Цена 50 коп.

М. ЦАХАРИАС

ВВЕДЕНИЕ В ПРОЕКТИВНУЮ ГЕОМЕТРИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1932 ЛЕНИНГРАД

М. ЦАХАРИАС

ВВЕДЕНИЕ В ПРОЕКТИВНУЮ ГЕОМЕТРИЮ

ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО
О. А. ВОЛЬБЕРГА
ПОД РЕДАКЦИЕЙ
ПРОФ. С. А. БОГОМОЛОВА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ
(ГТТИ — ПЕРВОЕ)

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1932 ЛЕНИНГРАД

СОДЕРЖАНИЕ.

Стр.

От переводчика 3

Предисловие 5

Введение 7

I. Дезарг 9

II. Паскаль 41

III. Понселе 53

IV. Штейнер 59

V. Штаудт 67

Прибавление I. Основное предложение проективной теории конических сечений 74

Прибавление II. Задачи 80

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА.

При переводе книжки Цахариаса мы внесли в нее некоторые изменения, которые необходимо оговорить. Совершенно заново написаны стр. 10—13, посвященные центральной перспективе и введению понятия о бесконечно удаленных точках. Мы развили взятый автором пример вычерчивания перспективного изображения проволочного куба и на этом примере ввели понятие о бесконечно удаленной точке данной прямой —понятие весьма важное в проективной геометрии и весьма трудное для начинающего; этому понятию в подлиннике было уделено слишком мало места. При этом мы старались спасти читателя от тех опасностей, которые связаны для начинающего со всеми понятиями о бесконечно удаленных элементах ввиду довольно обычного бесцеремонного обращения с бесконечностью. Другие изменения, сделанные в тексте, ничего существенного не представляют. Все, не принадлежащее подлиннику, внесено в текст в прямых скобках ([ ]).

Основное предложение проективного учения о конических сечениях оставлено автором без доказательства. Чтобы подвести прочный фундамент под это учение и избавить читателя от тягостного чувства неудовлетворенности, мы дали это доказательство в первом прибавлении. Кроме того, нами составлено прибавление II, содержащее в себе небольшое собрание задач, подобранных в таком порядке, в котором развивается теория в книжке, и приуроченных к соответствующим частям отдельных глав. Читатель должен параллельно изучению текста решать соответствующие задачи,— только тогда он действительно освоится с теми идеями, которые иной раз слишком бегло намечены в этом сжатом введении в проективную геометрию.

Нами сделано также довольно много примечаний троякого рода. Одни имеют целью дать более ясное изложение того, что иногда недостаточно ясно изложено в тексте; другие исправляют мелкие погрешности текста, или представляют собой оговорки в тех случаях, когда автор высказывает мысли, с нашей точки зрения неправильные. Третьи, наконец, дают намеки на новые точки зрения, которые не могут быть развиты в этой начальной книжке, но, как нам казалось, должны будить мысль и звать читателя „вперед и выше“.

Примечания, принадлежащие нам, отмечены цифрами [1), 2),...], в отличие от примечаний автора, отмеченных звездочкой [*), **)]. Кроме того, нами значительно увеличено число чертежей — с 18 до 33, причем некоторые чертежи заменены новыми.

В заключении напомним читателю, — что читать значит — творить, особенно в математике. Недостаточно только следить за мыслью автора: нужно мыслить вместе с ним. Более того, нужно отрываться от мыслей автора, применять прочитанное к новым проблемам, искать новых путей, ловить и развивать брошенные намеки, сопоставлять отдельные части, словом — творить. Поэтому карандаш и бумага не менее необходимы читателю, чем автору и даже чем творцам тех идей, которые здесь излагаются. Если читатель будет так читать, он скоро войдет во вкус еще, быть может, нового для него, высшего из доступных человеку наслаждений — наслаждения творчеством!

О. В.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Предлагаемый томик „Математической библиотеки" имеет целью ввести читателя, не требуя от него больших математических познаний, в такую область математики, которая, обыкновенно, не затрагивается в школе. Предполагаемые математические знания ограничиваются пониманием простейших преобразований алгебраических уравнений, знанием пропорций, важнейших теорем об окружности, о подобии и равновеликости фигур, а также некоторыми стереометрическими представлениями о положении прямых и плоскостей в пространстве. Для читателя с такой подготовкой автор имеет в виду возможно коротко изложить понятия и теоремы проективной геометрии, наиболее важные как по содержанию, так и в смысле исторического развития. Поэтому он приурочивает свое изложение к именам пяти выдающихся геометров: Дезарга, Паскаля, Понселе, Штейнера и фон-Штаудта. Каждая из пяти глав рисует в общих чертах, что́ именно данный ученый сделал для развития проективной геометрии. Читатель, таким образом, узнает, как возникла проективная геометрия, как она постепенно развилась в г е о м е т р и ю п о л о ж е н и я; знакомится при этом с рядом новых предложений и видит те задачи, к решению которых эти предложения могут применяться. (Для действительного проникновения в новую область рекомендуется начинающему повторить все чертежи и попытаться самостоятельно решить все задачи).

Компетентный специалист, заглянув в эту книжку, не найдет в ней необходимой для учебника „систематичности" и строгих последовательных доказательств, а также многих важных имен и дат, которые не должны отсутствовать в полном историческом обзоре проективной геометрии. (Так, пропущено — если взять первый попавшийся пример — правило знаков для отрезков). Этот кажущийся недочет объясняется тем, что в намерение автора не входило дать систематический учебник или полный исторический обзор: его цель будет достигнута, если начинающий — для которого книжка и предназначена — перерабатывая ее, почувствует своеобразное наслаждение, которое доставляет занятие новой синтетической геометрией, и если это ощущение побудит его к более основательному проникновению в эту область (хотя бы путем изучения сочинений Штейнера или „Geometrie der Lage", Reye).

М. Цахариас

ВВЕДЕНИЕ.

Проективная геометрия, называемая также геометрией положения, возникла недавно. Хотя еще в древности были известны отдельные ее понятия и предложения, но лишь геометры последних трех столетий поняли важность этих понятий, взаимную связь дотоле разрозненных предложений и развили из них, путем систематизирования и дальнейших построений, совершенно новую отрасль геометрии. Это развитие приняло у геометров нового времени такое направление, что проективная геометрия — дочь греческой или евклидовой геометрии*) — становилась все более независимой от своей матери и, наконец, даже стала к ней в известную противоположность. В то время, как у Евклида, например, все фигуры тверды и неподвижны, новая геометрия охотно приводит в движение элементы своих образов: точки пробегают линии, прямые линии вращаются вокруг неподвижных точек или, в качестве подвижных касательных, катятся вокруг кривых, плоскости вращаются вокруг неподвижных осей и т. д.[2]).

---

*) Евклид — знаменитый автор „Начал"[1]), учебника элементарной геометрии, жил в Александрии около 300 г. до н. э.

[1]) Знаменитые „Начала" Евклида — не просто учебник элементарной геометрии, а ученый труд, в котором автор, основываясь, конечно, на трудах своих предшественников, впервые построил прекрасное, логически почти безупречное, здание геометрии. Поэтому Евклид считается основателем геометрии, как стройной математической дисциплины.

