_A и амплитудой A (б).

Для систем с типовыми нелинейными характеристиками целесообразно пользоваться относительными значениями амплитуды $\mu = A/b$

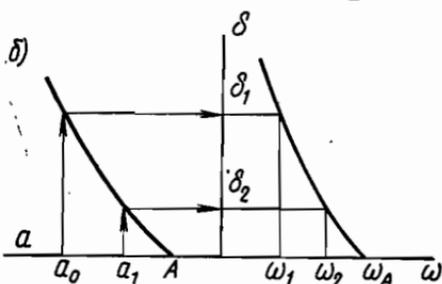
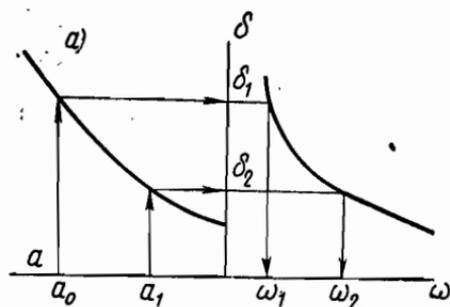


Рис. 9.34. Диаграммы качества переходных процессов

и строить диаграммы качества переходного процесса $\delta = f_1(\mu)$, $\omega = f_2(\delta)$ для относительных значений амплитуды. Чтобы выяснить влияние коэффициентов передачи, постоянных времени или других параметров системы на переходный процесс, следует построить диаграммы качества переходного процесса для ряда фиксированных значений интересующего параметра.

На рис. 9.35 показано семейство диаграмм качества в системе с насыщением, построенное для ряда фиксированных значений коэффициента передачи системы k . Характеристика $\omega = f_2(\delta)$ в рассматриваемом случае не зависит от коэффициента передачи. Характеристика $\delta = f_1(\mu)$ при увеличении k опускается вниз. При некотором критическом значении $k = k^*$ в системе возникают автоколебания.

На диаграмме качества область автоколебаний выделена штриховкой. При $(a/b) < 1$ затухание и частота не зависят от амплитуды, так как нелинейный элемент в этом случае работает в зоне линейности. Диа-

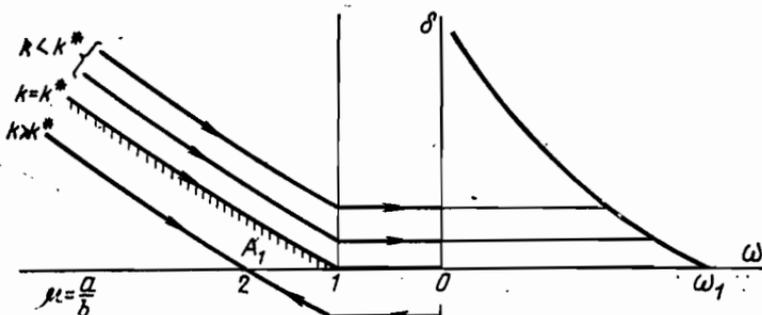


Рис. 9.35. Семейство диаграмм качества для системы с насыщением

грамма качества достаточно полно характеризует работу системы при различных по величине возмущениях и параметрах. Поэтому в большинстве случаев исследование нелинейной системы может быть закончено построением диаграмм качества переходных процессов.

Приближенный метод построения кривой переходного процесса. Переходный процесс в нелинейной системе может быть определен текущими значениями амплитуды a , частоты ω и времени t . Непосредственное вычисление a , ω и t по уравнениям (9.80) и (9.81) затруднительно, поэтому можно рекомендовать приближенный метод интегрирования этих уравнений для отдельных участков переходного процесса.

Если взять участки переходного процесса, соответствующие достаточно малым приращениям фазы $\Delta\psi_i$, то амплитуду a_i в конце i -го участка и интервал времени Δt_i можно найти с помощью соотношений

$$a_i = a_{i-1} \exp \left(- \int_{\psi_{i-1}}^{\psi_i} \delta_i d\psi \right) \approx a_{i-1} \exp (-\delta_i \Delta\psi_i); \quad (9.102)$$

$$\Delta t_i = \int_{\psi_{i-1}}^{\psi_i} \frac{d\psi}{\omega_i} \approx \frac{\Delta\psi_i}{\omega_i} \quad (9.103)$$

при постоянных значениях амплитуды a_{i-1} , частоты ω_{i-1} и затухания δ_i , определенных в начале i -го участка.

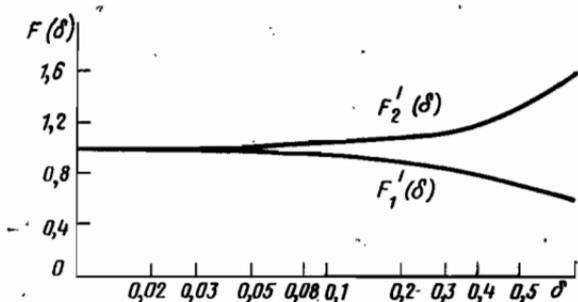


Рис. 9.36. Определение амплитуды в конце интервала по значению затухания

В дальнейшем целесообразно иметь постоянное значение $\Delta\psi = \pi/6$, т. е. разбить период колебаний на 12 участков, что обеспечит достаточную точность интегрирования, так как частота ω и затухание δ изменяются медленно.

Амплитуда a_i и интервал времени Δt_i при фиксированных значениях $\Delta\psi$ запишутся так

$$a_i = a_{i-1} \exp (-\pi\delta_i/6); \quad (9.104)$$

$$\Delta t_i = \pi/(6\omega_i). \quad (9.105)$$

Кривые $F'_1(\delta) = x_{i+1}/x_i$ при $\delta > 0$ и $F'_2(\delta) = x_{i+1}/x_i$ при $\delta < 0$ позволяют найти амплитуду a_i в конце интервала по заданному затуханию δ_i (рис. 9.36).

Чтобы определить амплитуду a_i и интервал времени Δt_i для заданной начальной амплитуды a_0 по диаграмме качества находят значения δ_1 и ω_1 . По выражению (9.105) вычисляют величину Δt_1 , а по выражению (9.104) или графикам $F'_1(\delta)$, $F'_2(\delta)$ определяют значения a_1 . Аналогично по амплитуде a_1 вычисляют δ_2 , ω_2 , Δt_2 и a_2 для второго интервала и т. д. (рис. 9.37).

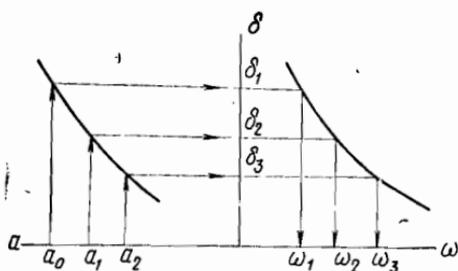


Рис. 9.37. Иллюстрации к определению амплитуды и интервала времени

Для приближенного построения кривой переходного процесса $x = a \sin \psi$ в нелинейной системе при скачкообразном изменении сигнала $g = g_0 \cdot 1(t)$ на входе нелинейного элемента необходимо определить значения a_k и t_k ($k = 1, 2, \dots$) в характерных точках $x = (-1)^k a_k$ и $x = 0$ (рис. 9.38) при

$$\psi_k = (k + 1/2) \pi. \quad (9.106)$$

Если в системе принять нулевые начальные значения для производных и положить, что начальное отклонение $x_a \approx a_0$, то по заданной величине a_0 и значениям ω_i , δ_i для каждого из интервалов можно

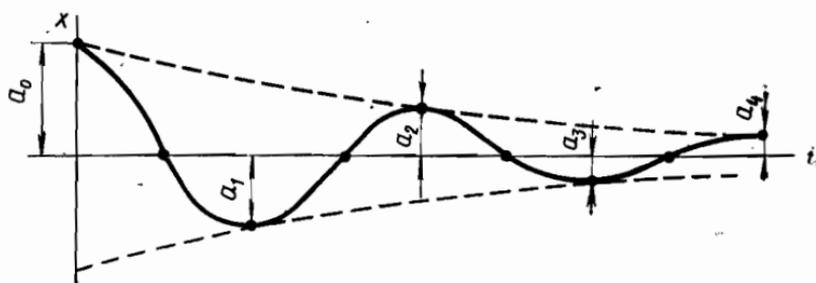


Рис. 9.38. Приближенное построение кривой переходного процесса

определить амплитуду a_k и время t_k в характерных точках кривой переходного процесса:

$$a_k = (-1)^k a_0 \exp \left(-\frac{\pi}{6} \sum_{i=1}^{6k} \delta_i \right) = (-1)^k a_0 \exp (-\pi k \delta_{k \text{ ср}}); \quad (9.107)$$

$$t_k = \frac{\pi}{6} \sum_{i=1}^{6k} \frac{1}{\omega_i} = \frac{\pi k}{\omega_{k \text{ ср}}}. \quad (9.108)$$

В уравнения (9.107) и (9.108) входят средние значения затухания и частоты за время t_k :

$$\delta_{k \text{ ср}} = \frac{1}{6k} \sum_{i=1}^{6k} \delta_i; \quad \frac{1}{\omega_{k \text{ ср}}} = \frac{1}{6k} \sum_{i=1}^{6k} \frac{1}{\omega_i}.$$

Приближенная оценка качества переходного процесса. Чтобы рассчитать нелинейную систему, достаточно знать величину перерегулирования $\sigma = a_1/a_0$, время достижения первого максимума t_1 и характер дальнейшего изменения переходного процесса. Перерегулирование σ и время достижения первого максимума t_1 определяются выражениями

$$\sigma = \exp(-\pi\delta_{\text{ср}}); \quad (9.109)$$

$$t_1 = \pi/\omega_{\text{ср}}. \quad (9.110)$$

Средние значения затухания и частоты за время t_1 запишутся как

$$\delta_{1\text{ср}} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \delta_i; \quad (9.111)$$

$$\frac{1}{\omega_{1\text{ср}}} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\omega_i}. \quad (9.112)$$

По диаграммам качества ориентировочно можно определить время переходного процесса при заданном диапазоне изменения амплитуды от a_0 до a_i :

$$t \approx \ln(a_0/a_i)/(\delta_{\text{ср}}\omega_{\text{ср}}). \quad (9.113)$$

В частности,

$$t_p \approx 3/(\delta_{\text{ср}}\omega_{\text{ср}}), \quad (9.114)$$

если амплитуда изменяется от a_0 до $a_i = 0,05 a_0$.

Средние значения $\delta_{\text{ср}}$ и $\omega_{\text{ср}}$ грубо оцениваются по диаграмме качества (рис. 9.39) после определения величин ω_1 и δ_1 , соответствующих значениям a_0 и $\omega_i \delta_i$, которые характеризуют конечную величину амплитуды a_i .

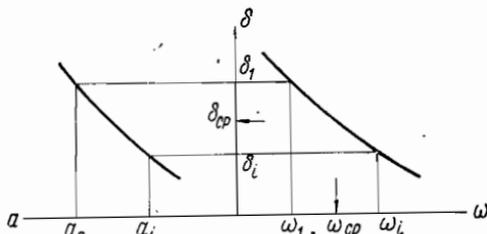


Рис. 9.39. Определение $\delta_{\text{ср}}$ и $\omega_{\text{ср}}$ по диаграмме качества

§ 9.5. Примеры расчета симметричных периодических режимов и переходных процессов в нелинейных системах

В приводимых далее примерах в качестве нелинейных систем (см. рис. 9.1) рассматриваются релейные системы автоматического управления. При расчете симметричных периодических режимов в нелинейных системах определяются:

1) значения добротности нормированной линейной части системы k_0 и добротности линейной части системы k_{10} , при которых в системе существуют автоколебания с заданной амплитудой μ_0 ;

2) зависимости амплитуды и частоты автоколебаний в системе $\mu = A/b = f_1(\beta)$, $\omega = f_2(\beta)$ (где $\beta = k/k_0$) от величины отношения добротности нормированной линейной части системы k к добротности k_0 ;

- 3) устойчивость автоколебаний в системе;
 4) критическое значение добротности $k_{0кр}$, при котором автоколебания в системе срываются.

При расчете переходных процессов в нелинейных системах будем строить диаграмму качества нелинейной системы и кривую переходного процесса при скачкообразном изменении управляющего воздействия.

Пример 9. 8. Определим симметричные периодические режимы и переходный процесс в релейной системе, передаточная функция линейной части которой

$$W(s) = k_1 e^{-\sigma\tau} / [s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)],$$

где $\tau = 5$ сек; $T_1 = 50$ сек; $T_2 = 1$ сек. Характеристика релейного элемента с гистерезисом определяется параметрами $m = -1$; $c = 4,5$; $b = 0,3$. Заданная амплитуда автоколебаний в системе $\mu_0 = A_0/b = 1,75$.

Чтобы найти добротность системы k_0 , при которой существуют автоколебания с заданной амплитудой μ_0 , построим фазовую логарифмическую характеристику линейной части системы

$$\varphi(\omega) = -\pi/2 - \text{arctg } \omega T_1 - \text{arctg } \omega T_2 - \omega\tau,$$

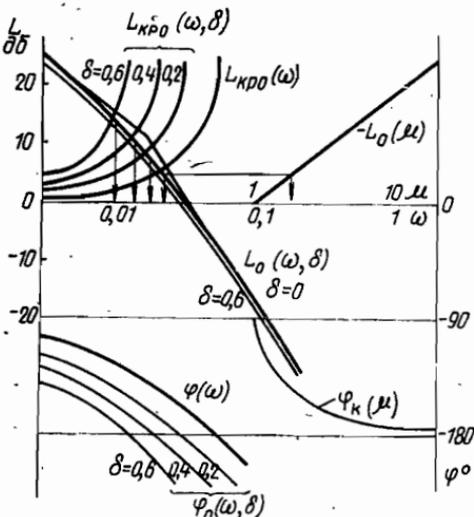


Рис. 9.40. Исследование релейной системы

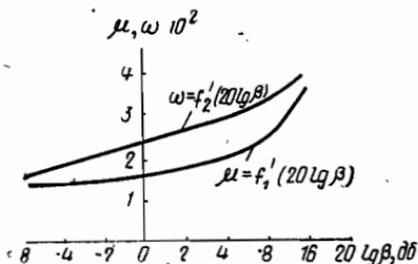


Рис. 9.41. Зависимости амплитуды и частоты автоколебаний от затухания

нормированную логарифмическую амплитудную характеристику нелинейного элемента

$$-L_0(\mu) = -20 \lg \mu$$

и логарифмическую фазовую характеристику

$$\varphi_{кр}(\mu) = -\pi - \varphi(\mu) = -\pi + \text{arctg}(\sqrt{\mu^2 - 1})^{-1},$$

как это показано на рис. 9.40.

По найденным характеристикам при $\mu = \mu_0 = 1,75$ на основании уравнений (8.67) и (8.68) определяем значения $\omega_0 = 0,025 \text{ сек}^{-1}$, $L_0(\omega_0) = 5 \text{ дб}$. Через точку с координатами $\omega_0 = 0,025 \text{ сек}^{-1}$, $L_0(\omega_0) = 5 \text{ дб}$ проводим логарифмическую амплитудную характеристику нормированной линейной части $L_0(\omega)$. По низкочастотной асимптоте характеристики $L_0(\mu)$ определяем добротность нормированной линейной части системы $k_0 = 0,08 \text{ сек}^{-1}$ и добротность линейной части системы:

$$k_{10} = k_0/k_H = k_0 pb/(4c) = 0,004 \text{ сек}^{-1}.$$

Чтобы получить зависимости $\mu = f_1(b)$ и $\omega = f_2(b)$ по характеристикам $\Phi_R(\mu)$, $-L_0(\mu)$ и $\Phi(\omega)$, построим характеристику критического коэффициента передачи $L_{кр0}(\omega, \mu)$. По характеристикам $L_{кр0}(\omega, \mu)$ и $L_0(\omega)$ (см. рис. 9.40) на основании уравнения

$$20 \lg \beta = L_{кр0}(\omega_i, \mu_i) - L_0(\omega_i)$$

найдем зависимости $\mu = f_1(20 \lg \beta)$, $\omega = f_2(20 \lg \beta)$, показанные на рис. 9.41.

Автоколебания в системе устойчивы, так как при всех значениях k выполняется критерий устойчивости, сформулированный в § 9.2.

Автоколебания в системе существуют при любых сколь угодно малых k . Чтобы получить диаграмму качества и кривую переходного процесса, построим расширенные логарифмические характеристики $L_0(\omega, \delta)$ и $\Phi(\omega, \delta)$ нормированной линейной части при добротности $k_0 = 0,08 \text{ сек}^{-1}$, соответствующей заданной амплитуде автоколебаний.

В существенном диапазоне частот при заданной амплитуде автоколебаний μ_0 вид расширенных характеристик определяется в основном интегрирующим звеном и апериодическим звеном с постоянной времени $T_1 = 50 \text{ сек}$. На рис. 9.40 приведены расширенные логарифмические характеристики $L_0(\omega, \delta)$, $\Phi_0(\omega, \delta)$ нормированной линейной части при $\delta = 0; 0,2; 0,4; 0,6$ и логарифмические характеристики релейного элемента $\Phi_R(\mu)$, $-L_0(\mu)$. По характеристикам $\Phi_0(\omega, \delta)$, $\Phi_{кр}(\mu)$, $-L_0(\mu)$ построены характеристики критического коэффициента передачи $L_{кр0}(\omega, \delta)$. Диаграмма качества переходного процесса, построенная для $\delta_{ср} = 0,26$; $\omega_{ср} = 0,0185 \text{ сек}^{-1}$; $\mu_0 = 4$; $\mu_1 = 1,6$ по характеристикам $L_{кр0}(\omega, \delta)$, $L_0(\omega, \delta)$, $-L_0(\mu)$, показана на рис. 9.42.

По диаграмме качества и кривой $F'_1(\delta)$ (см. рис. 9.36) определяются значения μ_i , δ_i , ω_i и Δt_i для каждого из интервалов. В табл. 9.1 приведены величины μ_i , δ_i , ω_i и Δt_i при начальном отклонении $g = 4b \cdot 1(t) = \mu_0$. На рис. 9.43 показана приближенная кривая переходного процесса, построенная по данным табл. 9.1.

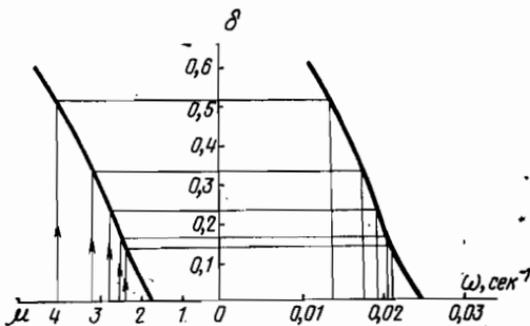


Рис. 9.42. Диаграмма качества переходного процесса

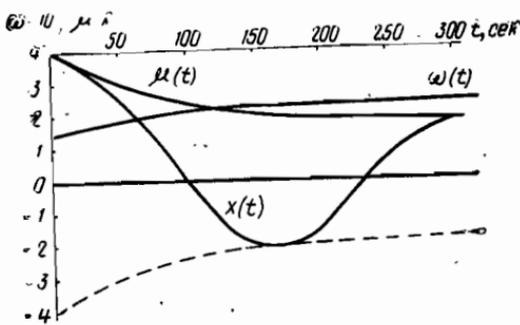


Рис. 9.43. Приближенная кривая переходного процесса

Таблица 9.1

μ_i	4	3,2	2,7	2,4	2,25	2,1	2	1,94	1,9	1,86	1,82	1,79
δ_i	0,52	0,35	0,23	0,16	0,14	0,1	0,08	0,06	0,05	0,04	0,035	0,03
$10^{-2} \cdot \omega_i$	1,35	1,7	1,9	2,05	2,15	2,2	2,25	2,3	2,35	2,38	2,4	2,42
Δt_i	39	31	28	26	25	24	23	23	23	22	22	22
$\Sigma \Delta t_i$			98			173			242			308

Пример 9.9. Определим симметричные периодические режимы и переходный процесс в релейной системе, если передаточная функция линейной части системы

$$W(s) = k_1 e^{-s\tau} / [s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)],$$

где $\tau = 30$ сек, $T_1 = 200$ сек, $T_2 = 10$ сек.

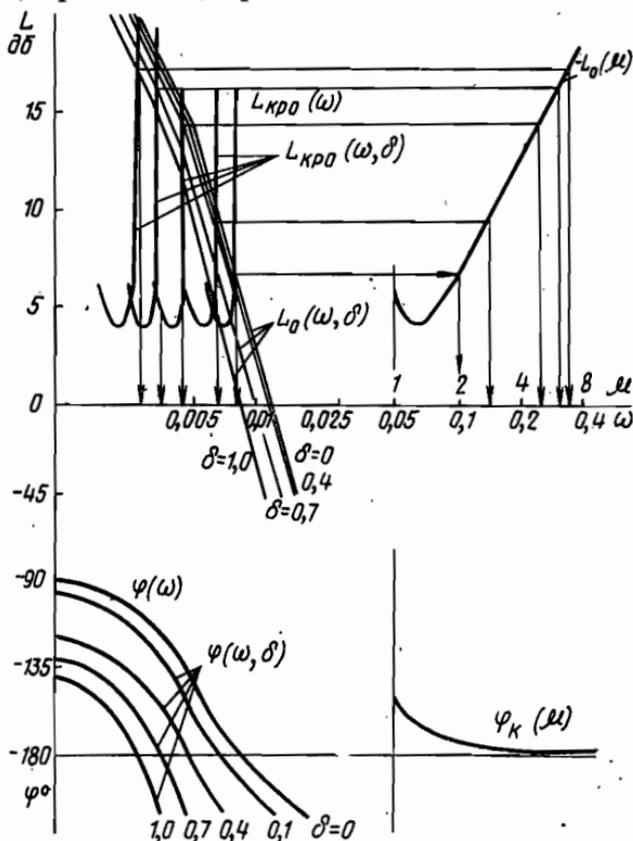


Рис. 9.44. Определение периодических режимов и переходных процессов в релейной системе

Релейный элемент с зоной нечувствительности и гистерезисом имеет параметры $m = 0,5$; $c/b = 8$. Заданное значение амплитуды автоколебаний $\mu_0 = A_0/b = 2$.