[2]) Неподвижность фигур евклидовой геометрии и подвижность элементов проективной геометрии не есть нечто существенное для обеих систем. В настоящее время сделаны, и не без успеха, попытки ввести принцип движения в геометрию Евклида, а с другой стороны, существуют изложения проективной геометрии, где все образы считаются неподвижными. Таким образом противоположность, указанная автором, касается не существа обеих дисциплин, а манеры изложения, принятой некоторыми авторами.

В связи с этим находится и второе различие, а именно: в евклидовой геометрии число составных частей (точек и линий) фигуры — конечное, между тем как проективная геометрия предпочитает иметь дело с бесконечным числом точек прямой или кривой линии, с бесконечным числом точек и прямых плоскости, или с бесконечным числом лучей в пучке или связке[1]).

Затем греческий геометр интересуется преимущественно частностями, специальными случаями; современный же геометр стремится к установлению общих всеобъемлющих предложений и соотношений, стараясь устранить мешающие исключения путем смелого расширения понятий. Наконец, теоремы Евклида почти все относятся к „метрическим" свойствам фигур, т. е. к сравнению и к измерению отрезков и углов; новой же геометрии удалось, наоборот, делаться все более и более независимой от измерения и превратиться в конце концов в чистую „геометрию положения", которая интересуется не соотношениями величины, а только соотношениями положения. При последующем изложении истории проективной геометрии представятся еще случаи пояснить примерами эти общие замечания.

В противоположность своей почти ровеснице — аналитической геометрии, оперирующей вычислениями, — проективная геометрия называется также новой синтетической, или просто синтетической геометрией.

---

[1]) Мы не можем здесь входить в подробности, но и это различие не существенно для обеих отраслей геометрии.

I. ДЕЗАРГ.

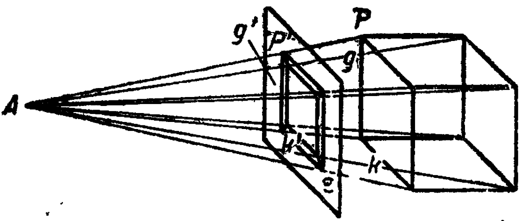
Первые мысли, относящиеся к проективной геометрии, возникли в мастерской техника. Жирар Дезарг (Girard Desargues, 1593—1662) из Лиона, отец новой синтетический геометрии, был архитектор и инженер, близкий друг знаменитого философа и математика Декарта. Первая научная работа Дезарга относилась к области центральной перспективы, особенно важной для архитектуры (1636); вторая работа его касается учения о конических сечениях (1639)*). Эта последовательность не случайна; работа о конических сечениях ясно показывает, что толчок к новым идеям и исследованиям был дан Дезаргу его занятиями по перспективе.

Центральная перспектива, или центральная проекция, есть применяемый в технике прием изображения какого-нибудь телесного предмета (например, дома или машины) в плоском чертеже. Для этого представляют себе, что глаз зрителя (точка A) соединен прямыми линиями (проектирующими лучами или лучами зрения) со всеми точками имеющего быть изображенным тела r и что связка этих лучей пересекается какой-либо прозрачной плоскостью e (плоскостью картины или проекции).

Для простого примера предположим, что подлежащий изображению предмет r есть проволочный куб, т. е. фигура, состоящая из двенадцати ребер куба (черт. 1). Тогда каждой точке P какого-нибудь ребра соответствует некоторая точка P' плоскости картины, а именно — точка пересечения этой плоскости e лучом

*) Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan, par le sieur G. Desargues Lionais, Paris 1639. Oeuvres de Desargues, réunies et anleysées, par M. Poudra, Paris 1864, tome I, 97.

AP. Эту точку называют перспективным изображением, или проекцией точки P. Любое ребро куба g может быть соединено с глазом плоскостью γ, т. е. проектирующей плоскостью прямой g (так как через прямую и лежащую вне ее точку можно провести одну и только одну плоскость). Если P пробегает ребро g, то луч AP остается в плоскости γ, а точка изображения P' пробегает отрезок на прямой g', по которой пересекаются плоскости γ и ε. [Таким образом перспективное изображение (проекция) отрезка прямой есть отрезок прямой; перспективное изображение (проекция) точки есть точка. На картине все двенадцать ребер куба, т. е. соответствующие отрезки прямых, изобразятся 12 от-



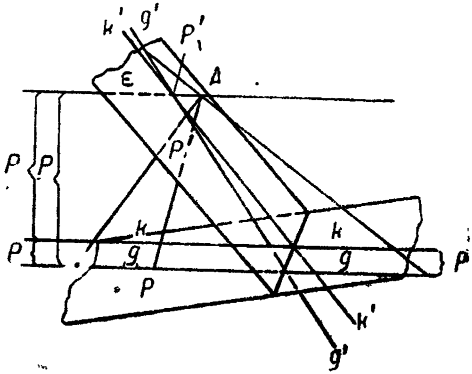
Черт. 1.

резками; восемь вершин, т. е. точек, в которых пересекаются по три ребра, изобразятся восемью точками пересечения соответствующих отрезков. Но читатель легко сообразит, что отрезок, изображающий ребро куба на картине, не равен самому ребру куба. Более того, если g' и k' изображают на картине два ребра куба g и k, то величина их зависит от расположения ребер g и k относительно глаза A и плоскости картины ε и, следовательно, они, вообще говоря, не равны между собой. Таким образом не только абсолютная, но даже и относительная величина частей предмета не сохраняется на перспективном изображении. Какой же вид имеет чертеж проволочного куба? Будут ли, например, на чертеже параллельны изображения (проекции) параллельных ребер?

Пусть g и k (черт. 2) — две параллельные прямые. Точка A — глаз, т. е. центр перспективы; плоскость

ε — плоскость картины. Если точка P пробегает всю прямую g, то ее изображение P' пробегает всю прямую g'.

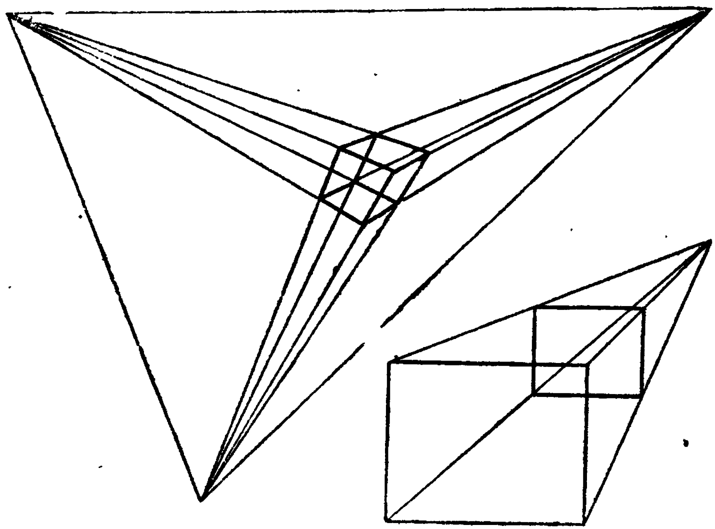
Каждая точка прямой g' есть изображение одной соответствующей ей точки прямой g, именно той, в которой луч из глаза A, проходящий через эту точку, пересекает прямую g. Однако на прямой g' есть одна точка, которой не соответствует ни одна точка на прямой g; эта точка P'_1, через которую проходит луч AP'_1, параллельный прямой g, потому что этот луч нигде не пересекает прямую g. Таким образом на каждой прямой чертежа имеется „особая“ точка, так сказать *лишняя* точка, которая не является изображением какой-либо точки изображаемой (проектируемой) прямой. На каждой прямой такая точка только одна, потому что через глаз A можно провести только один луч, параллельный прямой g. Соседние с „особой“ точки прямой g' являются изображениями, правда, весьма удаленных, но все же существующих на g точек. В самом деле, когда P уходит влево по прямой g, то ее изображение P' движется к „особой“ точке. Когда P уходит вправо по прямой g, то P' сперва удаляется, но затем тоже начинает приближаться к „особой“ точке с другой стороны.



Черт. 2.

Чтобы найти „особую“ точку прямой k', проведем через глаз A луч, параллельный k; так как $k \parallel g$, то этот луч совпадет с проведенным ранее лучом AP_1', параллельным g. Но этот луч пересекает плоскость ε в точке P_1' — „особой“ точке прямой g; поэтому он, очевидно, пересекает k' тоже в точке P_1', т. е. прямые

g, и k' имеют общую „особую“ точку. Итак, две прямые g' и k', являющиеся изображением (проекциями) двух параллельных прямых g и k, пересекаются в „особой“ точке. Совершенно ясно, что в этой же точке пересекутся изображения всех прямых параллель-



Черт. 3. Черт. 4.

ных g [1]. (Исключение возможно только в том случае, если плоскость ε параллельна прямой g; тогда g' параллельна g, k' параллельна k, и на g' „особой“ точки нет, так как луч, параллельный g, параллен и прямой g').

В кубе имеем три группы параллельных ребер, по 4 ребра в каждой: 1) четыре вертикальных, 2) четыре горизонтальных, идущих справо налево, и 3) четыре горизонтальных, идущих спереди назад. На чертеже они изобразятся отрезками прямых, пересекающихся по

[1]) Вследствие этого „особая“ точка называется обычно **точкой схода** изображений параллельных прямых.

четыре в трех точках — в „особых" точках их изображений. Черт. 3 и 4 дают перспективные изображения куба; на черт. 3 плоскость чертежа не параллельна ни одному ребру куба; на черт. 4 плоскость чертежа параллельна передней грани куба.

Предлагаем читателям начертить перспективное изображение параллелепипеда, если 1) плоскость чертежа параллельна боковой грани, 2) плоскость чертежа параллельна только четырем вертикальным ребрам, но не параллельна ни одной грани[1]) (см. также задачи, прибавление II).

„Особые" точки, как видно отсюда, играют весьма важную роль в перспективе. Ввиду того, что соседние с ними точки являются изображениями весьма удаленных точек прямой g, — тем более удаленных, чем ближе изображения их к „особой" точке, — „особую" точку прямой g' стали называть изображением (проекцией) бесконечно удаленной точки P_1 прямой g[2]). Таким образом говорят, что на каждой прямой есть одна бесконечно удаленная точка, которая в перспективе изображается „особой" точкой.

Бесконечно удаленную точку P_1 можно считать, по желанию, расположенной вправо или влево на прямой g, потому что в каком бы направлении ни удалялась точка P, соответствующая ей точка P' прямой g' в конце концов приближается к „особой" точке P_1'. Прямая линия получает, таким образом, вследствие введения бесконечно удаленой точки характер замкнутой линии (вроде окружности); правая и левая часть прямой g должны встретиться в бесконечно удаленной точке, т. е. замкнуться в ней. Параллельные прямые имеют одну общую „бесконечно удаленую" точку, *т. е. „пересекаются" в „бесконечно удаленной"*

[1]) Читателя, интересующегося вопросами перспективы, отошлем к обстоятельному курсу П. А. Рынина, Перспектива.

[2]) Такой способ выражения, конечно, имеет целью обобщить то положение, что каждой точке прямой g' отвечает определенная точка прямой g; это положение имеет одно досадное исключение — точку P_1' — „особую точку" Это исключение устраняется введением нового термина — „бесконечно удаленная точка". Насколько это выгодно — читатель скоро увидит.

точке, потому что их изображения пересекаются в одной „особой“ точке].

Таким образом для проективной геометрии уже не подходит евклидово определение параллельных прямых, как не пересекающихся прямых одной плоскости; здесь говорят, что две прямые одной плоскости всегда пересекаюся; но точка пересечения параллельных прямых есть „бесконечно удаленная“ точка. Выражение: „прямая пересекает данную в бесконечно удаленной точке“ означает, что эта прямая параллельна данной прямой.

[Конечно, не следует забывать, что „бесконечно удаленная“ точка вовсе не есть такая же точка, как все остальные,—„конечные“, с которыми мы привыкли иметь дело. Например, предложение: „из одной точки, лежащей вне данной прямой, можно опустить на данную прямую только один перпендикуляр“, не имеет места для бесконечно удаленной точки, так как все прямые, проходящие через „безконечно удаленную“ точку, между собою параллельны, и таких параллельных между собою перпендикуляров можно провести сколько угодно [1]). Но в проективной геометрии не занимаются перпендикулярами, т. е. прямыми углами, как и вообще величинами; для тех же случаев, которые интересуют проективную геометрию, доказано, что „бесконечно удаленные“ точки обладают такими же свойствами, как и „конечные“ [2]).

Например, предложение: „через две точки можно провести одну и только одну прямую“, верно и в том случае, если одна из точек „бесконечно удаленная“,

---

[1]) Точно так же нет никакого смысла говорить о „расстоянии до бесконечно удаленной точки“. Мы будем далее употреблять выражение „точка, лежащая в бесконечности“, как синоним выражения „бесконечно удаленная точка“. Читатель не должен связывать эти выражения с понятием „бесконечно большое расстояние“, которое есть частный случай понятия „бесконечно большой величины“; когда говорят о бесконечно удаленной точке, имеют в виду точку, единственную для каждой прямой, а бесконечно большая величина есть величина переменная.

[2]) См. Вебер и Вельштейн. „Энциклопедия элементарной математики“, т. II, кн. I.

так как в переводе на обычный язык это означает, что „через одну точку можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной“ [1])].

Какие же преимущества представляет новая точка зрения?

Прежде всего она дает возможность объединить некоторые различные предложения в одно общее и освободиться от неизбежных раньше исключений. Так, например, предложение: „через данную точку можно провести к данной прямой одну и только одну параллельную“, теперь уже представляет собой лишь частный случай совсем другого предложения: „через две точки можно провести одну и только одну прямую“.