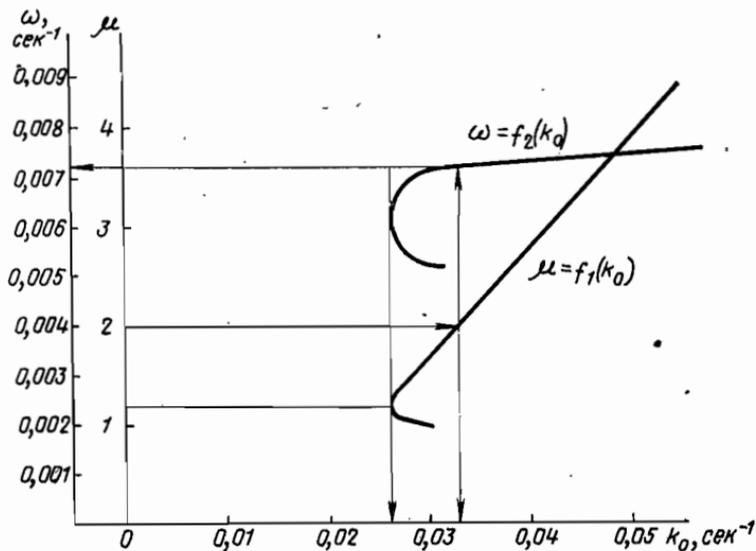


Рис. 9.45. Кривые зависимости $\mu = f_1(k_0)$ и $\omega = f_2(k_0)$

Чтобы определить симметричные периодические режимы в нелинейной системе, построим логарифмические характеристики $\Phi(\omega)$, $\Phi_k(\mu)$, $-L_0(\mu)$, а по ним — характеристики критического коэффициента передачи нормированной линейной части $L_{кр0}(\omega, \delta)$, как это показано на рис. 9.44.

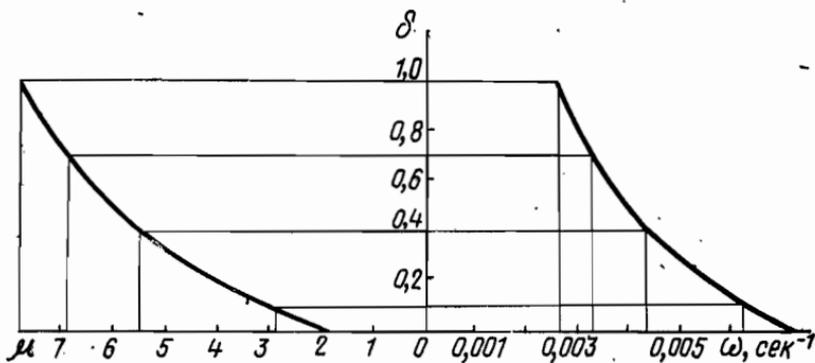


Рис. 9.46. Диаграмма качества системы

По логарифмическим характеристикам $L_{кр0}(\omega, \delta)$ и $-L_0(\mu)$ найдем значение частоты периодического решения $\omega_0 = 0,072 \text{ сек}^{-1}$ при $\mu = 2$.

Чтобы определить добротность системы и зависимости $\mu = f_1(\beta)$, $\omega = f_2(\beta)$ или зависимости $\mu = f_1(k_0)$, $\omega = f_2(k_0)$, построим логарифмическую амплитудную характеристику нормированной линейной части системы $L_0(\omega)$, которая проходит через точку с координатами $\omega_0 = 0,072 \text{ сек}^{-1}$, $L_0 = 6,8 \text{ дБ}$, лежащую на характеристике $L_{кр0}(\omega, \delta)$.

По низкочастотной асимптоте характеристики $L_0(\omega)$ найдем добротность нормированной линейной части системы $k_0 = 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ сек}^{-1}$ при $\mu = 2$ и добротность линейной части системы

$$k_{10} = k_0/k_H = k_0 \pi b / (4c) = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1}.$$

Зависимости $\mu = f_1(k_0)$ и $\omega = f_2(k_0)$, определенные по характеристикам $L_{кр}(\omega, \mu)$ и $L_0(\omega)$, показаны на рис. 9.45.

Автоколебания в системе имеют место при $k_0 > 2,6 \cdot 10^{-2} \text{ сек}^{-1}$. Периодические решения при $\mu < 1,2$ неустойчивы, а периодические решения при $\mu > 1,2$ устойчивы.

Чтобы получить диаграмму качества при $k_0 = 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ сек}^{-1}$, на рис. 9.44 построены расширенные логарифмические характеристики нормированной линейной части $L_0(\omega, \delta)$ и $\varphi(\omega, \delta)$ для $\delta = 0,1; 0,4; 0,7; 1,0$.

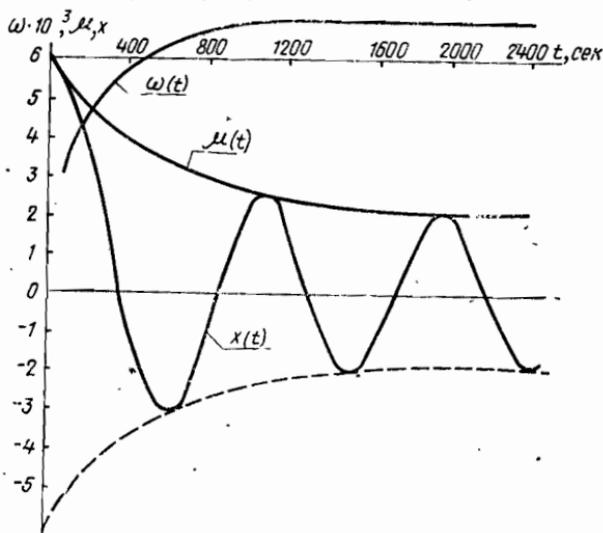


Рис. 9.47. Приближенные зависимости $\mu(t)$, $\omega(t)$ и кривая переходного процесса $x(t)$

По характеристикам $\varphi(\omega, \delta)$, $\varphi_{кр}(\mu)$ и $-L_0(\mu)$ построены характеристики критического коэффициента передачи $L_{кр0}(\omega, \delta)$ для соответствующих значений δ . Диаграмма качества системы, определенная по характеристикам $L_{кр0}(\omega, \delta)$ и $L_0(\omega, \delta)$, приведена на рис. 9.46. По диаграмме качества и кривой $F'_1(\delta)$, показанной на рис. 9.37, находятся значения μ_i , δ_i , ω_i и Δt_i для каждого из интервалов. На рис. 9.47 приведены приближенные зависимости $\mu(t)$, $\omega(t)$ и кривая переходного процесса $x(t)$ для исследуемой системы при скачкообразном изменении управляющего воздействия $g = -6,1(t)$.

Литература к главе IX

1. Е. П. Попов, И. П. Пальтов. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. Физматгиз, 1960.
2. В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. Теория систем автоматического регулирования. «Наука», 1972.
3. Под ред. Б. Н. Петрова, В. В. Солодовникова, Ю. И. Топчиева. Современные методы проектирования систем автоматического управления. «Машиностроение», 1967.
4. А. А. Вавилов. Частотные методы расчета нелинейных систем. «Энергия», 1970.
5. Под ред. Е. П. Попова и Ю. И. Топчиева. Метод гармонической линеаризации в проектировании нелинейных систем автоматического управления. «Машиностроение», 1970.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ГАРМОНИЧЕСКИ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ТРАЕКТОРИЙ КОРНЕЙ

§ 10.1. Траектории корней гармонически линеаризованных нелинейных систем

В гл. IX были изложены основы метода гармонической линеаризации нелинейных систем. Коротко напомним о них.

Если в нелинейной системе (рис. 10.1) сигнал на входе нелинейного элемента имеет вид квазигармонических колебаний [1]

$$x = a \sin \psi; \quad da/dt = a\delta; \quad d\psi/dt = \omega, \quad (10.1)$$

где δ и ω — медленно меняющиеся функции времени, то нелинейный элемент может быть заменен эквивалентным ему квазилинейным элементом, уравнение которого запишется как

$$F(x) = \left[q(a) + q'(a) \frac{s-\delta}{\omega} \right] x, \quad (10.2)$$

где $q(a)$ и $q'(a)$ — коэффициенты гармонической линеаризации нелинейного элемента (см. гл. IX).

Если передаточная функция линейной части системы

$$W(s) = K_{\pi} \frac{B(s)}{A(s)} = \\ = K_{\pi} \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0},$$

то условное характеристическое уравнение гармонически линеаризованной нелинейной системы имеет вид

$$A(s) + K_{\pi} \left[q(a) + q'(a) \frac{s-\delta}{\omega} \right] B(s) = 0. \quad (10.3)$$

Чтобы уравнение (10.3) имело смысл, т. е. соответствовало процессу вида (10.1) на входе нелинейного элемента, линейная часть системы должна быть хорошим фильтром нижних частот. Кроме того, уравнение (10.3) должно иметь преобладающую пару корней $s_{1,2} = \delta \pm j\omega$, удовлетворяющую условию

$$\text{mod } \delta \gg \text{mod } \text{Re } s_i, \quad i = 3, 4, \dots, n. \quad (10.4)$$

Чтобы исследовать нелинейную систему, необходимо определить зависимости величин δ и ω от амплитуды колебаний на входе нелиней-

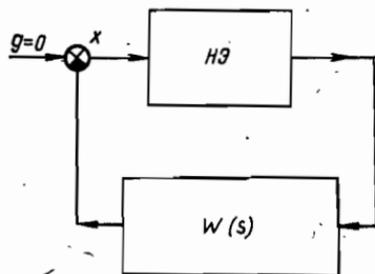


Рис. 10.1. Структурная схема системы с одним нелинейным элементом

ного элемента. Эта задача решается построением траектории преобладающего корня уравнения (10.3), причем в качестве параметра траекторий используется амплитуда колебаний на входе нелинейного элемента. Другими словами, с точки зрения метода траекторий корней задача исследования гармонически линеаризованных нелинейных систем состоит в определении кривой, по которой перемещается преобладающий корень замкнутой системы на плоскости корней при изменении амплитуды a квазигармонических колебаний на входе нелинейного элемента.

§ 10.2. Построение траекторий корней для систем с однозначной нелинейностью

Рассмотрим случай, когда нелинейность $F(x)$, входящая в систему, однозначна. При этом $q'(a) = 0$ и условное характеристическое уравнение системы (10.3) принимает вид

$$A(s) + q(a) K_{\text{л}} B(s) = 0. \quad (10.5)$$

Обозначив через κ произведение $q(a)K_{\text{л}}$, т. е.

$$\kappa = q(a) K_{\text{л}}, \quad (10.6)$$

перепишем уравнение (10.5):

$$A(s) + \kappa B(s) = 0. \quad (10.7)$$

Траектории корней уравнения (10.7) по параметру κ полностью совпадают с траекториями корней линейных систем и могут быть построены изложенными в гл. V способами.

Отметим, что при исследовании гармонически линеаризованных нелинейных систем точно нужно определить лишь траекторию преобладающего корня s_1 . Относительно остальных корней следует удостовериться лишь в том, что выполняется условие (10.4). Для этого очень удобны простые приемы метода траекторий корней, позволяющие наметить общее расположение их почти без расчетов (см. гл. V).

После построения траектории преобладающего корня по параметру κ и вычисления его значений для точек траекторий (δ , ω) по формулам (5.25) или (5.26) определяют величину

$$q(a) = \kappa / K_{\text{л}}. \quad (10.8)$$

Затем по графику зависимости $q(a)$ находят амплитуду a , соответствующую точкам траектории.

Пример 10.1. Пусть система автоматического управления (рис. 10.2) состоит из нелинейного усилителя, имеющего зону линейности и область насыщения

$$F(x) = \begin{cases} cx/b & \text{при } x \leq b; \\ c & \text{при } x > b. \end{cases}$$

и линейной части с передаточной функцией

$$W(s) = K_{\text{л}} / [s(s+2)(s+5)].$$

Условное характеристическое уравнение этой системы с учетом обозначения (10.6) может быть записано в виде (10.7), где $A(s) = s(s+2)(s+5) = s^3 + 7s^2 + 10s$; $B(s) = 1$.

В гл. V (§ 5.2, п. 6 и 7) найдены точки пересечения траектории преобладающего корня условного характеристического уравнения с вещественной осью

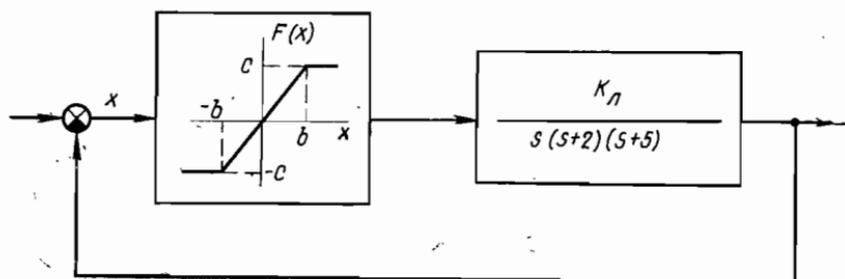


Рис. 10.2. Структурная схема системы с нелинейным усилителем

($\delta_m = -0,89$) и с мнимой осью ($\omega_{кр} = 3,16$) плоскости корней. В примере 5.3 получено уравнение, связывающее абсциссы δ точек траектории преобладающего корня с ординатами ω :

$$\omega^2 = 3\delta^2 + 14\delta + 10.$$

Величина параметра q (соответствует параметру K в гл. V) для каждой точки (δ, ω) траектории преобладающего корня может быть вычислена по формуле (5.28):

$$q = - \left[(\delta^3 + 7\delta^2 + 10\delta) - \frac{\omega^2}{2!} (6\delta + 14) \right].$$

На рис. 10.3 показана зависимость коэффициента гармонической линеаризации нелинейного элемента типа линейного звена с насыщением (при $c/b = 1$), построенная на основании формулы [1]

$$q(a) = \frac{2c}{\pi b} \left[\arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \times \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \right].$$

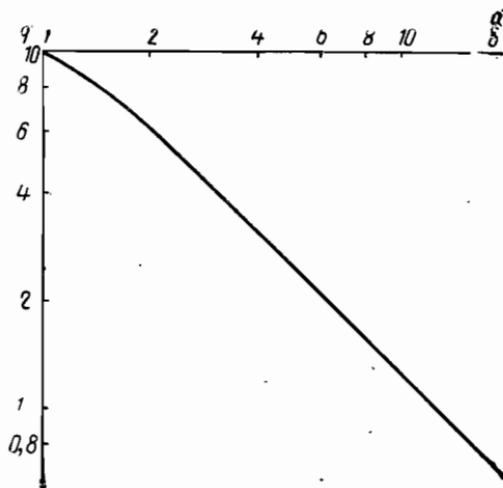


Рис. 10.3. Зависимость $q(a/b)$ для нелинейного элемента типа линейного звена с насыщением

По формуле (10.8) найдем величины $q(a/b)$, соответствующие $K'_л = K_л c/b = 96$ (коэффициент усиления нелинейного усилителя в зоне линейности отнесен к линейной части), а по ним — значения a/b для точек траектории преобладающего корня. Запишем результаты вычислений координат преобладающего корня и соответствующих им значений относительной амплитуды (табл. 10.1).

δ	ω	κ	$q = \frac{cK_{л}}{b\kappa}$	$\frac{a}{b}$
-0,89	0	4,06	0,0423	30
-0,8	0,89	7,34	0,0765	16,3
-0,6	1,64	17,6	0,184	7,14
-0,4	2,12	29,0	0,303	4,22
-0,2	2,71	48,5	0,505	2,52
0	3,16	70	0,73	1,63
0,2	3,6	96	1	1
0,4	4,03	126,7	—	—
0,6	4,42	162,7	—	—

На рис. 10.4 построена траектория преобладающего корня, проградированная в величинах относительной амплитуды на входе нелинейного элемента a/b . По этому рисунку можно составить наглядное представление о динамике системы.

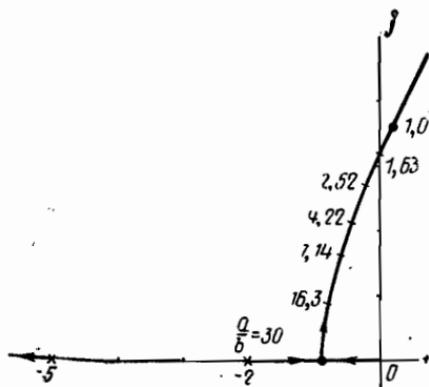


Рис. 10.4. Траектория преобладающего корня

Если в начале переходного процесса относительная амплитуда сигнала на входе нелинейного элемента $a/b = 16,3$, то преобладающий корень характеристического уравнения $s_1 = \delta + j\omega = -0,8 + j0,89$. Система будет стремиться уменьшить отклонение, при этом амплитуда колебаний на входе нелинейного элемента начнет снижаться. По мере уменьшения амплитуды колебаний будет падать скорость их затухания и увеличиваться их частота (уменьшается коэффициент демпфирования колебаний).

При $a/b = 1,63$ имеем $\delta = 0$, т. е. преобладающий корень s_1 переходит из левой полуплоскости в правую. При $\delta > 0$ начинается нарастание колебаний, амплитуда их увеличивается и корень возвращается на мнимую ось. Таким образом, в системе существуют устойчивые автоколебания с частотой $\omega = \Omega = 3,16$ рад/сек и относительной амплитудой $a/b = A/b = 1,63$.

§ 10.3. Траектории корней гармонически линеаризованных нелинейных систем, содержащих неоднозначную нелинейность

У неоднозначных нелинейностей $F(x)$ оба коэффициента гармонической линеаризации $q(a)$ и $q'(a)$ отличны от нуля, а характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы имеет вид уравнения (10.3). Обычно зависимости $q(a)$ и $q'(a)$, а также $q(q')$ или $q'(q)$ довольно сложны, поэтому построение траекторий корней уравнения (10.3) по амплитуде приходится проводить в два этапа:

строить траектории корней по двум независимым параметрам q и q' или функциям от них, а затем отыскивать на них точки, принадлежащие траектории преобладающего корня $s_1(a)$.

Любые приемы отыскания зависимости $s_1(a)$ принципиально содержат в себе эти два этапа в явном или скрытом виде.

Чтобы определить общую картину расположения траекторий корней гармонически линеаризованной нелинейной системы, перепишем уравнение (10.3):

$$A(s) + K_n K_n (s - N_n) B(s) = 0, \quad (10.9)$$

где

$$K_n = q'/\omega; \quad N_n = \delta - (q/q') \omega. \quad (10.10)$$

Обычно знаки q и q' постоянны во всем диапазоне изменения амплитуды a , поэтому нетрудно установить знак K_n и область перемещения нуля N_n по вещественной оси плоскости корней. Так, для различных нелинейностей с отрицательным гистерезисом $q > 0$, а $q' < 0$ [1]. Поэтому для них $K_n < 0$, $N_n = \delta + |q/q'| \omega$. Следовательно, нуль N_n будет всегда перемещаться с изменением a по вещественной оси правее полюсов передаточной функции линейной части системы. Поскольку $K_n K_n < 0$, то траекториями корней характеристического уравнения будут линии равной фазы $2\pi i$, где $i = 0, 2, \dots$.

Однако использовать характеристическое уравнение в виде (10.9) для точного построения траектории преобладающего корня неудобно. Удобнее заменить в формуле (10.2) s на $s_1 = \delta + j\omega$, что позволяет записать

$$q + q' \frac{s - \delta}{\omega} = q + jq' = \sqrt{q^2 + q'^2} e^{j \arctg(q'/q)}. \quad (10.11)$$

Обозначив

$$N = \sqrt{q^2 + q'^2}; \quad \varphi_n = \arctg(q'/q), \quad (10.12)$$

перепишем условное характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы:

$$1 + NK_n e^{j\varphi_n} W(s_1) = 0. \quad (10.13)$$

Уравнение (10.13) пригодно лишь для отыскания траектории преобладающего корня s_1 , но ни в коем случае не траекторий других корней.

Запишем уравнения модулей и фаз для точек, лежащих на траектории преобладающего корня:

$$\kappa = NK_n = \prod_{i=1}^n \text{mod}(s_1 - q_i) \left/ \prod_{i=1}^m \text{mod}(s_1 - N_i) \right.; \quad (10.14)$$

$$\varphi_n - \sum_{i=1}^n \psi_i + \sum_{i=1}^m \theta_i = -\pi, \quad (10.15)$$

где ψ_i — углы между векторами, проведенными из полюсов передаточной функции линейной части системы, и положительным направлением вещественной оси плоскости корней; ϑ_i — то же, для нулей передаточной функции линейной части системы.

Обычно величина φ_n для каждой конкретной неоднозначной нелинейности $F(x)$ имеет при всех a один и тот же знак, а абсолютная величина $|\varphi_n| \leq \pi/2$. Поэтому, согласно уравнению фаз (10.15), в случае нелинейности $F(x)$ с отрицательным (отстающим) гистерезисом ($\varphi_n < 0$) траектория преобладающего корня гармонически линеаризованной системы лежит между линиями равной фазы*

— π и — $\pi/2$, т. е.

$$-\pi \leq -\sum_{i=1}^n \psi_i + \sum_{i=1}^m \vartheta_i \leq -\pi/2$$

(рис. 10.5), а в случае нелинейности $F(x)$ с положительным (опережающим) гистерезисом — между линиями равной фазы — $3\pi/2$ и — π , т. е.

$$-\frac{3}{2}\pi \leq -\sum_{i=1}^n \psi_i + \sum_{i=1}^m \vartheta_i \leq -\pi.$$

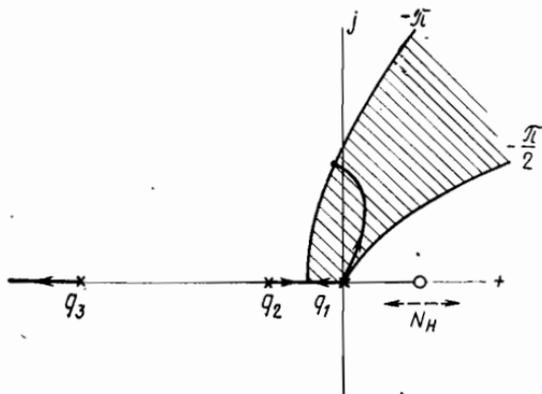


Рис. 10.5. Область расположения траектории преобладающего корня в случае системы с гистерезисной нелинейностью

Построение траектории преобладающего корня s_1 для систем с неоднозначной нелинейностью проводят в следующем порядке [3]:

1) на основании выражения для эквивалентного комплексного коэффициента передачи нелинейности определяют диапазон изменения φ_n ;

2) намечают границы области, в которой должна лежать траектория преобладающего корня, и определяют, действительно ли он будет преобладающим;

3) строят линии равной фазы для ряда значений φ_n , лежащих внутри диапазона его изменения, т. е. для ряда значений a ;

* *Линией равной фазы* называется геометрическое место точек на плоскости корней, для которых удовлетворяется равенство $-\sum_{i=1}^n \psi_i + \sum_{i=1}^m \vartheta_i = \text{const}$. Так,

линией равной фазы ψ_i (ϑ_i) для одиночного полюса (нуля) $\psi_i = \text{arctg} [\omega/(\delta - q_i)] = \text{const}$ является прямая, образующая угол ψ_i с положительным направлением вещественной оси. Линии равных фаз для двух особенностей передаточной функции $W(s)$ (двух полюсов, нулей или полюса и нуля) могут быть найдены путем наложения линий равных фаз для отдельных нулей и полюсов, суммированной значений фазы в точках пересечения этих линий и соединения точек с одинаковой суммой фаз плавной кривой [2].

4) методом проб находят положение корня s_1 , соответствующее определенному значению $\varphi_H(a)$, т. е. удовлетворяющее уравнению модулей (10.14) при заданном $K_{\text{д}}$ и известном для данной линии равной фазы значении $N(a)$;

5) соединяют полученные точки в порядке изменения величины a .

Пример 10.2. Система автоматического управления (рис. 10.6) состоит из линейной части с передаточной функцией

$$K_{\text{д}} W(s) = K_{\text{д}} / [s(s+1)(s+10)]$$

и нелинейности типа люфта в механической передаче:

$$F(x) = x - b \operatorname{sign} \dot{x}, \text{ если } \dot{x} \neq 0;$$

$$F(x) = x_m - b, \text{ если } \dot{x} = 0 \text{ или}$$

$$|x_m - x(t_m + \Delta t)| \leq b, \text{ где } x_m - \text{значение } x, \text{ соответствующее моменту времени } t = t_m, \text{ когда } \dot{x} = 0.$$

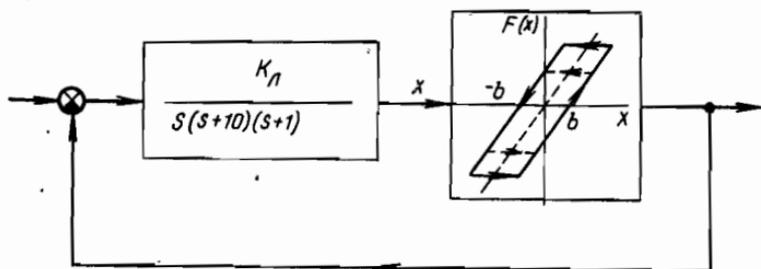


Рис. 10.6. Структурная схема системы с нелинейностью типа люфта

Коэффициенты гармонической линеаризации для этой нелинейности [1] при $a \geq b$ запишутся как

$$q = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2b}{a} \right) + 2 \left(1 - \frac{b}{a} \right) \sqrt{\frac{b}{a} \left(1 - \frac{b}{a} \right)} \right];$$

$$q' = -4b \left(1 - \frac{b}{a} \right) / (\pi a).$$

На рис. 10.7 приведены кривые $q(a/b)$, $q'(a/b)$ и вычисленные по ним зависимости $\varphi_H(a/b)$ и $N(a/b)$.

Характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы имеет вид

$$1 + K_{\text{д}} K_{\text{н}} (s - N_{\text{н}}) / [s(s+1)(s+10)] = 0,$$

или для преобладающего корня

$$1 + Ne^{j\varphi_{\text{н}}} K_{\text{д}} / [s(s+1)(s+10)] = 0.$$

Если $a/b \rightarrow \infty$, то $N \rightarrow 1$ и $\varphi_{\text{н}} \rightarrow 0$. Следовательно, траектории корней последнего уравнения превращаются в траектории корней линейной системы. При $a/b \rightarrow 1$ имеем $N \rightarrow 0$, $\varphi_{\text{н}} \rightarrow -\pi/2$, т. е. траектория преобладающего корня s_1 лежит между линиями равной фазы $-\pi/2$ и $-\pi$. Нуль $N_{\text{н}}$ соответственно равен бесконечности и нулю, т. е. лежит правее начала координат на вещественной оси. Следовательно, еще один корень характеристического уравнения будет перемещаться влево от $q_3 = -10$, так как $K_{\text{н}} = q'/\omega < 0$. Линии равной фазы при

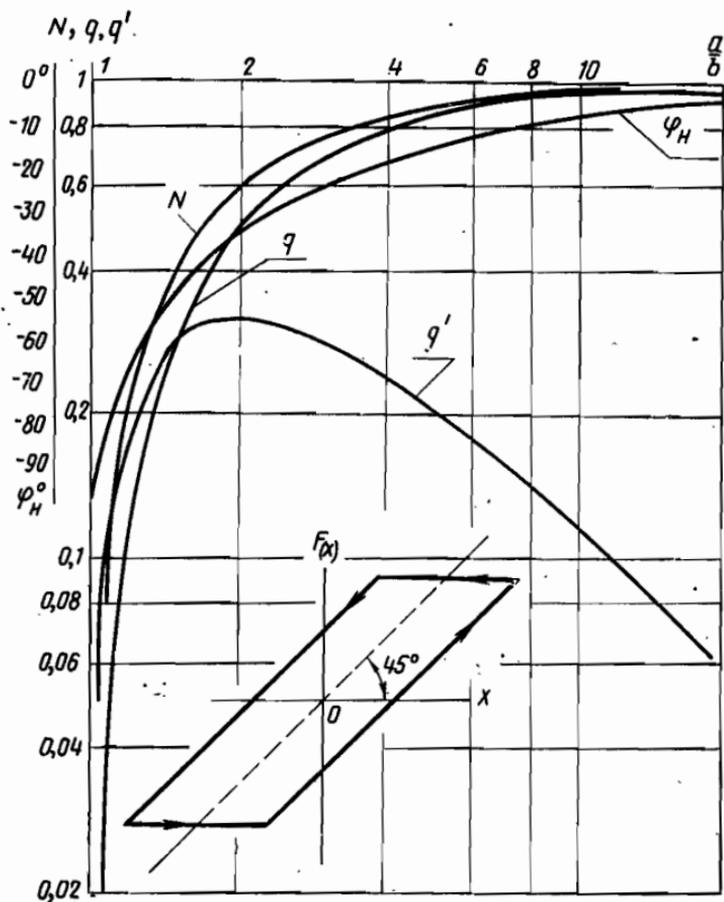


Рис. 10.7. Зависимости $q(a/b)$, $q'(a/b)$, $\varphi_H(a/b)$ и $N(a/b)$ для нелинейности типа люфта

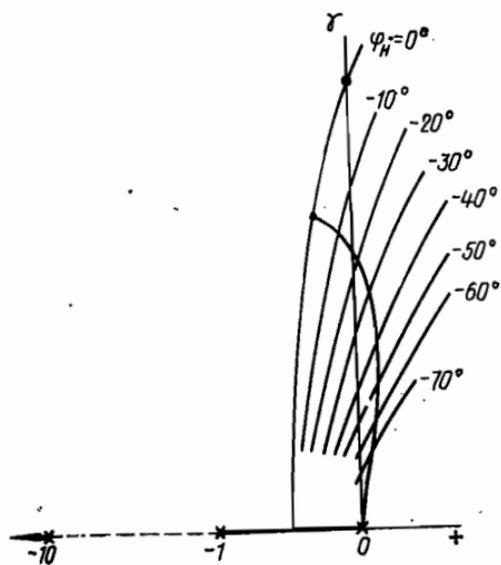


Рис. 10.8. Линии равной фазы

$\varphi_n = 0^\circ, -10^\circ$ и т. д. нанесены на рис. 10.8 и на каждой из них методом проб по уравнению модулей найдены точки, соответствующие $K_{Л} = 53,2$. Градуировка траектории корня s_1 по a/b легко может быть получена по величинам φ_n на линиях равной фазы из графика $\varphi_n(a/b)$ (см. рис. 10.7).

§ 10.4. Расчет автоколебаний в системах с однозначной нелинейностью методом траекторий корней

Если траектории корней условного характеристического уравнения, полученного после гармонической линеаризации нелинейности $F(x)$, пересекают мнимую ось, то в нелинейной системе возможны устойчивые или неустойчивые автоколебания. Ординаты точек пересечения, т. е. критические частоты системы $\omega_{кр}$, могут быть найдены с помощью уравнения (5.23), переписанного в следующем виде:

$$D_0 + D_1 \lambda + D_2 \lambda^2 + \dots + D_\nu \lambda^\nu = 0, \quad (10.16)$$

где $\lambda = \omega_{кр}^2$;

$$D_i = (-1)^i \sum_{j=0}^{2i+1} a_j b_{2i+1-j} (-1)^j. \quad (10.17)$$

Здесь a_i, b_i — коэффициент многочленов передаточной функции $W(s)$.

Степень уравнения (10.16) $\nu \geq \frac{n+m}{2} - 1$ (где ν — целое число).

Если в случаях, характерных для практики, т. е. при $n+m \leq 4$, при $4 < n+m \leq 6$, при $6 < n+m \leq 8$, нужно установить, есть ли в системе автоколебания, то следует решить уравнение не выше третьей степени ($\nu = 1, 2, 3$).

Значения критического коэффициента, соответствующие точкам пересечения траекторий с мнимой осью плоскости корней, определяются как

$$-\kappa_{кр} = \frac{a_0 - a_2 \omega_{кр}^2 + a_4 \omega_{кр}^4 + \dots}{b_0 - b_2 \omega_{кр}^2 + b_4 \omega_{кр}^4 + \dots} = \frac{a_1 - a_3 \omega_{кр}^2 + a_5 \omega_{кр}^4 + \dots}{b_1 + b_3 \omega_{кр}^2 + b_5 \omega_{кр}^4 + \dots}. \quad (10.18)$$

Устойчивость автоколебаний устанавливается по направлению смещения преобладающего корня s_1 при малых изменениях амплитуды колебаний Δa на входе нелинейного элемента от значения A , соответствующего критической частоте.

Если при малом изменении амплитуды Δa корень $s_1 = j\omega_{кр}$ смещается с мнимой оси в левую полуплоскость ($\text{Re } s_1 < 0$), а при изменении $-\Delta a$ — в правую полуплоскость, то автоколебания устойчивы [1]. Метод траекторий корней дает возможность быстро оценить направление перемещения корней и примерный вид их траекторий при κ , изменяющемся от 0 до ∞ , в частности, определить направление перемещения корней при возрастании κ в окрестности точек пересечения траекторий с мнимой осью. Следовательно, автоколебания устойчивы, если

$$\text{Re}(ds_1/d\kappa)_{\kappa=\kappa_{кр}} \cdot (dq/da)_{a=A} < 0, \quad (10.19)$$

и неустойчивы, если

$$\operatorname{Re} (ds_1/d\kappa)_{\kappa=\kappa_{\text{кр}}} \cdot (dq/da)_{a=A} > 0. \quad (10.20)$$

Пусть при увеличении κ корень s_1 перемещается из левой полуплоскости в правую, а следовательно, $\operatorname{Re} (ds_1/d\kappa)_{\kappa=\kappa_{\text{кр}}} > 0$. Тогда автоколебания будут устойчивы только в том случае, если $(dq/da)_{a=A} < 0$, т. е. $q(a)$ в окрестности точки $a = A$ уменьшается с ростом амплитуды (см. пример 10.2).

Аналогично для систем с неоднозначной нелинейностью условие устойчивости автоколебаний имеет вид

$$\operatorname{Re} (ds_1/d\kappa)_{\kappa=\kappa_{\text{кр}}} \cdot (dN/da)_{a=A} < 0, \quad (10.21)$$

где $\kappa = K_{\text{л}} N$.

Знак $\operatorname{Re} (ds_1/d\kappa)_{\kappa=\kappa_{\text{кр}}}$ легко определить, наметив приблизительно траектории корней (см. гл. V).

Основные соотношения метода траекторий корней применяются для выявления зависимости амплитуды A и частоты Ω автоколебаний от параметров системы с однозначной нелинейностью $F(x)$, а также и от вида нелинейной функции $F(x)$.

Вид траектории корней гармонически линеаризованной нелинейной системы с однозначной нелинейностью не зависит от параметра $\kappa = q(a)K_{\text{л}}$, а зависит только от расположения нулей и полюсов передаточной функции линейной части системы. Поэтому уравнение (10.16) не содержит в себе параметра κ .

Выделим из коэффициентов D_i уравнения (10.16) параметр τ передаточной функции линейной части системы (полюс, нуль, коэффициент местной обратной связи и т. п.), влияние которого на параметры автоколебаний нужно установить. Тогда

$$\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \dots + \tau (\beta_0 + \beta_1 \lambda + \beta_2 \lambda^2 + \dots) = 0. \quad (10.22)$$

Степень уравнения (10.16) в наиболее часто встречающихся случаях $\nu \leq 3$. Поэтому и степень многочленов $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ уравнения (10.22) не превышает трех. Кроме того, $\lambda = \omega_{\text{кр}}^2$, следовательно, смысл имеют только вещественные положительные корни уравнения (10.22).

Наметив траектории корней уравнения (10.22) по параметру τ , лежащие на вещественной оси плоскости λ , определим области частот автоколебаний, которые получаются изменением параметра τ , а также направление изменения параметра τ , необходимое для образования различных частот автоколебаний.

Кратные точки (точки ветвления) траекторий корней уравнения (10.22) на вещественной оси плоскости λ соответствуют точкам касания траекторий корней гармонически линеаризованной нелинейной системы с мнимой осью плоскости s или точкам касания двух траекторий на мнимой оси плоскости s (см. рис. 10.8).

Величина параметра τ для каждой точки $(\lambda, j0)$ находится из уравнения (10.22):

$$\tau = - \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \dots}{\beta_0 + \beta_1 \lambda + \beta_2 \lambda^2 + \dots} \quad (10.23)$$

Критический коэффициент усиления системы $\kappa_{кр}$, соответствующий величине $\omega_{кр} = \sqrt{\lambda}$ и вычисленным по (9.23) значениям τ , определяется из (10.18) с учетом зависимости коэффициентов a_i и b_i от τ .

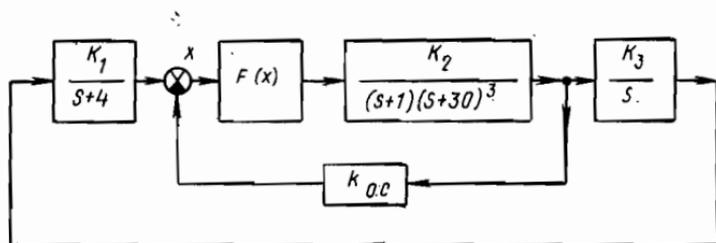


Рис. 10.9. Структурная схема нелинейной системы

Пример 10.3. Исследуем нелинейную систему, структурная схема которой показана на рис. 10.9. Разомкнув систему на входе нелинейного элемента, запишем передаточную функцию линейной части:

$$W(s) = \frac{K_2}{(s+1)(s+30)^3} \left(\frac{K_3}{s} \cdot \frac{K_1}{s+4} + k_{о.с} \right),$$

или

$$W(s) = \frac{K_{л}(s^2 + 4s + \tau)}{s(s+1)(s+4)(s+30)^3} =$$

$$= \frac{K_{л}(s^2 + 4s + \tau)}{s^6 + 95s^5 + 3154s^4 + 4,09 \cdot 10^4 s^3 + 14,6 \cdot 10^4 s^2 + 10,8 \cdot 10^4 s},$$

где $\tau = K_1 K_3 / k_{о.с}$; $K_{л} = k_{о.с} K_2$.

Выясним зависимость параметров автоколебаний от значений коэффициентов передачи линейных звеньев. Определив коэффициенты D_i по формулам (10.17), выделим в уравнении (10.16) параметр τ и перепишем (10.22) для данного конкретного случая:

$$\lambda(\lambda^2 - 311\lambda - 5220) - \tau 1,05 \cdot (\lambda^2 - 430\lambda + 1140) = 0,$$

или

$$\lambda(\lambda + 16)(\lambda - 327) - 1,05 \cdot \tau(\lambda - 2,66)(\lambda - 427) = 0. \quad (10.24)$$

По начальным значениям $\lambda_1^* = 0$, $\lambda_2^* = -16$, $\lambda_3^* = 327$ и конечным точкам $\lambda_1^0 = 2,66$ и $\lambda_2^0 = 427$ разбиваем вещественную ось плоскости λ на отрезки траекторий корней уравнения (10.24) (рис. 10.10).

Чтобы упростить процесс определения кратных точек траекторий корней уравнения (9.24), разделим начальные и конечные точки его траекторий на две группы, значительно удаленные друг от друга:

$$1) \lambda_1^* = 0; \lambda_2^* = -16 \text{ и } \lambda_1^0 = 2,66;$$

$$2) \lambda_3^* = 327; \lambda_2^0 = 427.$$

Эквивалентная (с известным приближением) первой группе начальная точка, помещенная в центре асимптоты первой группы,

$$\lambda_3^* = (-16 + 0 - 2,66)/(2-1) = -18,66.$$

Комплексная траектория корней в окрестности первой группы практически не зависит от влияния второй группы и представляет собой окружность (см. при-

мер 5.2) с центром в точке $\lambda_1^0 = 2,66$ и радиусом, равным

$$\sqrt{|\lambda_1^* - \lambda_1^0| |\lambda_2^* - \lambda_1^0|} = \sqrt{2,66 \cdot 18,66} = 7,07.$$

Комплексная траектория второй группы — также окружность с центром в точке $\lambda_2^0 = 427$ и радиусом, равным

$$\sqrt{|\lambda_3^* - \lambda_2^0| |\lambda_4^* - \lambda_2^0|} = \sqrt{446 \cdot 100} = 211.$$

Кратные точки траекторий корней уравнения (10.24) имеют координаты

$$\lambda_{\text{крат}1} = 2,66 \pm 7,07 = 9,73; \quad \lambda_{\text{крат}2} = 427 - 211 = 216; \quad \lambda_{\text{крат}3} = 427 + 211 = 638.$$

В этих точках параметр найдем по формуле

$$\tau = \frac{\lambda^3 - 311\lambda^2 - 5220\lambda}{1,05(\lambda^2 + 430\lambda + 1140)}, \quad (10.25)$$

подставив в нее $\lambda_{\text{крат}1, 2, 3}$. При этом получим $\tau_{\text{крат}1} = 25,1$; $\tau_{\text{крат}2} = 129$; $\tau_{\text{крат}3} = 870$.

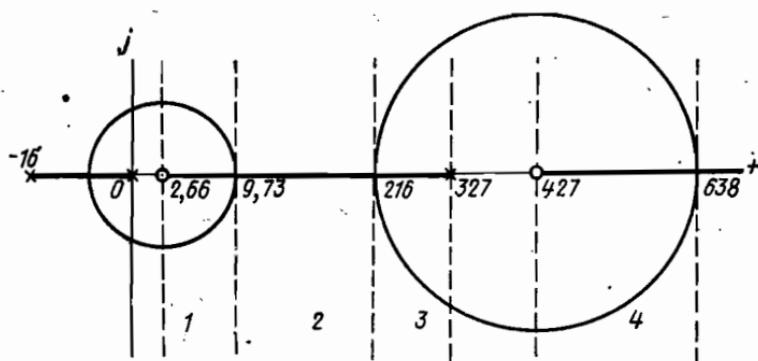


Рис. 10.10. Траектории корней уравнения (10.24)

Чтобы установить вид траекторий корней гармонически линеаризованной системы (см. рис. 10.9) и направление их перехода через мнимую ось, рассмотрим плоскость корней системы s (рис. 10.11).

Сумма координат нулей передаточной функции $W(s)$ не зависит от конечных значений τ и равна $N_1 + N_2 = -4$. Поэтому траектории корней системы будут иметь асимптоты с центром в точке $\delta_a = (-3 \cdot 30 - 4 - 1 + 4)/(6 - 2) = -22,75$, образующие углы $\frac{180^\circ}{6-2} (2i - 1)$ (причем $i = 1, 3$), т. е. 45° и 135° , с положительным направлением вещественной оси.

При $\tau \rightarrow \infty$ нули передаточной функции $W(s)$ стремятся к бесконечно удаленной точке и их влиянием на траектории можно пренебречь. В этом случае центр асимптот лежит в точке

$$\delta'_a = (-3 \cdot 30 - 4 - 1)/6 = -15,8,$$

а асимптоты образуют с вещественной осью углы $180^\circ/6 = 30^\circ$, $180^\circ/6 \cdot 3 = 90^\circ$ и $180^\circ/6 \cdot 5 = 150^\circ$.

Из уравнения (10.24) найдем критические частоты системы в этом случае ($\tau \rightarrow \infty$):

$$\omega_{\infty 1} = \sqrt{2,66} = 1,63; \quad \omega_{\infty 2} = \sqrt{427} = 20,7.$$

Асимптота l' пересекает мнимую ось в точке с ординатой $8,76 < \omega_{\infty 2}$. Следовательно, критические частоты $\omega_{\text{кр}} > \omega_{\infty 2}$ не могут быть получены в системе

при отрицательной обратной связи ($\kappa > 0$) и область 4 на рис. 10.10 не имеет смысла.

При $\tau = 0$ система вырождается (вследствие компенсации полюсов $q_1 = 0$ и $q_2 = -4$ нулями) и имеет одну точку пересечения траекторий корней с мнимой осью при $\omega_{кр} = \omega_{кpo} = \sqrt{327} = 18,1$. В точке пересечения $\text{Re}(ds_1/d\kappa) > 0$, так как начальные точки траекторий лежат в левой полуплоскости.

Увеличение $\tau > 0$ приводит к тому, что точка пересечения траектории с мнимой осью перемещается вниз ($\omega_{крз} < \omega_{кpo}$).

При $\tau = \tau_{кр1}$ еще одна траектория достигает мнимой оси — касается ее слева в точке $\omega_{кр1} = \sqrt{9,73} = 3,12$. Колебания с частотой $\omega_{кр1}$ неустойчивы, так как малые изменения $-\Delta a$ приведут к смещению преобладающего корня с мнимой оси в левую полуплоскость.