Точно так же можно легко убедиться, что стереометрические предложения: 1) „через данную прямую можно провести одну и только одну плоскость, параллельную прямой, косой по отношению к данной“; 2) „через данную точку можно провести одну и только одну плоскость, параллельную двум данным, не параллельным прямым“, можно объединить в одно общее предложение, а именно: „через три точки, не лежащие на одной прямой“, можно провести одну и только одну плоскость.

Введение бесконечно удаленных точек влечет за собой представление о бесконечно удаленных прямых. Параллельными, согласно старому определению, назывались непересекающиеся плоскости. Представим себе параллельные плоскости ε_1 и ε_2. К каждой прямой плоскости ε_1 можно провести параллельную прямую через любую точку плоскости ε_2. Обе параллели пересекутся в бесконечно удаленной точке; эта точка, очевидно, общая обеим плоскостям, Так как под первой прямой на ε_1 можно понимать всякую прямую этой плоскости, то с точки зрения проективной геометрии для параллельных плоскостей будут общими бесконечно удаленные точки всех лежащих на них прямых.

[1]) Если обе точки бесконечно удалены, то через них проходит, как читатель увидит ниже, „бесконечно удаленная прямая“; так как в плоскости лежит только одна бесконечно удаленная прямая, то и в этом случае предложение сохраняет свое значение.

Иначе говоря, две плоскости пересекаются всегда в бесчисленном множестве точек; если плоскости не параллельны, то точки их пересечения образуют прямую линию; если они параллельны — точки пересечения лежат в бесконечности. Чтобы объединить эти оба случая, Дезарг принимает: бесконечно удаленные точки какой-либо плоскости лежат на бесконечно удаленной прямой этой плоскости. Проективное определение параллельных плоскостей поэтому гласит: *параллельны такие плоскости, прямая пересечения которых лежит в бесконечности.* Введение бесконечно удаленных прямых вызывает такое же упрощение и обобщение многих предложений, как введение бесконечно удаленных точек. Так, например, предложение, что через точку, лежащую вне плоскости, можно провести только одну плоскость, параллельную данной, является специальным случаем более общего предложения, что прямая и точка, лежащая вне ее, однозначно определяют плоскость.

Необходимым дополнением учения о бесконечно удаленных точках и прямых является не высказанное еще Дезаргом введение безконечно удаленной плоскости [которым, впрочем, мы здесь заниматься не будем [1])].

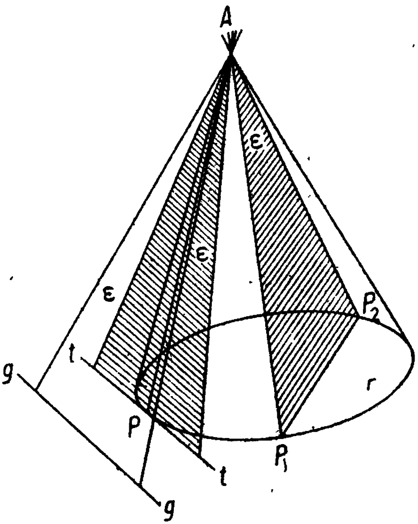
Значение сочинения Дезарга „Brouillon project" состоит не только в последовательном проведении понятия о бесконечно удаленных элементах пространства, но прежде всего в плодотворном применении центральной перспективы к иследованию перспективных изображений окружности, так называемых конических сечений.

Пусть данная для перспективного изображения пространственная фигура r будет окружностью, произвольно расположенной в пространстве, а глаз A находится не в плоскости этой окружности.

Представим себе, что подвижная точка P пробегает окружность r, и вообразим совокупность всех положений, последовательно занятых при этом лучом AP. Эти положения образуют собой кривую поверхность,

[1]) Мы опускаем не совсем удачное объяснение автора понятия о бесконечно удаленной плоскости пространства, так как для дальнейшего оно нам совершенно не нужно.

называемую поверхностью кругового конуса; точка A называется вершиной конуса, а каждое положение луча AP при упомянутом движении — образующей конуса; круг r — основанием конуса. Плоскость картины ε пересекает круговой конус по линии, называемой **коническим сечением** (черт. 6, 7, 8). История учения о конических сечениях восходит к глубокой древности. Менэхм (около 350 г. до н. э., ученик Платона) открыл эти линии, как геометрические места точек, при решении планиметрических задач на построение, но не распознал их стереометрического характера, как сечений кругового конуса.



Черт. 5.

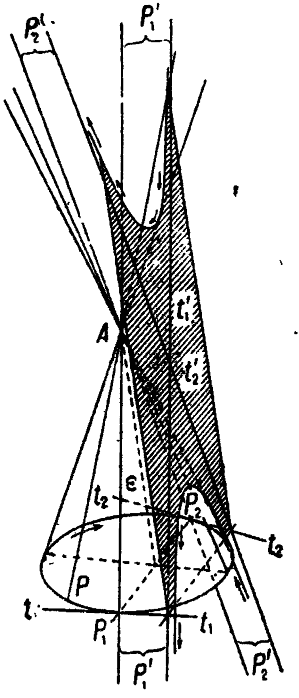
Лишь Аполлоний Пергейский (между 200—250 гг. до н. э. в Александрии, впоследствии в Пергаме) рассматривает в своем знаменитом сочинении о конических сечениях три нижеуказанные кривые как плоские сечения одного и того же кругового конуса и выводит из этого определения все их свойства.

Если плоскость сечения ε проходит, скажем, сначала через вершину конуса, то возможны три случая: 1) ε проходит через точку и хорду основания P_1P_2 (черт. 5); коническое сечение состоит из прямых AP_1 и AP_2 *) 2) хорда P_1P_2 заменена касательной t с точкой касания P (черт. 5); обе прямые AP_1 и AP_2, составлявшие коническое сечение, совпадают с прямой AP, которая считается

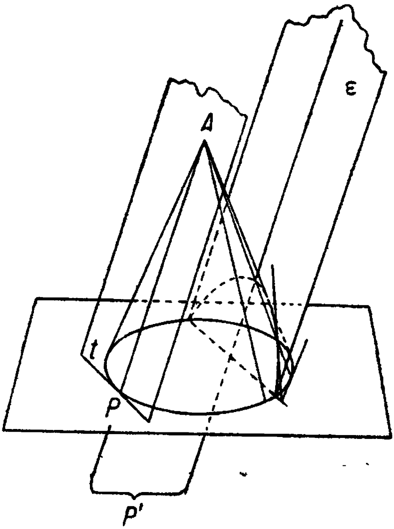
*) Коническое сечение есть сечение (неограниченной) конической поверхности; поэтому хорда P_1 P_2 и не относится сюда.

теперь двойной; 3) ε проходит через A и прямую g, лежащую в плоскости основания, но не пересекающую окружности (черт. 5). Коническое сечение состоит только из одной точки A.