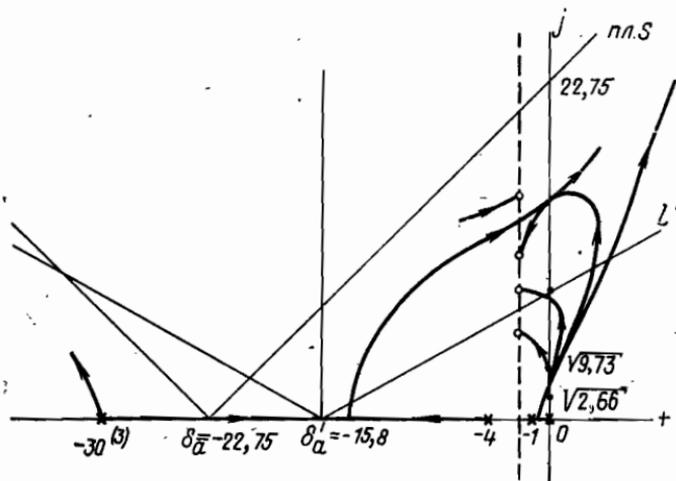


Рис. 10.11. Траектории корней гармонически линеаризованной системы на плоскости

При $\tau_{кр1} < \tau < \tau_{крз}$ траектории корней системы (см. рис. 10.9) пересекают мнимую ось плоскости s в трех точках ($\omega_{кр1} < \omega_{кр2} < \omega_{крз}$). Точки $\omega_{кр1}$ и $\omega_{кр2}$ образованы пересечением одной траектории с мнимой осью, начало которой лежит в левой полуплоскости, поэтому

$$\text{Re}(ds_1/d\kappa)_{\omega=\omega_{кр1}} > 0; \quad \text{Re}(ds_1/d\kappa)_{\omega=\omega_{кр2}} < 0;$$

При $\tau = \tau_{кр2}$ обе траектории касаются друг друга на мнимой оси плоскости s в точке $\omega = \sqrt{216} = 14,7$. Одна из них пересекает мнимую ось слева направо, а другая — в противоположном направлении. В этом случае имеем гармонически линеаризованную нелинейную систему с кратными мнимыми корнями — система неустойчива.

Таким образом, можно выделить следующие области устойчивости автоколебаний (см. рис. 10.10) при различных типах нелинейной функции $F(x)$:

- 1) если $(dq/da)_{a=A} < 0$ — область 1 и часть области 3 ($\tau < \tau_{кр1}$);
- 2) если $(dq/da)_{a=A} > 0$ — область 2.

Критическое значение параметра $\kappa_{кр}$, соответствующее точкам пересечения траекторий корней с мнимой осью, найдем по (10.18):

$$-\kappa_{кр} = \frac{a_1 - a_3 \omega_{кр}^2 + a_5 \omega_{кр}^4}{b_1} = \frac{10,8 \cdot 10^4 - 4,09 \cdot 10^4 \cdot \omega_{кр}^2 + 95 \omega_{кр}^4}{4}$$

В этом частном случае величина τ не входит в формулу для $\kappa_{кр}$.

Зависимости $\tau(\omega_{кр})$ и $\chi_{кр}(\omega_{кр})$ показаны на рис. 10.12, где теми же цифрами, что и на рис. 10.10, отмечены области устойчивых автоколебаний для различных типов нелинейностей.

Пусть желательнее иметь в системе устойчивые автоколебания частотой $\omega_{кр} = \Omega = 8$. Из графика находим, что при этом $\tau = K_1 K_3 / k_{0.c} = 57$, а $K_1 = K_2 \cdot k_{0.c} > \chi_{кр} = 5,5 \cdot 10^4$. Зависимость $q(a)$ в окрестности точки $a = A$

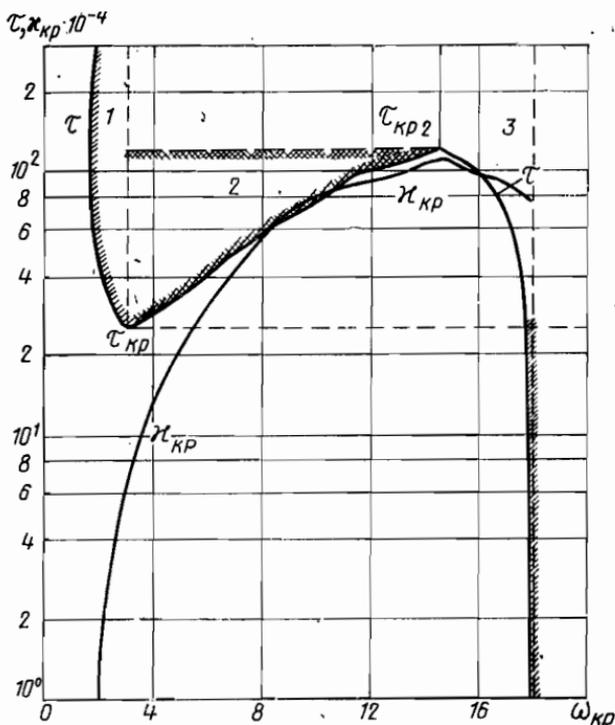


Рис. 10.12. Зависимости $\tau(\omega_{кр})$ и $\chi_{кр}(\omega_{кр})$ для системы рис. 10.9

Должна иметь возрастающий характер $(dq/dA)_{a=A} > 0$. Конкретные величины коэффициентов $k_{0.c}$, K_1 , K_2 и K_3 и вид функции $F(x)$ можно выбрать из конструктивных соображений.

§ 10.5. Модифицированные диаграммы качества нелинейных колебаний и их построение методом траекторий корней

Диаграммы качества нелинейных колебаний представляют собой семейства линий на плоскости (a, τ) [1]

$$\delta(a, \tau) = \text{const}; \quad \omega(a, \tau) = \text{const}, \quad (10.26)$$

где a — амплитуда квазигармонических колебаний на входе нелинейного элемента; τ — свободный (изменяемый) параметр системы.

Диаграммы качества позволяют находить зависимости координат преобладающего корня характеристического уравнения гармонически линеаризованной нелинейной системы от амплитуды колебаний a

при различных величинах параметра τ . По зависимостям $\delta(a)$ и $\omega(a)$ можно оценить качество системы и выбрать величину τ , обеспечивающую заданное качество системы.

Характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы с однозначной нелинейностью имеет вид

$$1 + q(a) K_{\text{л}} W(s) = 0. \quad (10.27)$$

Как указано в § 10.2, построение траекторий корней уравнения (10.27) по параметру a удобно проводить в два этапа: сначала строить траектории по параметру $\kappa = q(a) K_{\text{л}}$, а затем градуировать их по a с помощью зависимости $q(a)$, находя величину q из равенства

$$q(a) = \kappa / K_{\text{л}}. \quad (10.28)$$

Очевидно, что по одной траектории преобладающего корня с помощью такого приема можно построить диаграмму качества для различных нелинейностей $F(x)$:

$$\delta(a, K_{\text{л}}) = \text{const};$$

$$\omega(a, K_{\text{л}}) = \text{const}.$$

Поэтому целесообразно для диаграмм качества одним из параметров принять κ вместо a .

Назовем модифицированными диаграммами качества семейства линий на плоскости (κ, τ) :

$$\left. \begin{aligned} \delta(\kappa, \tau) &= \text{const}; \\ \omega(\kappa, \tau) &= \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (10.29)$$

где τ — любой параметр системы, кроме $K_{\text{л}}$. Чтобы облегчить вычисления по (10.28), используем логарифмический масштаб по оси κ при построении графиков по (10.29).

С помощью таких диаграмм качества можно находить зависимости $\delta(a)$ и $\omega(a)$ для различных значений не только τ , но и $K_{\text{л}}$, а также различных однозначных нелинейных функций $F(x)$. При этом могут встретиться два случая:

- 1) τ и $q(a)$ входят в характеристическое уравнение линейно;
- 2) τ и $q(a)$ входят в характеристическое уравнение нелинейно, т. е. в виде произведения или частного.

Получение зависимостей $\delta(a)$ и $\omega(a)$ из модифицированной диаграммы качества (первый случай) показано на рис. 10.13. С уровнем $\lg \kappa = \lg K_{\text{л}}$, соответствующим выбранному значению $K_{\text{л}}$, совмещается уровень $\lg q = 0$ ($q = 1$) зависимости $q(a)$. Ординаты точек пересечения прямой, соответствующей выбранному значению $\tau = \text{const}$, с линиями δ и ω переносятся на кривую $q(a)$, что и дает величины a для каждой точки пересечения, т. е. для каждого значения δ и ω .

Если $\tau = \tau_1 \cdot q(a)$ (второй случай), то для выявления зависимостей $\delta(a)$ и $\omega(a)$ из модифицированной диаграммы качества с логарифмическим масштабом по осям κ и τ нужно (рис. 10.14) нанести на диаграмму

точку с координатами, соответствующими $\kappa = K_n$ и $\tau = \tau_1$; затем под углом 45° к осям $\lg \kappa$ и $\lg \tau$ провести через эту точку прямую l ; далее совместить с уровнем $\lg \kappa = \lg K_n$ диаграммы уровень $\lg q = 0$ гра-

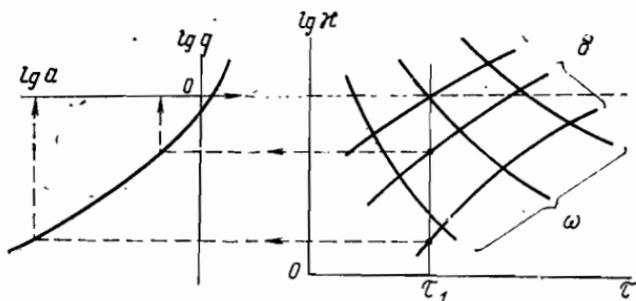


Рис. 10.13. Получение зависимостей $\delta(a)$ и $\omega(a)$ из модифицированной диаграммы качества

фика $q(a)$ и перенести на него ординаты точек пересечения прямой l с линиями δ и ω диаграммы, что и позволит найти значения амплитуды колебаний a для конкретных значений δ и ω .

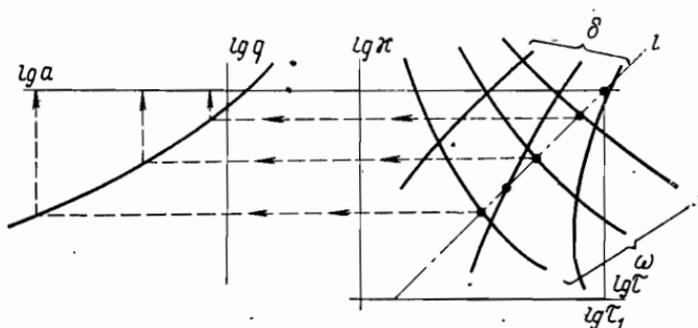


Рис. 10.14. Получение зависимостей $\delta(a)$ и $\omega(a)$ при $\tau = \tau_1 q(a)$

При построении модифицированных диаграмм качества удобно использовать уравнение критических частот при смещенной мнимой оси (см. § 5.2):

$$\bar{D}_0 + \bar{D}_1 \lambda + \bar{D}_2 \lambda^2 + \dots + \bar{D}_v \lambda^v = 0, \quad (10.30)$$

где $\lambda = \omega^2$, а величины \bar{D}_i определяются с помощью формул (10.17), но в них вместо коэффициентов a_i передаточной функции $W(s)$ следует подставлять коэффициенты «смещенной» передаточной функции $\bar{W}(s^*)$, где $s^* = s + \delta$:

$$\tilde{a}_i = \sum_{j=i}^n \frac{j!}{(j-i)! i!} a_j \delta^{j-i}. \quad (10.31)$$

Вместо коэффициентов b_i следует подставлять их значения, определенные по формуле, аналогичной (10.31).

Выделим из коэффициентов \tilde{D}_i уравнения (10.30) параметр τ [см. § 10.4]:

$$\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 \lambda + \tilde{\alpha}_2 \lambda^2 + \dots + \tau (\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 \lambda + \dots) = 0. \quad (10.32)$$

Задаваясь различными значениями δ (от них зависят коэффициенты $\tilde{\alpha}_i$ и $\tilde{\beta}_i$) и ω , можно вычислить

$$-\tau = \frac{\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 \lambda + \tilde{\alpha}_2 \lambda^2 + \dots}{\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 \lambda + \tilde{\beta}_2 \lambda^2 + \dots}$$

а затем определить параметр κ с помощью формулы (10.18).

Пример 10.4. Покажем последовательность расчета диаграммы качества для системы, структурная схема которой приведена на рис. 10.15, и выясним влияние на динамику системы параметров $k_{0,c}$ и K_2 .

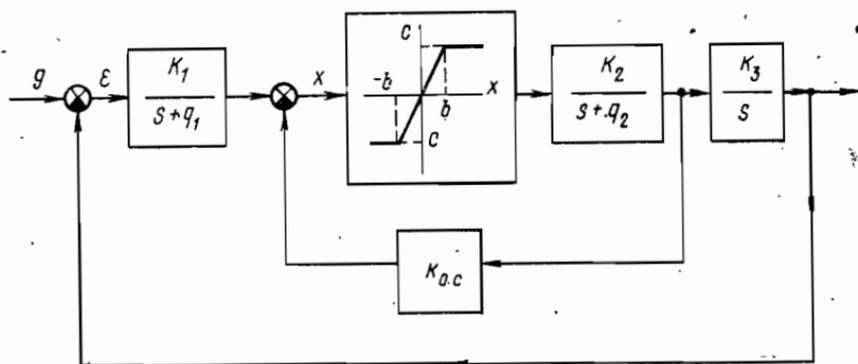


Рис. 10.15. Структурная схема нелинейной системы

Запишем характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы:

$$1 + \bar{q}(a/b) K_{\text{л}} W(s) = 0,$$

где

$$K_{\text{л}} = K_1 K_2 K_3 c/b;$$

$$W(s) = [s(s + q_1)(s + q_c)]^{-1}$$

(здесь $q_c = q_2 + \bar{q}(a/b) \cdot c K_2 k_{0,c}/b$);

$\bar{q}(a/b)$ — нормированный коэффициент гармонической линеаризации, соответствующий нелинейной функции $F(x)$, у которой $c = b$.

Введем обозначения:

$$\kappa = \bar{q}(a/b) \frac{c}{b} \cdot K_1 K_2 K_3;$$

$$\tau = \bar{q}(a/b) \tau_1;$$

$$\tau_1 = \frac{c}{b} K_2 k_{0,c}.$$

Раскрыв скобки в выражении для $W(s)$, получим

$$A(s) = s^3 + (q_1 + q_c) s^2 + q_1 q_c s; \quad B(s) = 1.$$

Запишем коэффициенты a_i и b_0 :

$$a_0 = 0; \quad a_1 = q_1 q_c; \quad a_2 = q_1 + q_c; \quad a_3 = 1; \quad b_0 = 1.$$

«Смещенные» коэффициенты a_i и b_0 найдем по формуле (10.31):

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 &= q_1 q_c \delta + (q_1 + q_c) \delta^2 + \delta^3; \\ \tilde{a}_1 &= q_1 q_c + 2(q_1 + q_c) \delta + 3\delta^2; \quad \tilde{a}_2 = q_1 + q_2 + 3\delta; \quad \tilde{a}_3 = 1; \\ \tilde{b}_0 &= 1. \end{aligned}$$

При этом $\tilde{D}_i = (-1)^i \tilde{a}_{2i+1}$.

Уравнение критических частот при смещенной мнимой оси (10.30) имеет вид

$$\tilde{a}_1 - \tilde{a}_3 \lambda = 0.$$

Подставив в него значения \tilde{a}_1 и \tilde{a}_3 , получим

$$q_1 q_c + 2(q_1 + q_c) \delta + 3\delta^2 - \lambda = 0,$$

откуда найдем

$$q_c = (\omega^2 - 2q_1 \delta - 3\delta^2) / (q_1 + 2\delta_1).$$

Координаты точек модифицированной диаграммы качества будем рассчитывать в следующем порядке:

- 1) задавая δ , вычислим q_c для ряда значений ω ;
- 2) найдем $\tau = q_c - q_2$;
- 3) определим для каждой точки (δ, ω) значения

$$\kappa = \tilde{a}_0 - \tilde{a}_2 \omega^2 = (q_1 + q_c) \delta^2 + q_1 q_c \delta - \omega^2 (q_1 + q_c + 3\delta).$$

§ 10.6. Расчет качества гармонически линеаризованных нелинейных систем методом усреднения корней

Для оценки качества нелинейных автоматических систем часто используют показатели переходного процесса, вызванного ступенчатым входным воздействием $y(t) = y_0 \cdot 1(t)$.

Определим перерегулирование σ и время достижения перерегулирования t_n . При этом полагаем, что исследуемая система (рис. 10.16) удовлетворяет условиям применимости метода гармонической линеаризации и процесс на входе нелинейного элемента описывается следующими выражениями:

$$x = a \sin \psi; \quad da/dt = \delta' a; \quad d\psi/dt = \omega', \quad (10.33)$$

где δ' и ω' — медленно меняющиеся функции времени (штрихи при δ' и ω' указывают на некоторое различие переходных процессов на входе нелинейного элемента и в точке измерения рассогласования e).

Чтобы переходный процесс на входе нелинейного элемента был близок к затухающим гармоническим колебаниям (10.33), характеристическое уравнение гармонически линеаризованной нелинейной си-

стемы (10.3) должно иметь преобладающую пару корней $s_{1,2} = \delta \pm j\omega$. При этом текущее значение ошибки системы [1]

$$e(t) \approx \frac{y_0}{\sin \psi_0} e^{\int_0^t \delta dt} \sin \left(\int_0^t \omega dt + \psi_0 \right), \quad (10.34)$$

так как корни $s_{1,2}$ изменяются во времени в зависимости от a .

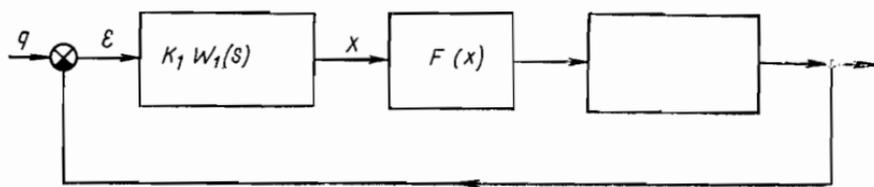


Рис. 10.16. Структурная схема нелинейной системы

Заменяем интегралы в (10.34): $\int_0^t \delta dt = \bar{\delta}t$, $\int_0^t \omega dt = \bar{\omega}t$, т. е. усредним значения корней характеристического уравнения системы по времени:

$$\bar{s}_i = \frac{1}{t} \int_0^t s_i dt. \quad (10.35)$$

Тогда

$$e(t) \approx \frac{y_0}{\sin \psi_0} e^{\bar{\delta}t} \sin(\bar{\omega}t + \psi_0). \quad (10.36)$$

Значения $e(t)$ из (10.34) совпадают со значениями $e(t)$ из (10.36) в некоторый момент времени t , до которого произведено усреднение.

Качество переходного процесса в нелинейной системе может быть приближенно оценено двумя величинами $\bar{\delta}$ и $\bar{\omega}$ или, что удобнее, величинами $\bar{\omega}$ и $\bar{\zeta}_{\text{п}}$. Средний коэффициент демпфирования

$$\bar{\zeta}_{\text{п}} = \bar{\delta} / \bar{\omega}.$$

Так, время достижения i -го экстремума (перерегулирования) в кривой переходного процесса $e(t)$

$$t_{\text{п}i} = i\pi / \bar{\omega}, \quad (10.37)$$

а величина перерегулирования

$$\sigma_i = e^{-i\pi \bar{\zeta}_{\text{п}}}. \quad (10.38)$$

Пользоваться непосредственно формулой (10.35) неудобно, так как в нее входит время t в явном виде. Чтобы исключить величину t ,

выразим её через амплитуду a сигнала на входе нелинейности. Приближенно запишем

$$a(t) = a_0 e^{-\bar{\delta}' t}, \quad (10.39)$$

где a_0 — значение амплитуды при $t = 0$.

Из выражения (10.39) найдем

$$t \approx \frac{1}{\bar{\delta}'} \ln \frac{a_0}{a}; \quad dt \approx -\frac{1}{\bar{\delta}'} d(\ln a).$$

Подставив t и dt в (10.35), получим

$$\bar{s}_i \approx \frac{\int_a^{a_0} s_i(a) d(\ln a)}{\ln a_0 - \ln a}. \quad (10.40)$$

С помощью формулы (10.40) среднее за время t положение корня \bar{s}_i характеристического уравнения вычисляется через зависимость $s_i(a)$, найденную в интервале изменения амплитуд колебаний на входе нелинейного элемента от a_0 до $a(t)$.

Чтобы определить зависимость $s_i(a)$, целесообразно воспользоваться указанными в предыдущих параграфах приемами построения траекторий корней по параметру a . Поскольку предполагается наличие у системы преобладающей пары корней, то строить нужно только траекторию преобладающего корня s_1 . Далее нетрудно по этой траектории найти $\omega(b)$ и $\zeta_{\Pi}(a)$.

Величину начальной амплитуды a_0 можно определить, полагая, что при $t \rightarrow 0$ зависимость $x(t)$ близка к синусоидальной с амплитудой a_0 и частотой $\omega(a_0)$. Тогда (см. рис. 10.16)

$$a_0 = y_0 K_1 \text{ mod } W_1 [j\omega(a_0)]. \quad (10.41)$$

Часто линейный элемент, находящийся перед нелинейностью, является фильтром нижних частот с частотой среза $\omega_c \gg \omega(a_0)$. В этом случае

$$a_0 \approx k_1 y_0, \quad (10.42)$$

где k_1 — коэффициент передачи указанного элемента, передаточная функция которого

$$\begin{aligned} K_1 W_1(s) &= K_1 \frac{s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \\ &= k_1 \frac{\frac{1}{b_0} s^m + \frac{b_{m-1}}{b_0} s^{m-1} + \dots + \frac{b_1}{b_0} s + 1}{\frac{1}{a_0} s^n + \frac{a_{n-1}}{a_0} s^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_0} s + 1}, \end{aligned}$$

откуда

$$k_1 = K_1 b_0 / a_0.$$

Интегрирование в формуле (10.40) следует проводить до момента времени, соответствующего достижению i -х экстремумов кривой переходного процесса. При этом величины σ_i и $t_{\pi i}$ будут близки к их истинному значению. Соответствующая i -му экстремуму в кривой переходного процесса величина

$$a_{\pi i} \approx a_0 \sigma_i. \quad (10.43)$$

Средняя величина коэффициента демпфирования в соответствии с (10.40)

$$\bar{\xi}(a_{\pi i}) = \frac{\int_{a_0}^{a_{\pi i}} \xi_{\pi}(a) d(\ln a)}{\ln a_0 - \ln a_{\pi i}}. \quad (10.44)$$

Используя соотношения (10.38) и (10.43), получим

$$\ln a_0 - \ln a_{\pi i} = i\pi \bar{\xi}_{\pi}. \quad (10.45)$$

Решение уравнений (10.44) и (10.45) нетрудно получить графически.

§ 10.7. Синтез гармонически линеаризованной системы по требованиям, предъявляемым к её качеству

Использование усреднения корней оказывается полезным при решении задачи синтеза корректирующих цепей в нелинейной системе. При этом на основании требований, предъявляемых к качеству системы, определяется «желаемое» положение преобладающей пары корней $s_{1,2}$ на комплексной плоскости ($\omega_{ж.}$, $\xi_{п.ж.}$). Структура и параметры корректирующей цепи выбираются так, чтобы средние значения частоты и коэффициента демпфирования были близки к желаемым величинам:

$$\bar{\omega} \approx \omega_{ж.}; \quad \bar{\xi}_{\pi} \approx \xi_{п.ж.} \quad (10.46)$$

Для выполнения этого условия необходимо, чтобы траектория преобладающего корня проходила в окрестности желаемой точки ($\omega_{ж.}$, $\xi_{п.ж.}$) или через нее.

Если нелинейность $F(x)$ однозначная, то синтез корректирующих устройств, при которых траектория преобладающего корня проходит через желаемую точку, может быть осуществлен с применением хорошо разработанных для линейных систем методов траекторий корней (см. гл. V).

Значительно сложнее выполнить синтез корректирующих цепей для системы с неоднозначной нелинейностью, хотя понятие среднего положения преобладающего корня гармонически линеаризованной системы применимо и здесь.

В случае, если задана структура (вид передаточной функции) корректирующего устройства и необходимо найти только величину его свободного (настроечного) параметра τ , целесообразно построить

диаграммы качества нелинейных колебаний (см. § 10.5) и по ним в окрестности «желаемой» точки $(\omega_{ж}, \zeta_{п.ж})$ путем проб подобрать величину τ .

В практике широко распространен класс однозначных нелинейных функций $F(x)$, которые при $x = b$ принимают значение $F(x) = c$, т. е. класс функций, описывающих ограниченные мощности, перемещения и другие параметры реальных элементов автоматических систем. Во многих системах режим работы отдельных элементов «с максимальной мощностью» (релейный режим) является типичным, причем часто величина амплитуды сигнала на входе таких элементов $a \gg b$. При этом коэффициент гармонической линеаризации нелинейного элемента с ограничением

$$q(a) \approx 4c/b,$$

а параметр κ характеристического уравнения гармонически линеаризованной нелинейной системы

$$\kappa = q(a)K_{л} = \frac{1}{a} \cdot \frac{4cK_{л}}{\pi}. \quad (10.47)$$

Формула (10.40) для указанного частного случая принимает вид

$$\bar{s}_i(\kappa) = \frac{\int_{\kappa_{п}}^{\kappa_0} s_i(\kappa) d \ln \kappa}{\ln \kappa_{п} - \ln \kappa_0}. \quad (10.48)$$

Начальную величину κ_0 и величину, соответствующую моменту достижения перерегулирования $\kappa_{п}$, согласно формулам (10.42) и (10.45) можно выразить соотношениями:

$$\kappa_0 = q(a_0) K_{л} \approx 4cK_{л}/(\pi k_1 y_0); \quad (10.49)$$

$$\ln \kappa_{п} - \ln \kappa_0 \approx \pi \zeta_{п}. \quad (10.50)$$

Таким образом, параметры $K_{л}$ и k_1 линейной части системы и параметр c нелинейной части, а также величина входного сигнала y_0 в этом частном случае оказываются связанными через параметр κ с положением преобладающего корня сравнительно простыми соотношениями.

Пример 10.5. Выберем структуру и параметры элемента обратной связи $K_{о.с} W_{о.с}(s)$ в маломощной следящей системе (рис. 10.17), а также величины k_1 и b , при которых качество переходного процесса, вызванного скачкообразным изменением входного сигнала на величину y_0 , удовлетворяет условиям $\sigma \leq 0,05$; $t_{п} \leq 0,25$ сек. При этом заданы следующие величины: $q_1 = 40 \text{ сек}^{-1}$, $q_2 = 25 \text{ сек}^{-1}$, $q_3 = 125 \text{ сек}^{-1}$. Двигатель и редуктор следящей системы выбраны из конструктивных соображений с учетом необходимости обеспечить отработку входного сигнала y_0 за время $t_{п}$ с некоторым запасом, причем $\frac{4c}{\pi y_0} K_2 K_3 q_1 = 1,59 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-3}$.

По заданным показателям качества с помощью формул (10.37) и (10.38) принимаем $\zeta_{п.ж} = 1$, $\omega_{ж} = 14 \text{ сек}^{-1}$ (с запасом).

Запишем характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы:

$$1 + \frac{q(a) K_1 K_{0.c} W_K(s)}{s(s+q_1)(s+q_2)(s+q_3)} = 0,$$

где

$$W_K(s) = (s+q_1) s W_{0.c}(s) + K_1 K_3 / K_{0.c}.$$

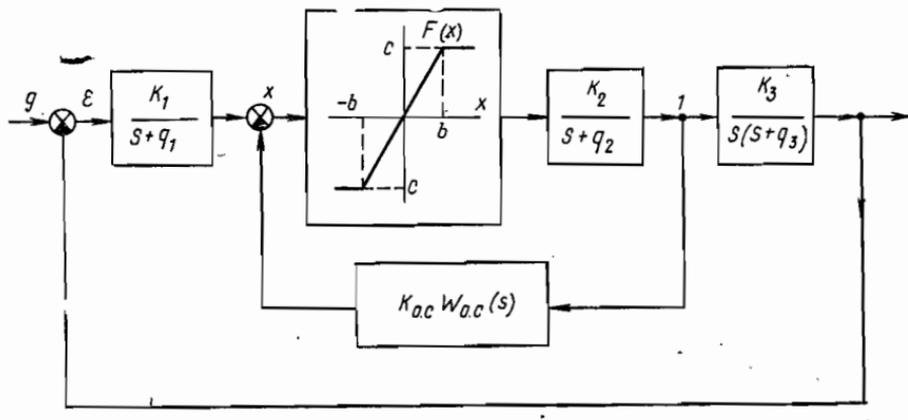


Рис. 10.17. Структурная схема маломощной следящей системы

Составим уравнение фаз по характеристическому уравнению системы

$$-180^\circ = \psi_0 - \psi_1 - \psi_2 - \psi_3 - \psi_K,$$

где

$$\psi_K = \arg W_K(s); \quad \psi_i = \arg(s - q_i).$$

В желаемой точке

$$\varphi_{н.ж} = -180^\circ + 180^\circ - \arctg 1 + \arctg \frac{14}{25-14} +$$

$$+ \arctg \frac{14}{40-14} + \arctg \frac{14}{125-14} = 47^\circ 50' > 0.$$

Наиболее простая конструктивная реализация указанной величины $\varphi_{н.ж}$ может быть осуществлена путем введения в систему жесткой отрицательной обратной связи по скорости двигателя $K_{0.c} W_{0.c}(s) = \tau$. В этом случае

$$W_K(s) = s(s+q_1) + K_1 K_3 / \tau = (s - N_1)(s - N_2),$$

где

$$N_{1,2} = -\frac{q_1}{2} \pm \sqrt{\frac{q_1^2}{4} - \frac{1}{\tau^*}} = \delta_0 \pm j\omega_0.$$

причем

$$\tau^* = \frac{\tau}{K_1 K_3}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{\tau^*} - \frac{q_1^2}{4}}; \quad \delta_0 = -\frac{q_1}{2}.$$

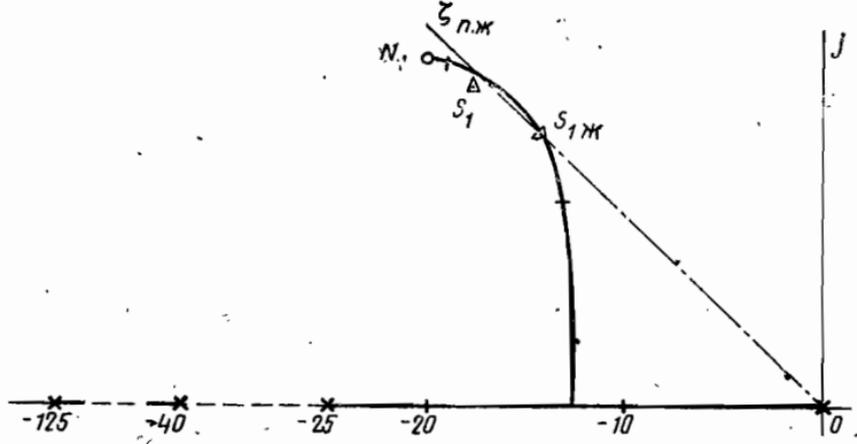


Рис. 10.18. Траектория преобладающего корня

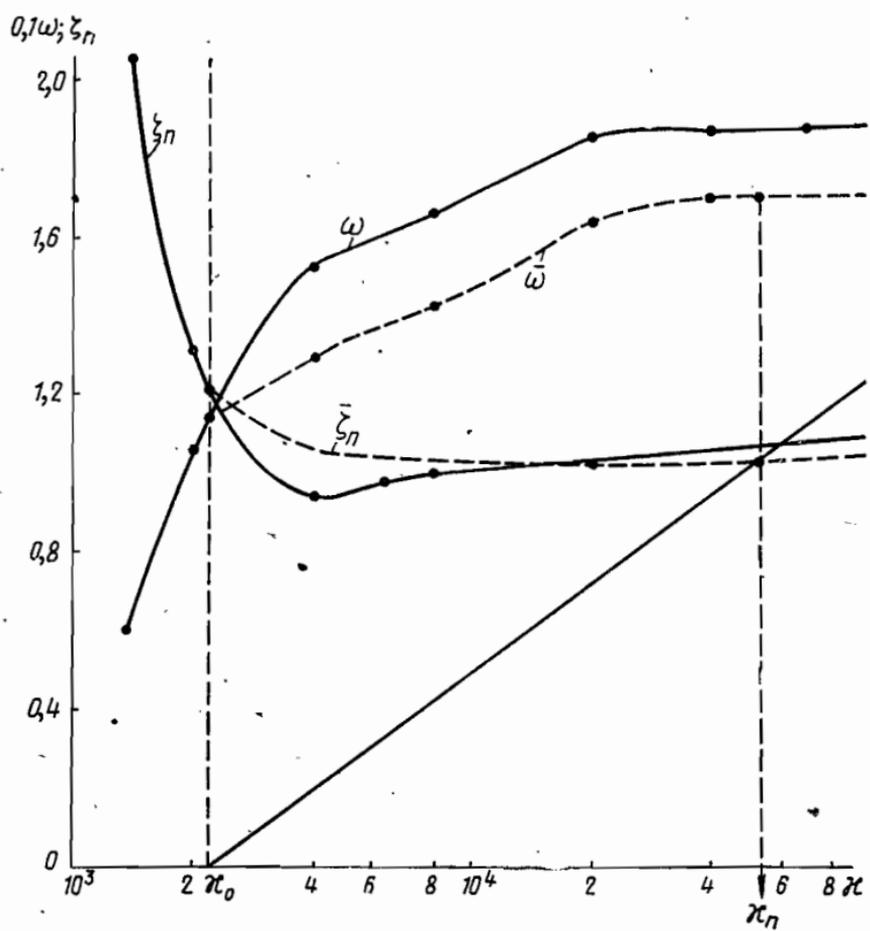


Рис. 10.19. Кривые $\omega(\kappa)$ и $\zeta_n(\kappa)$

$$\varphi_{н. ж} = \operatorname{arctg} \frac{\omega_{ж} - \omega_0}{\delta_{ж} - \delta_0} \nrightarrow \operatorname{arctg} \frac{\omega_{ж} - \omega_0}{\delta_{ж} - \delta_0};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{н. ж} = \frac{2\omega_{ж} (\delta_{ж} - \delta_0)}{(\delta_{ж} - \delta_0)^2 - (\omega_{ж}^2 - \omega_0^2)},$$

то

$$\left. \begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{q_1^2}{4} - \frac{1}{\tau^*} = \frac{2\omega_{ж} (\delta_{ж} - \delta_0)}{\operatorname{tg} \varphi_{ж}} \nrightarrow \omega_{ж}^2 - (\delta_{ж} - \delta_0)^2; \\ \tau^* &= \left[\frac{q_1^2}{4} - \omega_{ж}^2 - \frac{2\omega_{ж} (\delta_{ж} - \delta_0)}{\operatorname{tg} \varphi_{ж}} \nrightarrow (\delta_{ж} - \delta_0)^2 \right]^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (10.51)$$

Подставив численные значения $\omega_{ж}$, $\delta_{ж}$ и $\varphi_{н. ж}$ в (10.51), получим $\tau^* = 1/730$ сек. Построим траекторию преобладающего корня характеристического уравнения системы (рис. 10.18), а по ней — кривые $\omega(x)$ и $\zeta_{п}(x)$ (рис. 10.19), где $x = 4cK_2\tau/(\pi a)$.

Определим величину

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= \frac{4cK_2\tau}{\pi k_1 y_0} = \frac{4cK_2K_3 q_1 \tau}{\pi y_0 K_1 K_3} = \frac{4cK_2K_3\tau^*}{\pi y_0} = \\ &= 1.59 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{730} = 2180 \text{ (сек}^{-2}\text{)}. \end{aligned}$$

Начиная от значения κ_0 , произведем усреднение величин ζ_0 и ω . Нанесем на график прямую (10.50), которая проходит через точку с координатами $x = \kappa_0$, $\zeta_{п} = 0$ и образует с положительным направлением оси x угол $36^\circ 15'$. По точке пересечения этой прямой с линией $\zeta_{п}(x)$ определим при $\kappa_{п} = 5,5 \cdot 10^4$ значения $\zeta_{п} = 1,03$ и $\omega = 17,1$ 1/сек, а по ним — $\sigma = 0,0407$ и $t_{п} = 0,184$ сек. Следовательно, требования, предъявляемые к качеству системы, выполнены с запасом.

Величины τ , K_1 , c/b можно теперь выбрать из конструктивных соображений. Пусть, например, $k_1 = 150$ ($K_1 = 6000$ сек $^{-1}$), $K_3 = 1/125$ в/рад (коэффициент передачи редуктора и преобразователя угла поворота в напряжении). Тогда

$$\tau = \tau^* K_1 K_3 = \frac{1}{730} \cdot 6000 \cdot \frac{1}{125} = 0,066 \text{ в.сек/рад.}$$

Принимаем $a_{п}/b = 1$, т. е. $q(a_{п}/b) = c/b$ и $K_2 c/b = \kappa_{п}/\tau = 5,5 \cdot 10^4 / 0,066 = 8,4 \cdot 10^5$ сек $^{-2}$, откуда, зная K_2 и c (так как двигатель выбран), находим b .

Литература к главе X

1. Е. П. Попов, И. П. Пальтов. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. Физматгиз, 1960.

2. Дж. Траксел. Синтез систем автоматического регулирования. Машгиз, 1959.

3. Дж. Тэллер, М. Пестель. Анализ и расчет нелинейных систем автоматического управления. «Энергия», 1964.

4. Э. Г. Удерман. Приближенное исследование автоколебаний методом корневой годографа. «Энергия», 1967.

5. Л. П. Смольников, В. А. Хохлов. К расчету нелинейной приборной следящей системы. Изв. ВУЗов. «Приборостроение», 1965, № 5.

6. Л. П. Смольников, В. А. Хохлов. О расчете гармонически линеаризованных систем методом усреднения корней. «Автоматика и телемеханика», 1966, № 7.

Глава XI

ИССЛЕДОВАНИЕ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 11.1. Предварительные замечания

На практике часто встречаются нелинейные системы автоматического управления, структурная схема которых представляет собой последовательное соединение нелинейного элемента с характеристикой, не выходящей за пределы угла $[0, k_F]$ (рис. 11.1), и линейной части с передаточной функцией $W(s)$ (рис. 11.2). К этому виду может быть сведена структурная схема любой системы с одной нелинейностью.

При исследовании таких систем может представлять интерес абсолютная устойчивость положения равновесия, т. е. асимптотическая устойчивость «в целом» положения равновесия при характеристиках нелинейного элемента, принадлежащих к определенному классу, а также абсолютная устойчивость процессов, обусловленных ограниченными

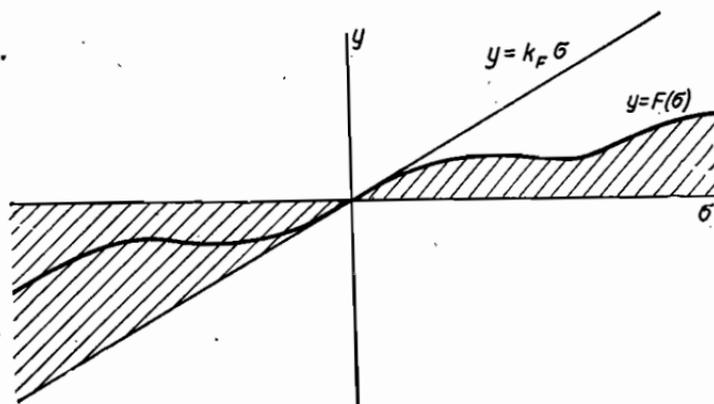


Рис. 11.1. Характеристика нелинейного элемента, расположенная в угле $[0, k_F]$

ми по модулю воздействиями на систему. В настоящее время для решения этих задач эффективно используются частотные критерии абсолютной устойчивости В. М. Попова.

При анализе абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического управления возможны различные постановки задачи. Некоторые из этих задач могут быть сформулированы следующим образом.

1. Заданы передаточная функция линейной части системы $W(s)$, нелинейная характеристика или класс, к которому она принадле-

жит, и значение k_F . Требуется установить, имеет ли место абсолютная устойчивость в угле $[0, k_F]$.

2. Задана передаточная функция линейной части системы и класс, к которому принадлежит нелинейность. Требуется определить наибольшее значение k_F , при котором имеет место абсолютная устойчивость в угле $[0, k_F]$.

3. Заданы передаточная функция линейной части системы и нелинейная характеристика. Требуется определить существование и абсолютную устойчивость вынужденных периодических или почти периодических режимов.

При синтезе абсолютно устойчивых нелинейных систем автоматического управления возникает необходимость в решении следующих задач.

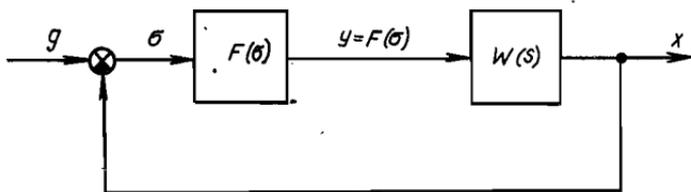


Рис. 11.2. Структурная схема нелинейной системы

1. Задан класс, к которому принадлежит нелинейная характеристика и значение k_F . Необходимо определить параметры системы, при которых имеет место абсолютная устойчивость. Часто такими параметрами являются коэффициент передачи статической системы или добротность астатической системы, а также одна или несколько постоянных времени.

2. Задана передаточная функция линейной части системы $W(s)$ и нелинейная характеристика. Требуется определить тип и параметры корректирующих цепей, при которых имеет место абсолютная устойчивость.

3. Заданы вид передаточной функции линейной части системы $W(s)$, нелинейная характеристика и внешнее периодическое воздействие $g(t)$. Требуется определить параметры линейной части системы или тип и параметры корректирующей цепи, обеспечивающей существование и абсолютную устойчивость вынужденных колебаний.

Очевидно, что при анализе и синтезе нелинейных систем автоматического управления с помощью критериев абсолютной устойчивости могут встречаться и другие постановки задачи.

§ 11.2. Частотный метод исследования абсолютной устойчивости

Рассмотрим методику решения задачи абсолютной устойчивости на основании критерия В. М. Попова [1]. Структурная схема исследуемой нелинейной системы (см. рис. 11.2) включает в себя линейную часть с передаточной функцией $W(s)$ и нелинейный элемент $y = F(\sigma)$, где σ — сигнал на входе нелинейного элемента.

Передаточная функция линейной части системы

$$W(s) = k \frac{N(s)}{D(s)} = k \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}, \quad (11.1)$$

где $m \leq n - 1$.

Динамика системы описывается уравнениями

$$x = W(p)y; \quad y = F(\sigma); \quad \sigma = g - x. \quad (11.2)$$

При исследовании абсолютной устойчивости различают основной, или некритический, случай и особый, или критический, случай.

В основном случае все полюса передаточной функции $W(s)$ расположены в левой полуплоскости, т. е. линейная часть системы устойчива.

В особых случаях полюса передаточной функции расположены на мнимой оси и в левой полуплоскости. Среди особых случаев рассматривают простейший особый случай, когда передаточная функция линейной части системы имеет один полюс, равный нулю, а остальные $(n - 1)$ полюсов расположены в левой полуплоскости. Так, например, особый случай с кратными полюсами, равными нулю, имеет место в следящих системах с астатизмом второго порядка, системах стабилизации с ПИ-регуляторами и объектом без самовыравнивания, а также в других системах с двумя и более интегрирующими звеньями. Критическому случаю с парой чисто мнимых сопряженных полюсов соответствует система, включающая консервативное звено.

В следящих системах с астатизмом первого порядка, системах стабилизации с ПИ-регулятором и объектом с самовыравниванием или с П-регулятором и объектом без самовыравнивания, а также в других системах с одним интегрирующим звеном имеет место простейший особый случай.