Коническими сечениями в собственном смысле считаются те сечения, которые получаются, если плоскость сечения не проходит через вершину. Здесь тоже следует различать три случая, которые можно получить из трех вышеуказанных, допуская, что секущая плоскость принимает положения, параллельные прежним: 1) плоскость

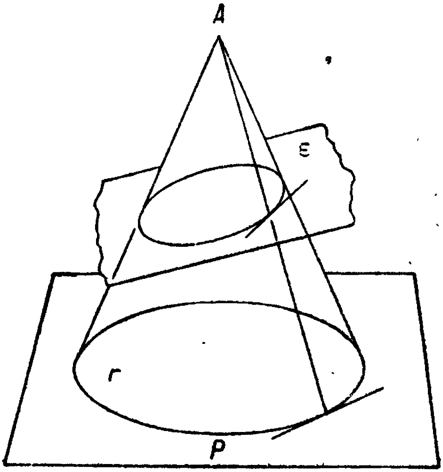


Черт. 6.



Черт. 7.

сечения ε параллельна плоскости AP_1P_2 и, значит, двум образующим AP_1 и AP_2 (черт. 6); она встречается с AP_1 и AP_2 в двух бесконечно удаленных точках P_1' и P_2', все остальные точки конического сечения находятся в конечной части плоскости. Коническое сечение в этом случае получило у Аполлония название гиперболы (черт. 11); 2) плоскость сечения *ε* параллельна плоскости, определяемой точкой *A* и касательной *t* (черт. 7); обе образующие, пересекаемые ею в бесконечности, совпадают с двойной прямой *AP*; она пересекает эту прямую в бесконечно удаленной точке *P′*. Все остальные точки конического сечения находятся в конечной части плоскости; оно образует кривую, замыкающуюся в бесконечно удаленной точке; Аполлоний называет его параболой (черт. 9); 3) плоскость сечения параллельна плоскости, определенной точкой *A* и прямой *g*, и, значит, не параллельна ни одной из образующих (черт. 8); каждая точка этого конического сечения находится в конечной части плоскости; оно образует замкнутую кривую, не имеющую бесконечно удаленных точек. Аполлоний назвал это сечение эллипсом *) (черт. 10).



Черт. 8.

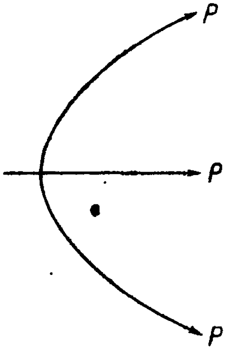
Нужно, впрочем, заметить, что новое дезаргово понятие конической поверхности отличается от понятия древних.

Аполлоний рассматривает лишь ту исходящую из *A* часть прямой (луч), на которой находится точка *P*, но не продолжение ее в противоположную сторону, уходящее тоже в бесконечность. Его круговой конус имеет поэтому в *A* вершину и простирается из *A* с одним раструбом по направлению к окружности *r*.

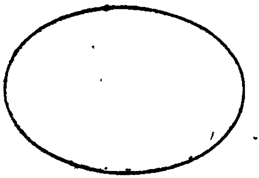
В новой геометрии конус происходит от вращения всей прямой *AP*, простирающейся от точки *A* в двух

*) Аристей (около 320 г. до н. э.), еще перед Аполлонием, располагал всегда плоскости сечения перпендикулярно к одной образующей; поэтому один и тот же конус допускал смотря по своей форме, только один из трех родов конических сечений.

противоположных направлениях до бесконечности, и состоит поэтому из двух аполлониевых конусов, имеющих общую вершину A, раструбы которых направлены из этой вершины в противоположные стороны. Из этого различия представлений о конусе вытекает и различие в определениях гиперболы. Если мы перенесем плоскость, проходящую через две образующие AP_1 и AP_2, параллельно самой себе (случай 1-й), то она пересечет, очевидно, оба полуконуса (черт. 6). Значит, в новой геометрии гипербола состоит из двух направленных в противоположные стороны половин или ветвей, расположенных, как говорит Дезарг, „dos à dos“, т. е. „спиной одна к другой“. Аполлоний,



Черт. 9.



Черт. 10.

имевший в виду только один полуконус, понимал под гиперболой только одну ветвь этой кривой.

Для Дезарга обе ветви гиперболы образуют не две отдельные кривые, а единую линию, проходящую через бесконечность. Для пояснения этого обратимся снова к окружности, перспективным изображением которой является гипербола. Эта окружность (черт. 6) обладает в точке P_1, как и во всякой другой своей точке, касательной t_1, которая имеет с окружностью только одну общую точку P_1; проектирующая плоскость τ_1, определяемая точкой A и прямой t_1 (на чертеже не показана), имеет поэтому только одну общую с конической поверхностью прямую AP_1, почему говорят, что она касается конуса вдоль прямой AP_1.

Эта касательная плоскость τ_1 пересекает плоскость чертежа ε по прямой t_1', являющейся изображением касательной t_1. Так как в плоскости τ_1 лежит только одна образующая AP_1, то t_1' может встретить только одну образующую [1]); а так как t_1' лежит в плоскости проекции, то эта точка встречи P_1' и есть изображение точки P_1. Прямая t_1' имеет, таким обазом, с гиперболой только одну общую точку P_1'; ее поэтому называют касательной к гиперболе, а точку P_1' — соответствующей точкой касания. Но точка P_1' есть бесконечно удаленная точка прямой AP_1, так как плоскость ε параллельна AP_1.

Поэтому изображением касательной t_1 к окружности является касательная к гиперболе t_1' с бесконечно удаленной точкой касания. Как это понять? Если какая-либо кривая имеет касательную t в точке P, то точка, движущаяся по кривой к точке P, все более и более приближается к прямой t и, наконец, достигает этой прямой в точке P, а затем снова от нее удаляется. Таким же образом точка, движущаяся по гиперболе по направлению к бесконечно удаленной точке ее, должна приближаться к этой замечательной касательной t_1', но все же в пределах конечной части плоскости никогда ее не достигнет, причем расстояние между нею и прямою t_1' будет неограниченно уменьшаться [2]). Существует еще вторая касательная к гиперболе t_2'

---

[1]) Читатель помнит, что в проективной геометрии все прямые одной плоскости пересекаются. Прямая t_1' и образующая AP_1 лежат в одной плоскости τ_1; следовательно, эти прямые пересекутся в одной точке P_1', хотя они параллельны, но только эта точка P_1' — бесконечно удаленная.

[2]) Мы несколько изменили, в интересах ясности, пояснение автора, но сделать это в коротких словах совершенно ясным и точным невозможно. Поэтому, быть может, читатель поступит наилучшим образом, если сосредоточить свое внимание на том, что бесконечно удаленная точка прямой t_1' есть та точка, в которой эта прямая встречается с параллельными ей прямыми; в этой же точке она встречается с гиперболой. Это значит, что при отражении посредством центральной перспективы на новую плоскость ε_1 гипербола, вообще говоря, изобразится параболой или эллипсом или другой гиперболой; тогда касательная t_1' изобразится касательной t_1'' к этой параболе или к эллипсу, или к гиперболе, причем все прямые, параллельные t_1' изобразятся прямыми, проходящими через точку касания. В частности, на черт. 6 окружность r можно рассматривать как изображение (проекцию) гиперболы.