В общем случае можно исследовать абсолютную устойчивость положения равновесия для различных видов нелинейностей, но первоначально будем считать, что нелинейная функция $F(\sigma)$ представляет собой однозначную кусочно-непрерывную действительную функцию, определенную для всех действительных значений σ . Будем также считать, что нелинейная функция равна нулю при $\sigma = 0$, т. е.

$$F(0) = 0,$$

и, кроме того, удовлетворяет условию

$$0 \leq \frac{F(\sigma)}{\sigma} \leq k_F, \quad (11.3)$$

где k_F — конечное положительное число.

Неравенство (11.3) показывает, что кривая $y = F(\sigma)$ целиком лежит в угле $[0, k_F]$, образованном осью σ и прямой $y = k_F \cdot \sigma$ (см. рис. 11.1).

При $k_F = \infty$ условие (11.3) заменяется неравенством

$$|F(\sigma)/\sigma| \geq 0 \quad (11.4)$$

или эквивалентным ему неравенством

$$\sigma F(\sigma) \geq 0. \quad (11.5)$$

В критических случаях класс допустимых функций $y = F(x)$ несколько сужается и условие (11.3) заменяется неравенством

$$\varepsilon \leq \frac{F(\sigma)}{\sigma} \leq k_F, \quad (11.6)$$

где ε — сколь угодно малое положительное число.

Неравенство (11.6) показывает, что кривая $y = F(\sigma)$ в этом случае лежит в угле $[\varepsilon, k_F]$. При этом исключаются из рассмотрения характеристики $y = F(x)$, у которых при $\sigma \neq 0$ значение $F(\sigma) = 0$. Иначе говоря,

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} F(\sigma) = \text{const.}$$

В настоящем параграфе рассматривается абсолютная устойчивость положения равновесия, когда воздействие на систему (см. рис. 11.2) равно нулю, т. е.

$$g(t) = 0. \quad (11.7)$$

В этом случае

$$\sigma = -x, \quad (11.8)$$

и уравнения динамики системы приобретают следующий вид:

$$-\sigma = W(p)y, \quad y = F(\sigma). \quad (11.9)$$

Об абсолютной устойчивости рассматриваемой нелинейной системы можно судить по частотным характеристикам линейной части на основании критерия В. М. Попова, который формулируется для конечного k_F следующим образом. Для абсолютной устойчивости системы в угле $[0, k_F]$ в основном случае и в угле $[\varepsilon, k_F]$ в особых случаях достаточно, чтобы при всех $\omega \geq 0$ и действительном значении q выполнялось условие

$$\text{Re}(1 + j\omega q)W(j\omega) + \frac{1}{k_F} > 0 \quad (11.10)$$

и, кроме того, в особых случаях имела место предельная устойчивость.

Под *предельной устойчивостью* понимается асимптотическая устойчивость линейной системы, получающейся из нелинейной путем замены нелинейного звена $y = F(\sigma)$ линейным звеном $y = \varepsilon\sigma$ при любом ε , удовлетворяющем неравенству $k_F > \varepsilon > 0$.

Таким образом, при исследовании абсолютной устойчивости в особых случаях вместо исходной системы (см. рис. 11.2) рассматривается преобразованная система (рис. 11.3) при сколь угодно малом ε или эквивалентная ей преобразованная система с нелинейным элементом

$$F_\varepsilon(\sigma) = F(\sigma) - \varepsilon\sigma, \quad (11.11)$$

удовлетворяющим условию

$$0 \leq \frac{F_{\sigma}(\sigma)}{\sigma} \leq k_{F_1} = k_F - \varepsilon, \quad (11.12)$$

и линейной частью, частотная характеристика которой

$$W_{\sigma}(j\omega) = W(j\omega) / [1 + \varepsilon W(j\omega)]. \quad (11.13)$$

Если условия предельной устойчивости выполняются, то все полюса передаточной функции $W_{\sigma}(s)$ находятся в левой полуплоскости и вместо особого случая рассматривается основной случай системы. Причем в силу бесконечной малости ε принимается, что $W_{\sigma}(j\omega) = W(j\omega)$, а следовательно, и $k_{F_1} = k_F$.

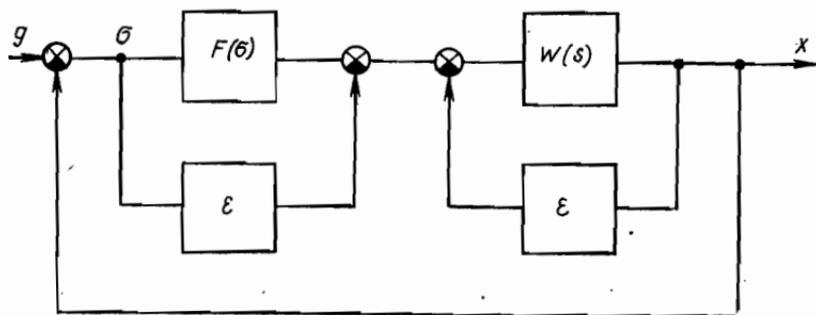


Рис. 11.3. Структурная схема преобразованной системы

Неравенство (11.10) может выполняться при различных значениях q и различных характеристиках $W(j\omega)$ линейной части системы. Чтобы определить значения q , при которых неравенство (11.10) справедливо, В. М. Попов предложил геометрическую интерпретацию аналитического условия. Для этого вместо характеристики линейной части системы $W(j\omega)$ следует использовать модифицированную частотную характеристику (см. § 11.3)

$$W^*(\omega) = X(\omega) + jY(\omega), \quad (11.14)$$

вещественная часть которой

$$X(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega) \quad (11.15)$$

совпадает с вещественной частью характеристики $W(j\omega)$, а мнимая ее часть

$$Y(\omega) = -\bar{\omega} \operatorname{Im} W(j\omega) \quad (11.16)$$

отличается от мнимой части $W(j\omega)$ множителем $\bar{\omega} = \omega T$ (где $T = 1$ сек).

Учитывая принятые обозначения, неравенство (11.10) можно записать как

$$\operatorname{Re} (1 + j\omega q) W(j\omega) + 1/k_F = X(\omega) - qY(\omega) + 1/k_F > 0. \quad (11.17)$$

В свою очередь уравнение

$$X - qY + 1/k_F = 0 \quad (11.18)$$

описывает прямую, называемую прямой Попова. Эта прямая проходит через точку с координатами $[-1/k_F, j 0]$ на оси абсцисс и имеет угловой коэффициент $1/q$:

Достаточным условием абсолютной устойчивости нелинейной системы в угле $[0, k_F]$ в основном случае является расположение модифицированной характеристики $W^*(\omega)$ правее прямой Попова. В особых случаях, кроме того, должна иметь место предельная устойчивость.

Большой интерес представляют системы, у которых прямая Попова и характеристика $W^*(\omega)$, а следовательно, и характеристика $W(j\omega)$ пересекают ось абсцисс в одной точке. У таких систем «гурвицев» угол, равный максимальному значению угла, при котором устойчива линейная система, и угол абсолютной устойчивости положения равновесия совпадают. Такие системы называются *устойчивыми в «гурвицевом» угле*. Если априорно известно, что система абсолютно устойчива в «гурвицевом» угле, то исследования проводятся простыми линейными методами. Класс таких систем весьма узок. В табл. 11.1 представлены условия применимости критерия В. М. Попова к системам с различными нелинейностями. Рассмотрим кратко каждый случай.

Таблица 11.1

УСЛОВИЯ ПРИМЕНЯЕМОСТИ КРИТЕРИЯ

№ п/п	Тип нелинейности	Тип линейной части	Критерий абсолютной устойчивости
1	$\varepsilon < \frac{F(\sigma)}{\sigma} < k_F;$ $\varepsilon > 0$	Основной и особый случай	$\operatorname{Re}(1 + j\omega q) W(j\omega) + \frac{1}{k_F} > 0$
2	$0 < \frac{F(\sigma)}{\sigma} < k_F;$ $F(\sigma) \neq 0$ при $\sigma \neq 0$	То же	
3	$0 < \frac{F(\sigma)}{\sigma} < k_F;$ $F(\sigma) = 0$ при $ \sigma < \sigma_1$	Основной и простейший особый случай	
4	$0 < \frac{F(\sigma)}{\sigma - \sigma_1} < k_F;$ $F(\sigma) = 0$ при $ \sigma < \sigma_1$	Особый случай	
5	$r < \frac{F(\sigma)}{\sigma} < k_F$	Основной и особый случай	

1. Если однозначная нелинейность лежит в угле $[\varepsilon, k_F]$, т. е. $\varepsilon \leq F(\sigma)/\sigma \leq k_F$ (где ε — сколь угодно малое число), то критерий (11.10) справедлив как в основном, так и в особом случае. При этом в особых случаях появляется дополнительное требование предельной устойчивости, предъявляемое к линейной части системы.

2. Если нелинейность лежит в угле $[0, k_F]$, т. е. $0 \leq F(\sigma)/\sigma \leq k_F$, но $F(\sigma) = 0$ лишь в начале координат, то критерий (11.10) справедлив в основном случае. В особых случаях он справедлив, если модуль σ как угодно велик, но ограничен. В реальных системах это всегда имеет место. В особых случаях линейная часть системы должна обладать еще и предельной устойчивостью.

3. Если нелинейность лежит в угле $[0, k_F]$ и имеет зону нечувствительности, т. е. $F(\sigma) = 0$ при $|\sigma| < \sigma_1$ (где σ_1 — величина зоны нечувствительности), то критерий (11.10) справедлив в основном и простейшем особом случае.

4. Если нелинейность имеет зону нечувствительности σ_1 , а линейная часть — два или более полюсов на мнимой оси (особый случай), то критерий (11.10) справедлив, когда линейная часть удовлетворяет условиям предельной устойчивости, а величина угла, в котором лежит нелинейность, определяется по отношению к началу координат, расположенному в точке $\sigma = \sigma_1$, т. е. в конце зоны нечувствительности.

5. Если нелинейность лежит в угле $[r, k_F]$, причем r — конечное число, то в основном и критическом случаях критерий (11.10) принимает вид, представленный в табл. 11.1.

Все приведенные в таблице условия применимости критерия В. М. Попова к системам с конечным числом степеней свободы и однозначной нелинейностью справедливы также для систем с бесконечным числом степеней свободы и с гистерезисными нелинейностями.

При решении ряда технических задач в нелинейных системах возникает необходимость в получении абсолютно устойчивых процессов, обусловленных каким-нибудь ограниченным воздействием $g(t)$ на систему (см. рис. 11.2). Выполнение только условий абсолютной устойчивости положения равновесия не может гарантировать нормальных режимов работы.

В случае периодического или почти периодического воздействия на систему практический интерес представляет вопрос о существовании и абсолютной устойчивости периодических и почти периодических вынужденных колебаний.

Критерий абсолютной устойчивости процессов сформулирован для систем, в которых нелинейная функция $y = F(\sigma)$ при $k_F \leq \infty$ и $-\infty < \sigma_1 < \sigma_2 < \infty$ удовлетворяет условию

$$0 \leq \frac{F(\sigma_1) - F(\sigma_2)}{\sigma_1 - \sigma_2} \leq k_F. \quad (11.19)$$

Если существует и непрерывна производная функция $y = F(\sigma)$, то $k_F = \max F'(\sigma)$, а условие (11.19) равносильно условию $0 \leq F'(\sigma) \leq k_F$. В случае непрерывной кусочно-линейной функции $k_F = \max k_{Fi}$, где k_{Fi} — угловые коэффициенты отрезков прямых, из которых со-

ставлен график функции $F(\sigma)$. Для разрывной функции $k_F = \infty$, а условие (11.19) указывает на то, что $F(\sigma)$ — неубывающая функция. Если $g(t)$ — ограниченное внешнее воздействие, а функция $y = F(\sigma)$ удовлетворяет условию (11.19), то процессы в нелинейной системе с конечным числом степеней свободы устойчивы для всех $\omega \geq 0$ при выполнении условия

$$\operatorname{Re} W(j\omega) + 1/k_F \geq 0. \quad (11.20)$$

Критерий (11.20) справедлив как для однозначных, так и для гистерезисных нелинейностей. В системах с бесконечным числом степеней свободы (системы с линейной частью, описываемой различными комбинациями линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием, линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, разностных уравнений и линейных алгебраических уравнений) на нелинейную функцию $F(\sigma)$ накладывается более жесткое ограничение: $k_F < \infty$, т. е. исключаются из рассмотрения разрывные функции. Критерий (11.20) означает, что для абсолютной устойчивости процессов достаточно, чтобы частотная характеристика $W(j\omega)$ целиком лежала правее прямой, проходящей через точку с координатами $[-1/k_F, j0]$ параллельно оси ординат.

§ 11.3. Примеры исследования абсолютной устойчивости нелинейных систем на основе частотного критерия В. М. Попова

Исследование абсолютной устойчивости положения равновесия состоит из трех этапов:

1) построения модифицированной амплитудно-фазовой характеристики $W^*(\omega)$;

2) проведения прямой Попова, т. е. такой прямой, которая пересекает ось абсцисс на минимально возможном расстоянии от начала координат, оставляя характеристику $W^*(\omega)$ справа от себя;

3) определения k_F^* как величины, обратной длине отрезка от точки пересечения прямой Попова с осью абсцисс до начала координат.

Если функция $W(s)$ задана в виде произведения передаточных функций типовых звеньев, то модифицированную амплитудно-фазовую характеристику линейной части исследуемой системы целесообразно строить по модулю

$$R(\omega) = \operatorname{mod} W(j\omega) = \operatorname{mod} N(j\omega) / \operatorname{mod} D(j\omega) \quad (11.21)$$

и аргументу

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arg N(j\omega) - \arg D(j\omega) \quad (11.22)$$

частотной характеристики $W(j\omega)$ линейной части системы, а значения $R(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ определять по логарифмическим частотным характеристикам. При этом находятся

$$\operatorname{Re} W^*(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega) = R(\omega) \cos \varphi(\omega); \quad (11.23)$$

$$\operatorname{Im} W^*(\omega) = \omega \operatorname{Im} W(j\omega) = \omega R(\omega) \sin \varphi(\omega). \quad (11.24)$$

Если частотная характеристика линейной части системы $W(j\omega)$ задана в виде расчетной или экспериментальной кривой, то модифицированная характеристика $W^*(\omega)$ может быть легко построена по этой кривой. Для этого каждая из ординат характеристики $W(j\omega)$ умножается на соответствующее ей значение частоты ω и через новые точки проводится модифицированная амплитудно-фазовая характеристика.

В большинстве случаев функция $W^*(\omega)$ сильно отличается от исходной $W(j\omega)$. Правильное построение прямой Попова возможно только в том случае, когда в существенном диапазоне частот имеется большое число точек, определяющих характеристику $W^*(\omega)$. Чтобы получить приемлемую точность, следует значительно увеличить габариты чертежа $W^*(\omega)$, особенно в том случае, когда угол абсолютной устойчивости не совпадает с «гурвицевым» углом. Все это несколько затрудняет исследование абсолютной устойчивости при помощи модифицированной амплитудно-фазовой характеристики. Однако эти затруднения носят технический, а не принципиальный характер.

Исследование абсолютной устойчивости нелинейных систем в основном случае. В основных случаях передаточная функция линейной части систем $W(s)$ не имеет полюсов на мнимой оси, что соответствует статическим системам автоматического управления без консервативных звеньев.

Передаточная функция такой системы

$$W(s) = \frac{k(b_m s^m + \dots + b_1 s + 1)}{a_n s^n + \dots + a_1 s + 1} = k \frac{N(s)}{D(s)}. \quad (11.25)$$

Пример 11.1. Определим, удовлетворяет ли условиям абсолютной устойчивости система, линейная часть которой имеет передаточную функцию

$$W(s) = k / [(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)], \quad (11.26)$$

где $k = 25$, $T_1 = 0,5$ сек, $T_2 = 0,02$ сек, $T_3 = 0,01$ сек.

Характеристика нелинейного элемента представляет собой однозначную кусочно-непрерывную функцию и удовлетворяет условию

$$0 \leq F(\sigma)/\sigma \leq k_F = 2.$$

Модифицированная амплитудно-фазовая характеристика может быть построена по частотной характеристике системы

$$W(j\omega) = \frac{[1 - \omega^2(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)] k}{[1 + (\omega T_1)^2][1 + (\omega T_2)^2][1 + (\omega T_3)^2]} - j \frac{\omega^2(T_1 + T_2 + T_3 - \omega^2 T_1 T_2 T_3) k}{[1 + (\omega T_1)^2][1 + (\omega T_2)^2][1 + (\omega T_3)^2]}$$

если изменять частоту ω от 0 до ∞ . Однако более рационально приведенную модифицированную характеристику строить на основании выражений (11.23) и (11.24), в которые входят модуль

$$R(\omega) = k \prod_{i=1}^3 \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T_i)^2}}$$

и аргумент

$$\varphi(\omega) = - \sum_{i=1}^3 \operatorname{arctg} \omega T_i$$

частотной характеристики линейной части системы. На рис. 11.4 (жирная линия) показана модифицированная амплитудно-фазовая характеристика $W^*(\omega)$, построенная по данным табл. 11.2.

Таблица 11.2

ω	1	2	4	8	16	32	64	128
$\operatorname{Re} W^*(\omega)$	19,5	12	3,75	0	-1	-0,88	0,375	0,075
$\operatorname{Im} W^*(\omega)$	-10,5	-26	-42	-48	-44	-28	-3	4,75

Если при ω_i прямая Попова имеет общую точку с характеристикой $W(j\omega)$ и известно значение q , то

$$k_F^* = [q \operatorname{Im} W^*(\omega_i) - \operatorname{Re} W^*(\omega_i)]^{-1}. \quad (11.27)$$

Для рассматриваемого примера прямая Попова (тонкая линия) имеет угловой коэффициент наклона к оси абсцисс

$$1/q = 50.$$

При частоте $\omega_i = 64 \text{ сек}^{-1}$ характеристика $W^*(\omega)$ и прямая Попова практически совпадают, причём

$$\operatorname{Re} W^*(\omega_i) = -0,375;$$

$$\operatorname{Im} W^*(\omega_i) = -3.$$

Следовательно, критическое значение коэффициента $k_F^* = 3,18$. Так как $k_F = 2,0$, то и исследуемая система абсолютно устойчива. В данном примере модифицированная амплитудно-фазовая характеристика $W^*(\omega)$ и прямая Попова пересекают ось абсцисс в одной точке. Следовательно, угол $[0, k_F^*]$ совпадает с «гурвицевым» углом.

Пример 11.2. Построим модифицированную амплитудно-фазовую характеристику системы с передаточной функцией линейной части

$$W(s) = k(\tau_1 s + 1) / [(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_0^2 s^2 + 2\zeta_0 T_0 s + 1)]. \quad (11.28)$$

где $k = 10$, $\tau_1 = 0,05 \text{ сек}$; $T_1 = 1 \text{ сек}$, $T_2 = 0,01 \text{ сек}$, $T_0 = 0,1 \text{ сек}$, $\zeta_0 = 0,01 \text{ сек}$, и определим максимальное значение k_F , при котором в системе выполняются условия абсолютной устойчивости.

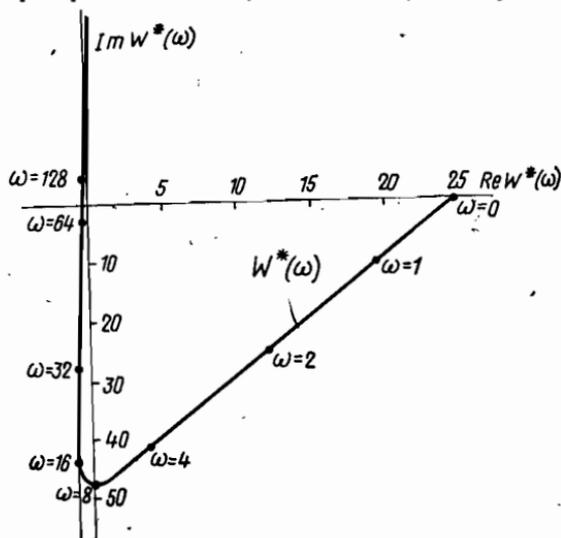


Рис. 11.4. Модифицированная амплитудно-фазовая характеристика

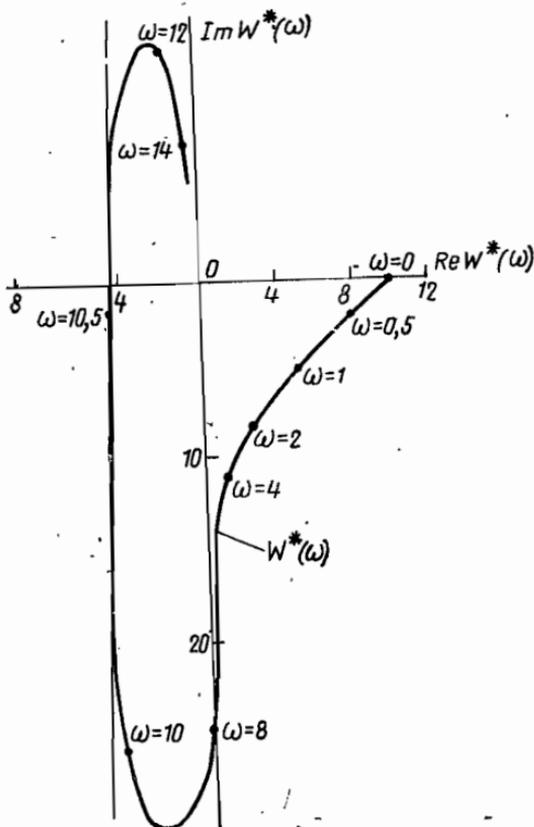
Таблица 11.3

ω	0,5	1	2	4	8	10	10,5	12	14
$\text{Re } W^*(\omega)$	8,0	5,1	2,1	0,96	0,0	-4,9	-4,7	-1,7	-0,57
$\text{Im } W^*(\omega)$	-2,0	-5,0	-8,2	-11,2	-24	-25	-1,5	12,7	7,6

Таблица 11.4

ω	0,3	0,4	0,5	0,9	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	7,0	10,0	20,0
$\text{Re } W^*(\omega)$	0	-0,107	-0,12	-0,14	-0,14	-0,13	-0,114	-0,106	-0,096	-0,055	0,032	0,005
$\text{Im } W^*(\omega)$	-0,71	-0,67	-0,65	-0,62	-0,61	-0,6	-0,5	-0,45	-0,39	-0,14	0	0,12

На рис. 11.5 приведена модифицированная амплитудно-фазовая характеристика $W^*(\omega)$, построенная по данным табл. 11.3.