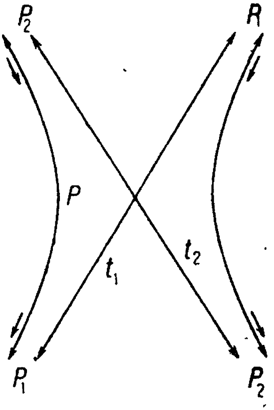
с бесконечно удаленной точкой касания P_2'; эта касательная представляет собой изображение касательной t_2 к окружности в точке P_2. *Обе касательные, встречающиеся с гиперболой в бесконечности, называются асимптотами гиперболы.*

Вообразим себе подвижную точку P, пробегающую окружность из любого первоначального положения по направлению к точке P_1; тогда ее изображение P' пробегает одну ветвь гиперболы из какого-нибудь первоначального положения по направлению к бесконечно удаленной точке (черт. 6 и 11); при этом она все более приближается к асимптоте t_1'. Если P совпадает с P_1, то луч $AP = AP_1$ становится параллельным к плоскости ε, т. е. P' попадает в бесконечно удаленную точку P_1'. Если P продвинется за точку P_1, то точка P' пересечения прямой AP и плоскости ε перейдет на второй полуконус и, следовательно, на вторую ветвь гиперболы. Так как прямая t_1' имеет только одну бесконечно удаленную точку P_1', которую можно считать лежащей в обоих направлениях прямой, то переход точки P' с одной ветви гиперболы на другую, происходящий в бесконечности, мы должны представить себе вполне непрерывным. Далее, P удаляется от P_1 и приближается к P_2; соответственно этому P' на второй ветви гиперболы удаляется от асимптоты t_1' и приближается ко второй асимптоте t_2'. Когда P перешагнет через точку P_2, то P' опять переходит непрерывно через бесконечно удаленную точку асимптоты t_2' на первую ветвь гиперболы, чтобы одновременно с P вернуться к первоначальному положению (стрелки на черт. 11 указывают направление движения точки P').

Введение бесконечно удаленных точек имело, таким образом, для Дезарга и проективной геометрии то последствие, что обе ветви гиперболы начали рассматриваться как две половины одной и той же замкнутой кривой, сходящиеся в бесконечности.

Окружность r может быть пересечена прямой g не больше, чем в двух точках. Этим точкам соответствуют в перспективе те точки конического сечения, вкоторых эта кривая пересекается перспективным изображением g' прямой g; следовательно, *коническое сечение не может пересекаться с прямой более чем в двух точках*.

Если прямая имеет только одну общую точку с окружностью, ее называют касательной к окружности; изображением касательной к окружности служит прямая, которая тоже имеет только одну общую точку с коническим сечением и называется поэтому касательной к коническому сечению. Если прямая вовсе не встречается с окружностью, то ее перспективное изображение также не может встретиться с коническим сечением. Итак, прямая может иметь по отношению к коническому сечению (как и к окружности) три положения: либо она пересекается с ним в двух точках, либо только касается его, либо вовсе не имеет с ним общих точек. Все это относится также к бесконечно удаленной прямой плоскости; поэтому три рода конических сечений могут быть определены соответственно их отношению к бесконечно удаленной прямой следующим образом: 1) *гипербола имеет две бесконечно удаленных точки; в этих точках она пересекается с бесконечно удаленной прямой* (*черт. 11*); 2) *парабола имеет только одну бесконечно удаленную точку; в этой точке она касается бесконечно удаленной прямой* (*черт. 9*); 3) *эллипс расположен целиком в конечной части плоскости; он вовсе не встречается с бесконечно удаленной прямой* (*черт. 10*).

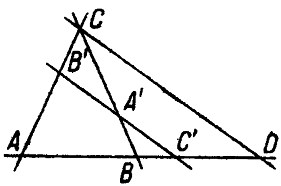


Черт. 11.

К крупным заслугам Дезарга относится особенно обоснование т е о р и и п о л я р для конических сечений. Правда, отдельные предложения этого учения были приведены уже в четвертой книге „конических сечений“ Аполлония, но Дезарг впервые систематически развил и последовательно провел это учение.

Исходной точкой нашего изложения теории поляр мы возьмем предложение, которым Дезарг неоднократно пользовался для доказательств; оно известно под названием предложения Менелая (конец I столетия н. э.), но в то время ошибочно приписывалось Птоломею: *стороны треугольника ABC (черт. 12) делятся любой прямой B'A'C' на такие отрезки,* что $AB' \cdot BC' \cdot CA' = AC' \cdot BA' \cdot CB'$[1].

Для доказательства этого предложения проведем через какую-либо вершину, например C, прямую, параллельную упомянутой прямой, которая пересечет сторону AB в точке D. Тогда на основании известной теоремы:



Черт. 12.

$$\frac{AB'}{CB'} = \frac{AC'}{C'D} \quad \text{и} \quad \frac{CA'}{BA'} = \frac{C'D}{BC'},$$

следовательно,

$$\frac{AB'}{CB'} \cdot \frac{CA'}{BA'} = \frac{AC'}{BC'}$$

или

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' = AC' \cdot BA' \cdot CB',$$

что и требовалось доказать.

С помощью этого предложения мы можем доказать важное свойство п о л н о г о ч е т ы р е х с т о р о н н и к а. Полный четырехсторонник *) — это фигура, часто применяемая в новой геометрии. Он получается из обыкновенного четырехугольника $ABCD$ (со сторонами a, b, c, d), если противолежащие стороны a и c продолжить до пересечения в точке E (черт. 13), а стороны b и d — до пересечения в точке F. Таким образом полный четырехсторонник есть плоская фигура, состоящая из четырех прямых и шести точек их пересечения попарно. Четыре прямые a, b, c и d называются сторонами, а шесть точек их пересечения — вершинами четырехсторонника. Точки A и C, B и D, E и F суть три пары противоположных вершин; соединяю-

---

[1]) Читатель должен обратить внимание на то, что в правой части равенства находится произведение отрезков, расположенных на сторонах треугольника, считая от вершины против часовой с т р е л к и, а в левой — в обратном направлении (кроме отрезка BC', *не лежащего* на стороне треугольника).

*) C a r n o t, Géométrie de position, 1803, p. 120.

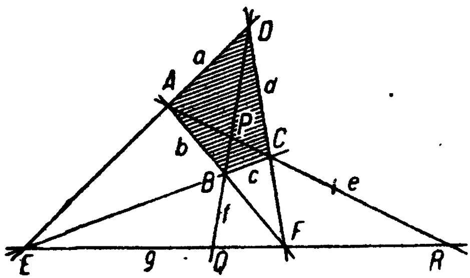
щие их прямые e, f, g называются **диагоналями** четырехсторонника; диагонали попарно пересекаются в трех точках P, Q, R.

Сторны треугольника PQR пересекаются прямой a в точках D, E, A. Поэтому, по предложению Менелая:

$$PD \cdot QE \cdot RA = PA \cdot QD \cdot RE.$$

Стороны того же треугольника пересекаются прямою d в точках D, F, C; поэтому, на основании того же предложения:

$$PD \cdot QF \cdot RC = PC \cdot QD \cdot RF.$$



Черт. 13.

Из этих двух равенств получаем путем деления:

$$\frac{QE}{QF} \cdot \frac{RA}{RC} = \frac{RE}{RF} \cdot \frac{PA}{PC}. \tag{1}$$

Если в предыдущем рассуждении вместо a и d поставить b и c, то таким же путем придем к равенству:

$$\frac{QE}{QF} \cdot \frac{RC}{RA} = \frac{RE}{RF} \cdot \frac{PC}{PA}. \tag{2}$$

Перемножив равенства (1) и (2), получаем:

$$\left(\frac{QE}{QF}\right)^2 = \left(\frac{RE}{RF}\right)^2.$$

Извлекая квадратный корень, имеем, так как числа, измеряющие отрезки, могут быть только положительными [1]):

$$\frac{QE}{QF}=\frac{RE}{RF}.$$

Если две пары точек Q, R и E, F расположены на одной прямой таким образом, что точка Q одной пары находится между точками другой пары, вторая же точка R первой пары находится вне отрезка EF, то говорят, что точка Q делит отрезок EF „внутренним", а точка R „внешним" образом. В данном случае отрезки QE и QF, получившиеся при внутреннем делении, относятся друг к другу так же, как отрезки RE и RF, образованные внешней точкой деления. В этом случае говорят, что точки Q и R делят отрезок EF гармонически.

Если отрезок EF делится точкой Q внутри, а точкой R снаружи, то, наоборот, отрезок QR делится одной из двух других точек — в данном случае точкой F — внутри, а второй — снаружи; QF и RF в этом случае суть отрезки внутреннего деления, а QE и RE — отрезки внешнего деления. Если теперь последнее равенство написать в измененном виде

$$\frac{QE}{RE}=\frac{QF}{RF},$$

то сразу видно, что части внутреннего деления отрезка QR относятся друг к другу, как отрезки внешнего деления. Отсюда вытекает следующее предложение: *если отрезок EF делится гармонически точками Q и R, то отрезок QR, в свою очередь, делится гармонически точками E и F.* Четыре точки E, F, Q, R распадаются, таким образом, на две пары точек так, что каждая пара гармонически делит отрезок, определяемый точками второй пары. Четыре такие точки называются четырьмя гармоническими точками, или, по Штаудту, — гармонической системой.

[1]) Отрезкам обычно приписывается знак в зависимости от направления, но в этой книжке речь идет только о длине отрезка.

(harmonischer Wurf); точки каждой пары называются **соответственными, или сопряженными точками.**

Возвращаясь к нашему полному четырехстороннику, мы видим, что сопряженные точки E и F гармонической системы суть противоположные вершины четырехсторонника, а две другие сопряженные точки R и Q являются точками пересечения диагонали $EF = g$ с двумя другими диагоналями.

Соответственным изменением приведенного рассуждения можно доказать, что точки A, P, C, R и D, P, B, Q тоже составляют гармонические системы. Поэтому можно установить следующее общее предложение: *каждая диагональ полного четырехсторонника делится двумя другими диагоналями в гармоническом отношении.*

На основании этого предложения можно, пользуясь одной только линейкой, решить задачу: построить к трем данным точкам четвертую гармоническую точку.

Пусть E, Q, F — три данные точки, причем E и F сопряжены между собой. Проведем через E две произвольные прямые a и c и пересечем их произвольной проходящей через Q прямой в точках D и B; пусть далее C будет точкой пересечения DF и EB, а A — точкой пересечения BF и ED. Тогда AC пересечет данную прямую EF в точке R, которая и есть сопряженная с Q четвертая гармоническая точка.

Что для трех данных точек существует лишь одна четвертая гармоническая, сопряженная с Q, видно из следующего простого расчета: в равенстве

$$\frac{RE}{RF} = \frac{QE}{QF},$$

вместо RE подставим сумму $(RF + EF)$ и получим:

$$1 + \frac{EF}{RF} = \frac{QE}{QF};$$

а отсюда путем некоторого преобразования находим,

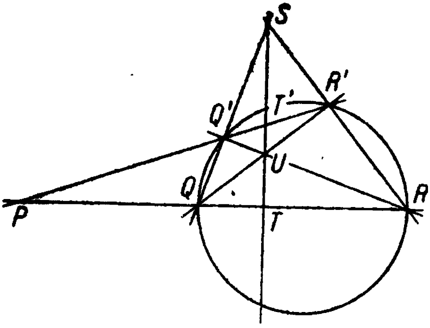
$$RF = \frac{EF \cdot QF}{QE - QF} \text{*)}.$$

*) Если $QE < QF$ или если Q расположена на продолжении EF, то эта формула меняется очевидным образом.

Так как точки E, Q, F даны, то, значит, отрезок RF, а с ним и положение точки R однозначно определено[1]).

После этих отступлений вернемся к начатому изложению теории поляр. При этом мы будем следовать принципу Дезарга — доказывать свойства конических сечений на окружности, а затем, путем центральной перспективы, переносить их на все конические сечения.

Теория поляр для окружности может быть обоснована следующим образом. Через точку P, лежащую вне окружности, проведем диаметр QR и произвольную секущую $Q'R'$ (черт. 14). Пусть S будет точкой пересечения QQ' и RR', а T — основанием перпендикуляра, опущенного из S на QR. Соединим Q с R' и Q' с R; угол $QR'R$ = углу $QQ'R = 90°$, как вписанные углы, опирающиеся на диаметр.



Черт. 14.

Отрезки ST, QR' и RQ' являются, следовательно, тремя высотами треугольника SQR; но высоты треугольника проходят через одну точку, поэтому QR' и RQ' пересекают ST в одной и той же точке U. Сейчас легко узнать фигуру полного четырехсторонника: $Q'S, SR', R'U$ и UQ' — его стороны, а $Q'R'$, SU и QR — диагонали. Согласно предложению о полном четырехстороннике, совокупности точек $PQTR$ и $PQ'T'R'$, если точку пересечения $Q'R'$ и ST обозначить через T', будут гармоническими системами.

В этой фигуре $Q'R'$ есть совершенно произвольная секущая, проходящая через P. Напротив, точка T есть точка, однозначно определенная точкой P, а именно — четвертая гармоническая, сопряженная с P, точка диа-

[1]) О том, расположена ли точка R вправо или влево от точки F, можно судить потому, что если точка Q делит отрезок EF снаружи, то точка R должна делить его изнутри, и наоборот.

метра PQR; следовательно, и перпендикуляр из точки T к QR (назовем его p) однозначно определен точкой P. Отсюда следует: если произвольная секущая вращается вокруг P, то три точки U, T' и S остаются на неподвижной прямой p. Если секущая постепенно перейдет в касательную, то точки Q', R', S, T' и U все совпадут с точкой касания; значит, точки касания обеих касательных к окружности, проведенных из P, тоже расположены на прямой p; другими словами, прямая p содержит хорду, соединяющую точки касания этих обеих касательных.