Прямая Попова (см. рис. 11.5, тонкая линия) пересекает ось абсцисс в точке с координатами $[-1/k_F^* = -4,7, j 0]$. Следовательно, система абсолютно устойчива, если нелинейная функция лежит в угле $[0, k_F]$, где $k_F \leq 0,21 = k_F^*$. Как и в предыдущем примере, исследуемая система устойчива в «гурвицевом» угле.

Пример 11.3. Определим критическое значение k_F для системы автоматического управления с передаточной функцией линейной части

$$W(s) = k(\tau s + 1) / [(T_1 s + 1) \times (T_2 s + 1)(T_3 s + 1)^2] \quad (11.29)$$

при $k = 10$, $\tau = 3$ сек, $T_1 = 10$ сек, $T_2 = 5$ сек, $T_3 = 0,1$ сек.

Задавая различными ω , получим значения $\text{Re } W^*(\omega)$ и $\text{Im } W^*(\omega)$. Результаты расчета сведены в табл. 11.4. По этим данным на рис. 11.6 построена модифицированная амплитудно-фазовая характеристика $W^*(\omega)$.

Рис. 11.5. Модифицированная амплитудно-фазовая характеристика

Прямая Попова (тонкая линия) пересекает ось абсцисс в точке с координатами $[-1/k_F^* = -0,033; j 0]$. Следовательно, $k_F^* = 30,3$ и система абсолютно устойчива в угле $[0, k_F]$, если $k_F < k_F^* = 30,3$. Из рис. 11.6 видно, что прямая Попова и характеристика $W^*(\omega)$ пересекают ось абсцисс в разных, хотя и весьма близких друг к другу точках, следовательно, угол абсолютной устойчивости меньше «гурвицева» угла.

Исследование абсолютной устойчивости нелинейных систем в особых случаях. Передаточная функция линейной части системы в особом случае имеет полюса на мнимой оси, т. е. содержит интегрирующие и консервативные звенья. Чтобы исследовать абсолютную устойчивость системы в этом случае, необходимо

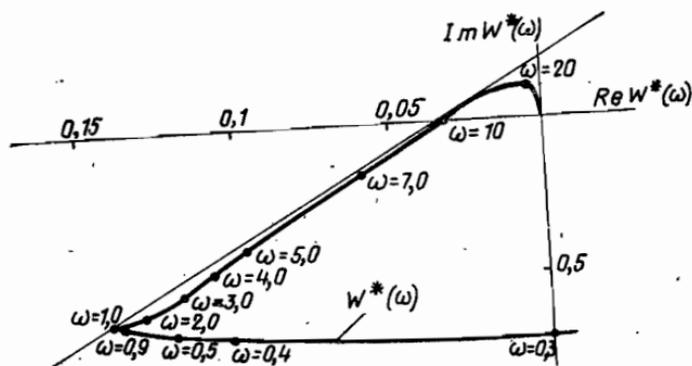


Рис. 11.6. Модифицированная амплитудно-фазовая характеристика

не только построить модифицированную амплитудно-фазовую характеристику но и проверить, удовлетворяет ли система условию предельной устойчивости

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Im } W(j\omega) = -\infty.$$

Пример 11.4. Определим k_F^* в системе с нелинейным элементом, имеющим характеристику, лежащую в угле $[e, k_F]$, и передаточной функцией линейной части

$$W(s) = k/[s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)], \quad (11.30)$$

где $k = 20 \text{ сек}^{-1}$, $T_1 = 0,5 \text{ сек}$, $T_2 = 0,02 \text{ сек}$, $T_3 = 0,001 \text{ сек}$.

Рассматриваемый случай является простейшим особым случаем, так как передаточная функция линейной части системы имеет всего один корень на мнимой оси, т. е. система обладает астатизмом первого порядка. Для систем с астатизмом первого порядка условие предельной устойчивости всегда выполняется в системах с отрицательной обратной связью.

Вещественная и мнимая части характеристики $W^*(\omega)$ определяются из соотношений

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } W^*(\omega) &= \frac{20(10^{-5}\omega^2 - 0,521)}{(1 + 0,25\omega^2)(1 + 4 \cdot 10^{-4}\omega^2)(1 + 10^{-6}\omega^2)}; \\ \text{Im } W^*(\omega) &= \frac{20(1,052 \cdot 10^{-2}\omega^2 - 1)}{(1 + 0,25\omega^2)(1 + 4 \cdot 10^{-4}\omega^2)(1 + 10^{-6}\omega^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (11.31)$$

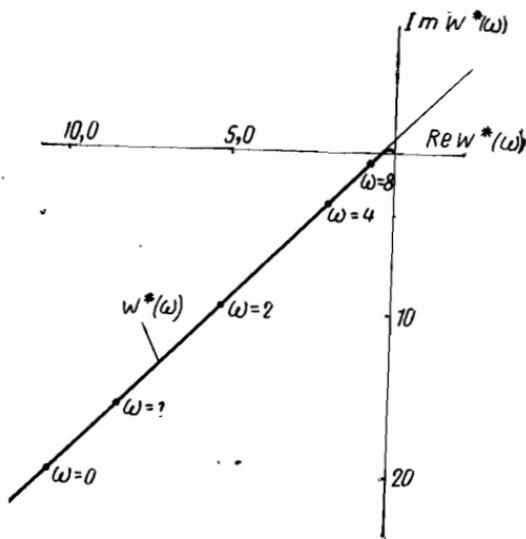


Рис. 11.7. Модифицированная амплитудно-фазовая характеристика

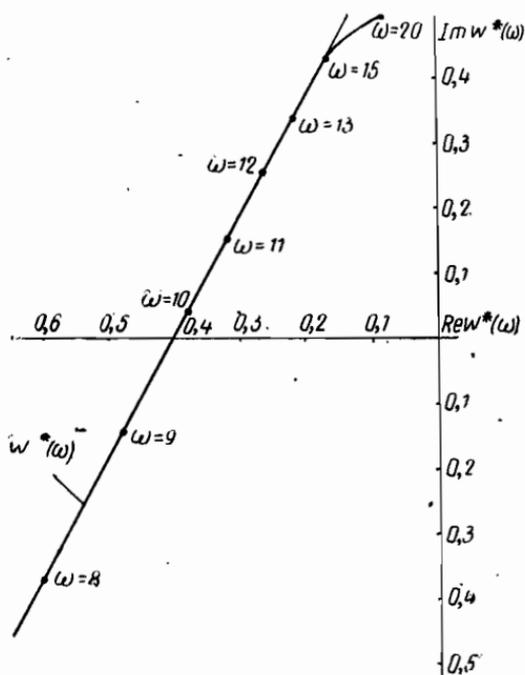


Рис. 11.8. Часть модифицированной амплитудно-фазовой характеристики

Следует заметить, что у астатической системы первого порядка

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Im } W^*(\omega) = -k$$

в отличие от

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Im } W(j\omega) = -\infty,$$

т. е. амплитудно-фазовая модифицированная $W^*(\omega)$ и обычная $W(j\omega)$ характеристики значительно отличаются при $\omega \rightarrow 0$.

На рис. 11.7 построена характеристика $W^*(\omega)$ по данным табл. 11.5.

На рис. 11.8 приведена часть характеристики $W^*(\omega)$, лежащая в непосредственной близости к точке ее пересечения с осью абсцисс. Из этих рисунков видно, что прямая Попова пересекает ось абсцисс с угловым коэффициентом $1/q = 2$ в точке с координатами $[-1/k_F^* = 0,404, j0]$. Максимальное значение $k_F^* = 2,475$ и, поскольку прямая Попова пересекает ось абсцисс в одной точке с характеристикой $W^*(\omega)$, то система устойчива в «гурвицевом» угле.

Пример 11.5. Определим k_F в системе с нелинейным элементом, имеющим характеристику, лежащую в угле $[\varepsilon, k_F]$, и с передаточной функцией линейной части.

$$W(s) = k/s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \times (T_0^2 s^2 + 1), \quad (11.32)$$

где $k = 1 \text{ сек}^{-1}$; $T_1 = 0,2 \text{ сек}$; $T_2 = 0,1 \text{ сек}$; $T_0 = 0,05 \text{ сек}$.

Таким образом, исследуется особый случай с двумя мнимыми полюсами. Амплитудно-фазовая характеристика линейной части системы $W(j\omega)$ показана на рис. 11.9. Как видно из этой характеристики, условия предельной устойчивости в системе выполняются. Действительно,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Im } W(j\omega) = -\infty$$

и, кроме того, при изменении ω от 0 до ∞ слева от характеристики $W(j\omega)$ остаются достаточно удаленные точки действительной оси.

Таблица 11.5

ω	1	2	4	8	9	10	11	12	13	15	20	25	32
$\text{Re} W^*(\omega)$	-8,4	-5,2	-2,05	-0,6	-0,48	-0,38	-0,32	-0,26	-0,22	-0,17	-0,08	0,05	0,025
$\text{Im} W^*(\omega)$	-15,4	-9,8	-3,2	-0,38	-0,14	0,04	0,17	0,25	0,34	0,44	0,50	0,57	0,48

Таблица 11.6

ω	1	2	4	8	16	22
$\text{Re} W(j\omega)$	-0,29	-0,25	-0,16	-0,06	-0,02	-0,012
$\text{Im} W(j\omega)$	-0,96	-0,37	-0,09	0,007	0,018	-0,016
$\text{Im} W^*(\omega)$	-0,96	-0,74	-0,36	-0,056	0,29	0,35

На этом же рисунке приведены прямая Попова и характеристика $W^*(\omega)$, построенная на основании данных табл. 11.6.

Прямая Попова проходит через точку характеристики $W^*(\omega)$, соответствующую частоте $\omega = 0$, так что вся характеристика $W^*(\omega)$ остается справа от этой прямой. Как видно из рис. 11.9, прямая Попова пересекает ось абсцисс в точке с координатами $[-0,36; j 0]$, а амплитудно-фазовая характеристика $W(j\omega)$ пересекает ось абсцисс в точке с координатами $[0,1; j 0]$. Следовательно, в рассматриваемом примере угол $[\varepsilon, k_F^*]$ не совпадает с «гурвицевым» углом.

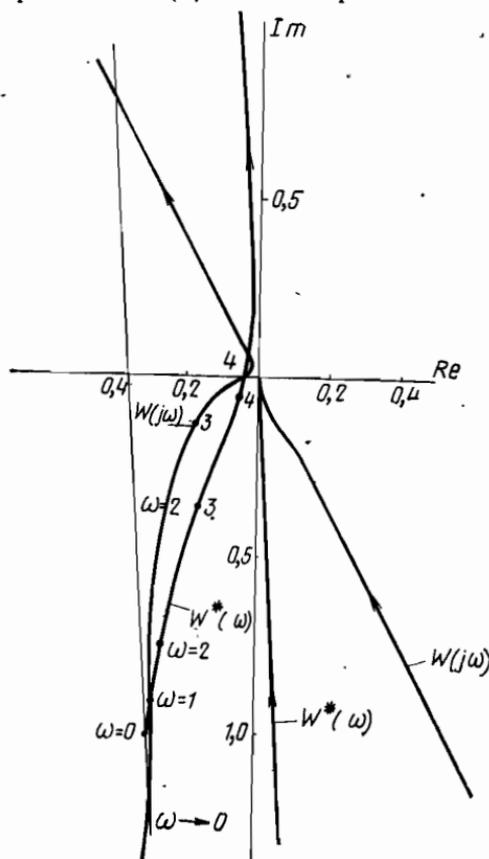
На основании прямой Попова и характеристики $W(j\omega)$ определяем $k_{кр}^* = 2,8 \text{ сек}^{-1}$ и $k_{кр} = 10 \text{ сек}^{-1}$, где $k_{кр}^*$ — критическое значение коэффициента усиления линейной системы.

Исследование абсолютной устойчивости процессов в нелинейных системах. Исследование абсолютной устойчивости процессов в системах с нелинейностью, характеристика которой удовлетворяет условию

$$0 \leq \frac{F(\sigma_1) - F(\sigma_2)}{\sigma_1 - \sigma_2} \leq k_F,$$

состоит из трех этапов:

Рис. 11.9. Амплитудно-фазовая и модифицированная амплитудно-фазовая характеристики



- 1) построения амплитудно-фазовой характеристики линейной части $W(j\omega)$;
- 2) проведения в левой полуплоскости прямой, параллельной оси ординат, таким образом, чтобы $W(j\omega)$ целиком лежала бы справа от нее;
- 3) определения k_F^* как величины, обратной длине отрезка от точки пересечения прямой с осью абсцисс до начала координат.

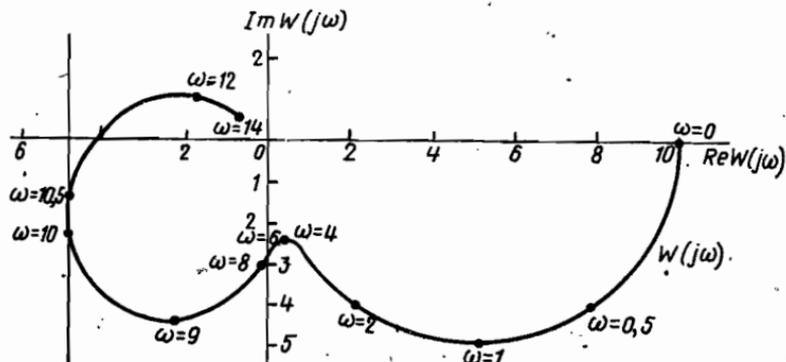


Рис. 11.10. Амплитудно-фазовая характеристика

Пример 11.6. Определим значение k_F^* , при котором выполняются условия абсолютной устойчивости процессов в системе с передаточной функцией линейной части

$$W(s) = \frac{k(\tau_1 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_0^2 s^2 + 2\zeta T_0 s + 1)} \quad (11.33)$$

где $k = 10$, $\tau_1 = 0,05$ сек, $T_1 = 1$ сек, $T_2 = 0,01$ сек, $T_0 = 0,1$ сек, $\zeta = 0,1$.

Амплитудно-фазовая характеристика линейной части системы $W(j\omega)$, показанная на рис. 11.10, построена на основании данных табл. 11.7

Таблица 11.7

ω	0	0,5	1	2	4	8	10	10,5	12	14
Re $W(j\omega)$	10	8	5,1	2,1	0,96	0,0	-4,9	4,7	-1,7	-0,57
Im $W(j\omega)$	0	-4,0	-5,0	-4,1	-2,8	-3,0	-2,5	-0,14	1,06	0,54

Касательная, параллельная оси ординат и проведенная через крайнюю левую точку $W(j\omega)$, пересекает ось абсцисс в точке с координатами $[-4,85; j 0]$. Следовательно, $k_F^* = 0,206$.

Пример 11.7. Определим k_F^* в системе с передаточной функцией

$$W(s) = k/[s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)] \quad (11.34)$$

и параметрами $k = 20 \text{ сек}^{-1}$,
 $T_1 = 0,5 \text{ сек}$, $T_2 = 0,02 \text{ сек}$,
 $T_3 = 0,001 \text{ сек}$.

Амплитудно-фазовая характеристика $W(j\omega)$, показанная на рис. 11.11, построена на основании данных табл. 11.8.

Как видно из рис. 11.11, характеристика $W(j\omega)$ при $\omega \rightarrow 0$ неограниченно приближается к прямой, параллельной оси ординат, пересекающей ось абсцисс в точке с координатами $[-10, 42; j 0]$. Следовательно, $k_F = 0,096$.

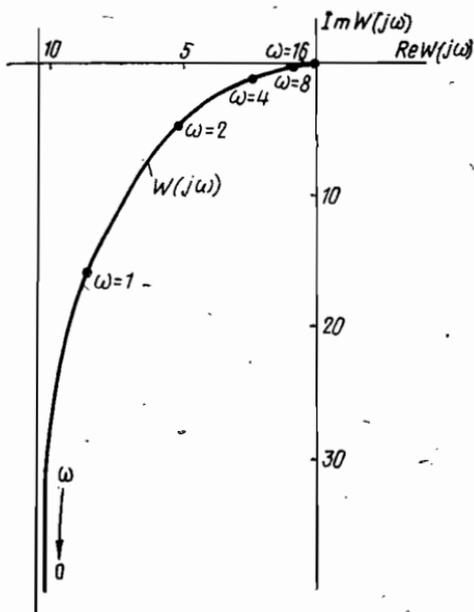


Рис. 11.11. Амплитудно-фазовая характеристика

Таблица 11.8

ω	1	2	4	8	16
$\text{Re } W(j\omega)$	-8,4	-5,2	-2,05	-0,62	-0,16
$\text{Im } W(j\omega)$	-15,4	-4,9	-0,81	-0,054	0,03

Литература к главе XI

1. М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. АН СССР, 1963.
2. А. А. Вавилов. Исследование абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования. ЛЭТИ, 1967.
3. В. А. Якубович. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. «Автоматика и телемеханика», 1964, № 7; 1965, № 5.
4. А. Х. Гелиг. Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем с распределенными параметрами. «Автоматика и телемеханика», 1965, № 3.
5. А. Х. Гелиг, О. И. Комарницкая. Абсолютная устойчивость нелинейных систем с неединственным положением равновесия в практических случаях. «Автоматика и телемеханика», 1966, № 8.
6. Т. Б. Козинец. Об одном методе стабилизации неустойчивых нелинейных систем автоматического регулирования. «Автоматика и телемеханика», 1966, № 6.
7. А. А. Вавилов. Частотные методы расчета нелинейных систем. «Энергия», 1970.
8. Б. Н. Наумов. Теория нелинейных автоматических систем. «Наука», 1972.

П. 1. Таблица

t	∞	0,0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
0,0		0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,5		0,138	0,165	0,176	0,184	0,192	0,199	0,207	0,215	0,223	0,231
1,0		0,310	0,326	0,340	0,356	0,371	0,386	0,401	0,417	0,432	0,447
1,5		0,449	0,469	0,494	0,516	0,538	0,560	0,594	0,603	0,617	0,646
2,0		0,572	0,597	0,628	0,655	0,683	0,709	0,681	0,761	0,786	0,810
2,5		0,674	0,705	0,797	0,833	0,867	0,833	0,839	0,891	0,938	0,943
3,0		0,755	0,790	0,828	0,863	0,896	0,928	0,958	0,987	1,013	1,038
3,5		0,783	0,853	0,892	0,928	0,963	0,994	1,024	1,050	1,074	1,095
4,0		0,857	0,896	0,938	0,974	1,008	1,039	1,060	1,090	1,107	1,124
4,5		0,883	0,923	0,960	0,997	1,029	1,057	1,080	1,100	1,115	1,129
5,0		0,896	0,936	0,978	1,012	1,042	1,067	1,087	1,103	1,112	1,117
5,5		0,900	0,940	0,986	1,019	1,046	1,067	1,083	1,093	1,095	1,097
6,0		0,904	0,943	0,982	1,013	1,037	1,054	1,065	1,070	1,068	1,062
6,5		0,904	0,942	0,980	1,009	1,030	1,043	1,050	1,049	1,043	1,033
7,0		0,904	0,944	0,979	1,006	1,024	1,035	1,037	1,033	1,023	1,009
7,5		0,907	0,945	0,980	1,006	1,020	1,025	1,025	1,017	1,005	1,005
8,0		0,910	0,951	0,985	1,008	1,020	1,024	1,021	1,012	0,995	0,981
8,5		0,918	0,956	0,989	1,010	1,021	1,022	1,018	1,007	0,992	0,977
9,0		0,924	0,965	0,997	1,016	1,025	1,025	1,018	1,006	0,992	0,978
9,5		0,932	0,972	1,004	1,022	1,029	1,027	1,019	1,006	0,993	0,982
10,0		0,939	0,978	1,009	1,025	1,031	1,027	1,019	1,006	0,993	0,987
10,5		0,946	0,985	1,013	1,028	1,033	1,028	1,017	1,005	0,993	0,991
11,0		0,947	0,988	1,015	1,029	1,031	1,025	1,014	1,002	0,993	0,991
11,5		0,949	0,988	1,016	1,027	1,028	1,021	1,010	0,999	0,991	0,989
12,0		0,950	0,988	1,015	1,025	1,024	1,015	1,004	0,994	0,988	0,987
12,5		0,950	0,989	1,013	1,022	1,019	1,010	0,999	0,990	0,986	0,986
13,0		0,950	0,989	1,012	1,019	1,015	1,005	0,994	0,986	0,985	0,987
13,5		0,950	0,990	1,011	1,017	1,011	1,000	0,990	0,983	0,984	0,988
14,0		0,952	0,989	1,011	1,016	1,009	0,997	0,988	0,983	0,985	0,991
14,5		0,954	0,990	1,012	1,015	1,008	0,996	0,987	0,985	0,988	0,996
15,0		0,956	0,993	1,012	1,014	1,007	0,995	0,988	0,987	0,991	1,000
15,5		0,959	0,995	1,014	1,014	1,006	0,995	0,989	0,988	0,996	1,004
16,0		0,961	0,997	1,015	1,014	1,006	0,995	0,991	0,992	0,998	1,007
16,5		0,964	0,999	1,016	1,014	1,005	0,995	0,993	0,905	1,002	1,009
17,0		0,965	1,001	1,016	1,013	1,005	0,995	0,994	0,997	1,005	1,010
17,5		0,966	1,002	1,015	1,012	1,003	0,995	0,994	0,998	1,006	1,010
18,0		0,966	1,002	1,015	1,011	1,002	0,995	0,995	1,001	1,008	1,010
18,5		0,966	1,001	1,015	1,009	1,001	0,994	0,995	1,001	1,007	1,009
19,0		0,967	1,000	1,015	1,008	0,998	0,992	0,995	1,001	1,006	1,006
19,5		0,967	1,000	1,014	1,006	0,996	0,991	0,995	1,001	1,005	1,004
20,0		0,967	1,000	1,013	1,005	0,995	0,991	0,995	1,001	1,005	1,002
20,5		0,968	1,002	1,012	1,004	0,994	0,991	0,996	1,002	1,004	1,001
21,0		0,968	1,002	1,011	1,003	0,994	0,992	0,997	1,003	1,004	1,001
21,5		0,969	1,002	1,011	1,003	0,995	0,992	0,999	1,004	1,004	1,001
22,0		0,971	1,002	1,011	1,002	0,995	0,993	1,000	1,005	1,004	1,000
22,5		0,973	1,002	1,011	1,002	0,996	0,995	1,002	1,006	1,004	0,999
23,0		0,974	1,005	1,011	1,002	0,996	0,997	1,004	1,007	1,003	0,999
23,5		0,975	1,005	1,010	1,002	0,996	0,998	1,004	1,008	1,003	0,998
24,0		0,975	1,005	1,010	1,001	0,996	0,999	1,005	1,007	1,002	0,997
24,5		0,975	1,005	1,009	1,000	0,996	0,999	1,005	1,006	1,001	0,997
25,0		0,975	1,005	1,008	1,000	0,995	0,999	1,005	1,004	1,000	0,996
25,5		0,975	1,005	1,008	0,999	0,995	0,999	1,004	1,003	0,998	0,996
26,0		0,975	1,005	1,007	0,999	0,995	0,999	1,004	1,002	0,997	0,996

h-функций

	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	0,240	0,248	0,255	0,259	0,267	0,275	0,282	0,290	0,297	0,304	0,314
1	0,461	0,476	0,490	0,505	0,519	0,534	0,547	0,562	0,575	0,593	0,603
	0,665	0,685	0,706	0,722	0,740	0,758	0,776	0,794	0,813	0,832	0,844
2	0,833	0,856	0,878	0,899	0,919	0,938	0,956	0,974	0,986	1,003	1,020
	0,967	0,985	1,010	1,031	1,042	1,060	1,078	1,098	1,113	1,125	1,133
3	1,061	1,082	1,100	1,117	1,130	1,142	1,154	1,164	1,172	1,176	1,178
	1,115	1,132	1,145	1,158	1,161	1,166	1,171	1,174	1,175	1,175	1,175
4	1,142	1,152	1,158	1,159	1,160	1,161	1,156	1,149	1,141	1,131	1,118
	1,138	1,134	1,134	1,138	1,132	1,127	1,111	1,099	1,085	1,071	1,053
5	1,118	1,115	1,107	1,098	1,084	1,069	1,053	1,037	1,019	1,001	0,986
	1,092	1,083	1,070	1,050	1,032	1,016	0,994	0,979	0,962	0,951	0,932
6	1,051	1,037	1,021	1,003	0,984	0,956	0,949	0,934	0,922	0,920	0,906
	1,018	1,001	0,982	0,946	0,948	0,936	0,920	0,910	0,903	0,903	0,905
7	0,993	0,975	0,957	0,941	0,927	0,917	0,911	0,908	0,909	0,915	0,925
	0,974	0,958	0,944	0,926	0,922	0,911	0,920	0,927	0,934	0,946	0,958
8	0,966	0,951	0,941	0,935	0,932	0,936	0,944	0,955	0,970	0,986	1,004
	0,966	0,949	0,944	0,948	0,951	0,958	0,974	0,990	1,006	1,023	1,041
9	0,970	0,960	0,961	0,966	0,976	0,990	1,006	1,023	1,039	1,053	1,061
	0,975	0,972	0,980	0,987	1,000	1,015	1,033	1,048	1,059	1,066	1,066
10	0,982	0,985	0,993	1,006	1,020	1,036	1,049	1,059	1,063	1,062	1,056
	0,987	0,996	1,007	1,017	1,033	1,046	1,054	1,058	1,055	1,048	1,033
11	0,993	1,002	1,014	1,027	1,039	1,047	1,048	1,044	1,034	1,021	0,005
	0,997	1,006	1,017	1,029	1,037	1,043	1,034	1,024	1,010	0,994	0,977
12	0,997	1,006	1,019	1,026	1,027	1,025	1,015	1,000	0,984	0,969	0,958
	0,997	1,006	1,018	1,019	1,017	1,010	0,995	0,979	0,965	0,954	0,949
13	0,997	1,006	1,014	1,012	1,005	0,993	0,980	0,964	0,955	0,950	0,955
	0,998	1,006	1,010	1,005	0,995	0,982	0,968	0,958	0,954	0,958	0,970
14	1,000	1,006	1,008	0,999	0,987	0,974	0,965	0,961	0,965	0,976	0,990
	1,002	1,006	1,005	0,994	0,983	0,970	0,969	0,971	0,981	0,997	1,010
15	1,005	1,007	1,002	0,993	0,983	0,976	0,978	0,987	1,001	1,017	1,030
	1,008	1,007	1,001	0,993	0,985	0,984	0,991	1,003	1,019	1,032	1,040
16	1,011	1,008	1,000	0,994	0,990	0,993	1,003	1,018	1,031	1,039	1,039
	1,011	1,008	1,001	0,996	0,995	1,001	1,014	1,027	1,036	1,038	1,028
17	1,012	1,007	0,999	0,997	0,999	1,008	1,020	1,030	1,032	1,027	1,012
	1,009	1,005	0,997	0,998	1,002	1,012	1,023	1,027	1,023	1,013	0,988
18	1,008	1,002	0,997	0,998	1,004	1,014	1,020	1,018	1,038	0,993	0,979
	1,006	0,999	0,995	0,998	1,003	1,012	1,014	1,007	0,993	0,978	0,969
19	1,001	0,995	0,993	0,997	1,004	1,009	1,006	1,007	0,981	0,969	0,956
	0,998	0,992	0,992	0,996	1,003	1,005	0,998	0,985	0,973	0,967	0,973
20	0,996	0,991	0,992	0,995	1,003	1,001	0,991	0,979	0,972	0,974	0,985
	0,995	0,991	0,994	0,996	1,001	0,996	0,986	0,976	0,974	0,990	1,001
21	0,995	0,993	0,997	0,996	0,999	0,993	0,983	0,975	0,981	1,002	1,016
	0,996	0,995	1,000	0,995	0,998	0,992	0,986	0,988	0,997	1,013	1,024
22	0,996	0,996	1,000	0,997	0,997	0,991	0,991	0,997	1,012	1,024	1,029
	0,997	1,000	1,004	1,000	0,996	0,992	0,998	1,008	1,022	1,028	1,026
23	0,998	1,001	1,006	1,001	0,997	0,994	1,002	1,015	1,025	1,027	1,016
	0,999	1,002	1,007	1,002	0,998	0,997	1,007	1,017	1,023	1,023	1,002
24	1,000	1,002	1,008	1,003	0,999	1,000	1,008	1,017	1,015	1,012	0,988
	1,000	1,002	1,006	1,003	1,000	1,002	1,008	1,014	1,005	0,995	0,979
25	1,000	1,002	1,004	1,003	1,001	1,003	1,005	1,008	0,991	0,985	0,975
	1,000	1,002	1,002	1,002	1,002	1,004	1,004	1,001	0,986	0,978	0,977
26	1,000	1,002	1,000	1,001	1,002	1,004	1,002	0,987	0,984	0,977	0,983

П. 2. Таблица z-преобразований.

$f(t)$	$F(s)$	$F(z)$	$F(z, \sigma)$
1	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{T_0 z}{(z-1)^2}$	$\frac{T_0 z}{(z-1)^2} + \frac{\sigma T_0 z}{z-1}$
$\frac{1}{2} t^2$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T_0^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$	$\frac{T_0^2 z}{(z-1)^3} + \frac{(1+2\sigma)T_0^2 z}{2(z-1)^2} + \frac{(\sigma T_0)^2 z}{2(z-1)}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{T_0^n z}{(z-1)^{n+1}} D_n(z)$ $D_0 = D_1 = 1, D_2 = \frac{z+1}{2!}$ $D_3 = \frac{z^2 + 4z + 1}{3!}$ $D_4 = \frac{z^3 + 11z^2 + 11z + 1}{4!}$ $D_5 = \frac{z^4 + 26z^3 + 66z^2 + 26z + 1}{5!}$	$\sum_{i=0}^n \frac{T_0^{n+i} z D_i(z)}{(n-i)!(z-1)^{i+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-d}$	$\frac{z d^0}{z-d}, d = e^{-\sigma T_0}$

$f(t)$	$F(s)$	$F(z)$	$F(z, \sigma)$																																																		
$t e^{-at}$	$\frac{1}{(s \rightarrow a)^2}$	$\frac{T_0 z d}{(z-d)^2}$	$T_0 z d^\sigma \left[\frac{d \rightarrow \sigma (z-d)}{(z-d)^2} \right]$																																																		
$\frac{1}{2} t^2 e^{-at}$	$\frac{1}{(s \rightarrow a)^3}$	$\frac{1}{2} T_0 (z \rightarrow d) \frac{z d^2}{(z-d)^3}$	$T_0^2 z d^\sigma \left[\frac{z \rightarrow d}{2(z-d)^3} + \frac{\sigma}{(z-d)^2} + \frac{\sigma^2}{2(z-d)} \right]$																																																		
$\frac{t^n e^{-at}}{n!}$	$\frac{1}{(s \rightarrow a)^{n+1}}$	$T_0^n d^n D_1 \left(\frac{z}{d} \right) \frac{z}{(z-d)^{n+1}}$ $D_n(z) = \frac{a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow a_n}{n!}$ $a_k = \sum_{j=1}^k (-j)^{k-1} j^n C_{n+1}^k$	$T_0^n z d^\sigma \sum_{r=0}^n \frac{\sigma^n d^r D_r \left(\frac{z}{d} \right)}{(n-r)! (z-d)^{r+1}} =$ $= T_0^n z d^{n+\sigma} B_n \left(\frac{z}{d}, \sigma \right)$																																																		
		$D_n \left(\frac{z}{d} \right) =$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>1</td><td>$1 - \frac{z}{d}$</td><td>0</td><td>...</td><td>0</td></tr> <tr><td>$\frac{1}{2!}$</td><td>1</td><td>$1 - \frac{z}{d}$</td><td>...</td><td>0</td></tr> <tr><td>$\frac{1}{3!}$</td><td>$\frac{1}{2!}$</td><td>1</td><td>...</td><td>0</td></tr> <tr><td>.....</td><td>.....</td><td>.....</td><td>.....</td><td>.....</td></tr> <tr><td>$\frac{1}{n!}$</td><td>$\frac{1}{(n-1)!}$</td><td>$\frac{1}{(n-2)!}$</td><td>...</td><td>0</td></tr> </table>	1	$1 - \frac{z}{d}$	0	...	0	$\frac{1}{2!}$	1	$1 - \frac{z}{d}$...	0	$\frac{1}{3!}$	$\frac{1}{2!}$	1	...	0	$\frac{1}{n!}$	$\frac{1}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(n-2)!}$...	0	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>1</td><td>$1 - \frac{z}{d}$</td><td>0</td><td>...</td><td>0</td></tr> <tr><td>σ</td><td>1</td><td>$1 - \frac{z}{d}$</td><td>...</td><td>0</td></tr> <tr><td>$\frac{\sigma^2}{2!}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>1</td><td>...</td><td>0</td></tr> <tr><td>.....</td><td>.....</td><td>.....</td><td>.....</td><td>.....</td></tr> <tr><td>$\frac{\sigma^n}{n!}$</td><td>$\frac{1}{n!}$</td><td>$\frac{1}{(n-1)!}$</td><td>...</td><td>0</td></tr> </table>	1	$1 - \frac{z}{d}$	0	...	0	σ	1	$1 - \frac{z}{d}$...	0	$\frac{\sigma^2}{2!}$	$\frac{1}{2}$	1	...	0	$\frac{\sigma^n}{n!}$	$\frac{1}{n!}$	$\frac{1}{(n-1)!}$...	0
1	$1 - \frac{z}{d}$	0	...	0																																																	
$\frac{1}{2!}$	1	$1 - \frac{z}{d}$...	0																																																	
$\frac{1}{3!}$	$\frac{1}{2!}$	1	...	0																																																	
.....																																																	
$\frac{1}{n!}$	$\frac{1}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(n-2)!}$...	0																																																	
1	$1 - \frac{z}{d}$	0	...	0																																																	
σ	1	$1 - \frac{z}{d}$...	0																																																	
$\frac{\sigma^2}{2!}$	$\frac{1}{2}$	1	...	0																																																	
.....																																																	
$\frac{\sigma^n}{n!}$	$\frac{1}{n!}$	$\frac{1}{(n-1)!}$...	0																																																	

$f(t)$	$F(s)$	$F(z)$	$F(z, \sigma)$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{(1-d)z}{(z-1)(z-d)}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{zd^{\sigma}}{z-d}$
$\frac{1}{a}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{T_0 z}{(z-1)^2} - \frac{(1-d)z}{a(z-1)(z-d)}$	$\frac{T_0 z}{(z-1)^2} + \frac{(\sigma T_0 - d^{-1})z}{z-1} - \frac{zd^{\sigma}}{a(z-d)}$
$\frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{2} a^2 t^2 - at + 1 - e^{-at} \right)$	$\frac{a}{s^3(s+a)}$	$\frac{T_0^2 z(z+1)}{(z-1)^3} - \frac{T_0 z}{a(z-1)^2} + \frac{(1-d)z}{\sigma^2(z-1)(z-d)}$	$\frac{T_0^2 z B_2}{(z-1)^3} - \frac{T_0 z B_1}{a(z-1)^2} + \frac{T_0 z}{a^2(z-1)} - \frac{zd^{\sigma}}{a^2(z-d)}$
$\frac{(-1)^n}{a^n} \left\{ \sum_{\kappa=1}^n \frac{(-at)^{\kappa}}{\kappa!} + \right.$ $\left. \Leftrightarrow 1 - e^{-at} \right\}$	$\frac{a}{s^{n+1}(s+a)}$	$\sum_{m=1}^n \frac{z T_0^m D_m(z)}{(-a)^{n-m} (z-1)^{m+1}} + \frac{(1-d)z}{a^n (z-1)(z-d)} = \frac{z A_n(z)}{(z-1)^{n+1} - (-a)^n (z-d)}$	$\sum_{m=0}^n \frac{z T_0^m B_m(z, \sigma)}{(-a)^{n-m} (z-1)^{m+1}} - \frac{zd^{\sigma}}{(-a)^n (z-d)} = \frac{z C_n(z, \sigma)}{(z-1)^{n+1} - (-a)^n (z-d)}$
		$T_0^n \quad 1-z \quad 0 \quad \dots$ $T_0^{n-1} (-a)^{-1} \quad 1 \quad 1-z \quad \dots \quad 0$ $T_0^{n-2} (-a)^{-2} \quad \frac{1}{2!} \quad 1 \quad \dots \quad 0$ \dots $(-a)^{-n} \quad \frac{1}{n!} \quad \frac{1}{(n-1)!} \quad \dots \quad 1$	$1 \quad 1-z \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0$ $\sigma \quad 1 \quad 1-z \quad \dots \quad 0 \quad 0$ $\sigma \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 0 \quad 0$ $2! \quad 2! \quad \dots$ \dots $\sigma^n \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad 1-z$ $n! \quad n! \quad (n-1)! \quad \dots$ $0 \quad (-a)^{-1} \quad T_0(-a)^{-(n-1)} \quad \dots \quad T_0^{n-1} (-a)^{-1} \quad T_0^n$

$f(t)$	$F(s)$	$F(z)$	$F(z, \sigma)$
$e^{-at}(1-at)$	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$\frac{z^2 - zd(1+aT_0)}{(z-d)^2}$	$zd^\sigma \left[\frac{1-aT_0}{z-d} - \frac{aT_0 d}{(z-d)^2} \right]$
$1 - e^{-at}(1+at)$	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{zd(1-aT_0) - z^2}{(z-d)^2}$	$\frac{z}{z-1} - zd^\sigma \left[\frac{1+aT_0 \sigma}{z-d} + \frac{aT_0 d}{(z-d)^2} \right]$
$2(e^{-at} - 1) \rightarrow at(e^{-at} + 1)$	$\frac{a^3}{s^2(s+a)^2}$	$\frac{z(aT_0 - 2z) + 2z}{(z-1)^2} + \frac{zd(T_0 - 2) \rightarrow 2z^2}{(z-d)^2}$	$\frac{z(aT_0 \sigma - 2z) + (aT_0 \sigma + 2)}{(z-1)^2} + zd^\sigma \left[\frac{z(aT_0 \sigma + 2) \rightarrow d(aT_0 \sigma - 2)}{(z-d)^2} \right]$
$e^{-at} - e^{-\gamma t}$	$\frac{\gamma - a}{(s+a)(s+\gamma)}$	$\frac{z(d-c)}{(z-d)(z-c)}$ $d = e^{-aT_0}$ $c = e^{-\gamma T_0}$	$\frac{z^2(d^\sigma - c^\sigma) \rightarrow z(dc^\sigma - cd^\sigma)}{(z-d)(z-c)}$
$\gamma e^{-\gamma t} - a e^{-at}$	$\frac{(\gamma - a)s}{(s+a)(s+\gamma)}$	$\frac{z^2(\gamma - a) + z(ac - \gamma d)}{(z-d)(z-c)}$	$\frac{z^2(\gamma c^\sigma - ad^\sigma) \rightarrow z(acd^\sigma - \gamma dc^\sigma)}{(z-d)(z-c)}$
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$	$\frac{z \sin \beta T_0}{z^2 - 2z \cos \beta T_0 + 1}$	$\frac{z^2 \sin \sigma \beta T_0 + z \sin \delta \beta T_0}{z^2 - 2z \cos \beta T_0 + 1}; \delta = 1 - \sigma$
$\cos \beta t$	$\frac{s}{s^2 + \beta^2}$	$\frac{z^2 - z \cos \beta T_0}{z^2 - 2z \cos \beta T_0 + 1}$	$\frac{z^2 \cos \sigma \beta T_0 - z \cos \delta \beta T_0}{z^2 - 2z \cos \beta T_0 + 1}$

Предисловие	3
Г л а в а I. Расчет параметров и составление уравнений и передаточных функций элементов систем автоматического управления	4
§ 1.1. Предварительные замечания	4
§ 1.2. Расчет параметров и составление уравнения генератора постоянного тока	10
§ 1.3. Расчет параметров и составление уравнения двигателя постоянного тока	17
§ 1.4. Расчет параметров и составление уравнения двухфазного асинхронного двигателя	25
§ 1.5. Основные параметры и передаточная функция электромашинного усилителя	30
§ 1.6. Основные параметры и передаточные функции магнитных усилителей	37
Литература к главе I	42
Г л а в а II. Выбор исполнительного двигателя системы автоматического управления	43
§ 2.1. Предварительные замечания	43
§ 2.2. Выбор мощности исполнительного двигателя системы автоматического управления	43
§ 2.3. Выбор исполнительного двигателя и расчет параметров позиционных <u>следающих систем</u> малой мощности	49
Литература к главе II	56
Г л а в а III. Расчет линейных непрерывных систем автоматического управления по заданной точности в установившемся режиме	57
§ 3.1. Передаточные функции системы автоматического управления	57
§ 3.2. Определение установившихся ошибок в системах автоматического управления	58
§ 3.3. Точность систем автоматического управления при типовых воздействиях	59
§ 3.4. Расчет параметров систем автоматического управления по заданной величине установившейся ошибки	63
Литература к главе III	68
Г л а в а IV. Расчет линейных непрерывных систем частотными методами	69
§ 4.1. Предварительные замечания	69
§ 4.2. Частотные характеристики линейных систем	69
§ 4.3. Исследование устойчивости линейных систем с помощью частотного критерия	77
§ 4.4. Определение частотных характеристик корректирующих цепей	82
§ 4.5. Расчет переходных процессов линейных систем частотными методами	107
Литература к главе IV	116
Г л а в а V. Расчет линейных непрерывных систем методом траекторий корней	117
§ 5.1. Общие сведения о методе траекторий корней	117
§ 5.2. Построение траекторий корней	120
§ 5.3. Анализ автоматических систем методом траекторий корней	128

§ 5.4.	Расчет корректирующих цепей по заданным показателям качества	134
§ 5.5.	Расчет систем с компенсацией ошибок методом траекторий корней	139
	Литература к главе V	141
Глава VI.	Расчет линейных импульсных систем	142
§ 6.1.	Математический аппарат теории линейных импульсных систем	142
§ 6.2.	Передаточные функции разомкнутых импульсных систем	144
§ 6.3.	Структурные схемы и передаточные функции замкнутых импульсных систем	152
§ 6.4.	Оценка точности работы импульсных автоматических систем в установившемся режиме	157
§ 6.5.	Логарифмические частотные характеристики импульсных систем	160
§ 6.6.	Приближенные методы построения логарифмических частотных характеристик импульсных систем	165
§ 6.7.	Анализ устойчивости импульсных систем	168
§ 6.8.	Расчет корректирующих цепей в импульсных системах методом логарифмических частотных характеристик	170
§ 6.9.	Расчет переходных процессов в импульсных системах	181
	Литература к главе VI	184
Глава VII.	Расчет параметров корректирующих устройств систем автоматического управления	185
§ 7.1.	Предварительные замечания	185
§ 7.2.	Особенности способов коррекции непрерывных линейных систем автоматического управления	185
§ 7.3.	Корректирующие устройства непрерывных линейных систем автоматического управления	191
§ 7.4.	Способы коррекции импульсных систем автоматического управления	205
§ 7.5.	Дискретные корректирующие устройства линейных импульсных систем	211
	Литература к главе VII	215
Глава VIII.	Расчет систем автоматического управления, инвариантных до ϵ	216
§ 8.1.	Предварительные замечания	216
§ 8.2.	Показатели качества инвариантных систем автоматического управления	220
§ 8.3.	Связь между показателями качества и параметрами инвариантных систем автоматического управления	224
§ 8.4.	Примеры расчета инвариантных систем автоматического управления	238
	Литература к главе VIII	243
Глава IX.	Расчет нелинейных гармонически линеаризованных систем по логарифмическим характеристикам	244
§ 9.1.	Логарифмические характеристики нелинейных элементов при симметричных колебаниях	244
§ 9.2.	Симметричные периодические режимы в нелинейных системах	259
§ 9.3.	Синтез нелинейных систем с заданными значениями амплитуды и частоты автоколебаний	269
§ 9.4.	Переходные процессы в нелинейных системах	272
§ 9.5.	Примеры расчета симметричных периодических режимов и переходных процессов в нелинейных системах	281
	Литература к главе IX	286