[Если провести вторую секущую $PQ''R''$ (на чертеже не показано), то точка пересечения этой секущей с прямой p, которую мы обозначим через T'', есть четвертая гармоническая для точек P, Q'', R'', сопряженная с P. Если обозначить точку пересечения прямых $Q''Q'$ и $R''R'$ через S' и точку пересечения $R''Q'$ и $Q''R'$ через U', то из полного четырехсторонника $S'Q'U'R'$ выводим, что диагональ $S'U'$ должна пересечь вторую и третью диагональ, т. е. $PQ''R''$ и $PQ'R'$ в точках, которые явятся четвертыми гармоническими к точкам P, Q'', R'' на второй диагонали и к точкам P, Q', R' на третьей диагонали, сопряженными в обоих случаях с точкой P; т. е. $S'U'$ пройдет через точки T'' и T'. Но точки T'' и T' лежат на прямой p; следовательно, $S'U'$ совпадает с p][1].

Результаты вышеприведенных соображений можно выразить следующими предложениями. *Если через точку P, лежащую вне окружности, провести к окружности несколько секущих и обе касательные, то на одной и той же прямой p окажутся расположенными следующие точки:*

1) та точка секущей, которая дополняет до гармонической системы точки ее пересечения с окружностью и точку P, будучи сопряженной с точкой P (точки T, T', T'');

2) точки касания обеих касательных, исходящих из P;

[1]) Мы несколько изменили текст подлинника в интересах ясности.

3) точки пересечения диагоналей каждого четырехугольника, вершинами которого служат точки пересечения окружности с двумя секущими (U, U');

4) точка пересечения двух противоположных сторон этого четырехугольника, не проходящих через P (S и S').

Это предложение можно считать главным предложением теории поляр. Прямая p была позже названа Жергоннем*) полярой точки P по отношению к данной окружности; точка P называется по Сервуа**) полюсом прямой p.

Полученное предложение дает, между прочим, возможность выполнить построение касательных к окружности из данной точки с помощью одной линейки. Достаточно для этого провести две произвольные секущие PQR и $PQ'R'$; затем определить: 1) точку пересечения QR' и RQ' и 2) точку пересечения QQ' и RR'; прямая, соединяющая обе точки пересечения, есть поляра точки P и, следовательно, встречается с окружностью в точках касания искомых прямых. Это же предложение может быть также применено к построению четвертой гармонической точки (выполнение его предоставляется читателю).

Если точка P приближается к окружности, то точки касания касательных, проведенных из P, приближаются к ней по окружности; значит, хорда p, соединяющая точки касания, приближается к своему полюсу. Если P совпадает с какой-нибудь точкой окружности, то точки касания обеих касательных совпадают с этой точкой; хорда p становится касательной в точке P'. Поэтому полярой какой-нибудь точки окружности называют проходящую через нее касательную.

Представим себе, что через точку T проведены всевозможные секущие, и на каждой из них определена точка, которая образует с T и обеими точками пересечения секущей с окружностью гармоническую систему,

---

*) Gergonne, „Annales d. Math", III, 297, 1813.
**) Servois, Gergonnes, „Annales d. Math". I, 337, 1810.

будучи сопряженной с T. Все такие точки, как легко доказать, расположены на прямой, перпендикулярной к продолжению диаметра QTR в точке P [1]). Эта прямая называется полярой точки T.

Обоими последними определениями понятие поляры расширяется настолько, что для любой точки — находится ли она внутри, или вне, или на самой окружности — имется определенная прямая в качестве поляры [2]).

Еще одно важное замечание легко вытекает из черт. 14. Если возьмем на поляре p данной точки P любую точку T' внутри окружности, то P и T' гармонически делят секущую $PQ'R'$; поляра точки T' должна, следовательно, проходить через гармонически сопряженную с T' точку P. Затем из 4-й части главного предложения можно заключить (если P заменить точкой S), что поляра точки S, расположенной на p, но вне окружности, тоже проходит через P. Из всего этого вытекает предложение: *„если точка расположена на прямой p, то ее поляр проходит через полюс этой прямой“* [3])

Нас здесь, однако, интересует не дальнейшее развитие теории поляр в применении к окружности, а перенесение этой теории на конические сечения. Для этого нам нужно еще одно подготовительное соображение. Мы знаем, что перспективное изображение прямой g есть тоже прямая — g'; если на прямой g возьмем лю-

---

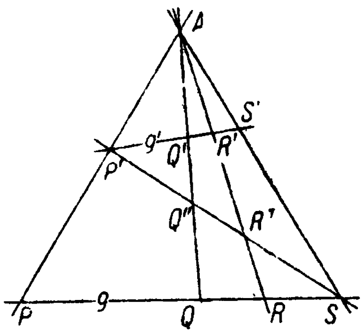
[1]) Предлагаем читателю доказать это с помощью следующего указания: если секущая, проходящая через T, пересекает окружность в точках Q', R', то QTR и $Q'TR'$ суть две диагонали полного четырехсторонника $Q'QR'R$; а QR' и $Q'R$ — две высоты треугольника SQR (точка S — точка пересечения QQ' и RR').

[2]) Точно так же к каждой прямой относится определенная точка в качестве полюса. Уяснить себе точно, что такое полюс и как его находить, если данная прямая: 1) пересекает окружность, 2) касается окружности, 3) лежит вне окружности.

[3]) Предлагаем читателю провести доказательство на новом чертеже, начав его так: если точка A лежит на прямой p, то секущая, проходящая через A и полюс прямой p, делится этими точками в гармоническом отношении. Следовательно, поляра точки A проходит через . . . . .Прямую p возьмите так, чтобы она: 1) пересекала окружность, 2) касалась ее, 3) лежала вне окружности. Точку A в первом случае следует взять: 1) внутри окружности, 2) на окружности и 3) вне ее.

бые четыре гармонические точки P, Q, R, S, то перспективным изображением их на прямой g' будут четыре точки P', Q', R', S' (черт. 15). Легко доказать, что эти четыре точки тоже расположены гармонически. Представим, что вспомогательная прямая $P'S$ пересекает AQ в Q'', а AR — в R''; стороны треугольника $Q''QS$ пересекаются тогда прямой AP в точках A, P', P, а прямой AR в точках A, R'', R. Двукратным применением предложения Менелая получим:

$$Q''A \cdot QP' \cdot SP = Q''P \cdot QA \cdot SP$$
$$Q''A \cdot QR \cdot SR'' = Q''R'' \cdot QA \cdot SR;$$



Черт. 15.

отсюда путем деления:

$$\frac{QP}{QR} \cdot \frac{SP'}{SR''} = \frac{Q''P'}{Q''R''} \cdot \frac{SP}{SR},$$

а так как мы приняли [1])

$$\frac{QP}{QR} = \frac{SP}{SR},$$

то, значит:

$$\frac{SP'}{SR''} = \frac{Q''P'}{Q''R''}.$$

Сразу видно, что это равенство определяет гармоническую систему $P'Q''$, R'', S. Если применить этот же прием к треугольнику $P'R'R''$ и к прямым AQ' и AS', то получим также

$$\frac{P'Q'}{P'S'} = \frac{R'Q'}{R'S'},$$

т. е. P', Q', R', S' суть четыре гармонические точки, что и требовалось доказать.

Лучи, идущие из какой-либо точки A к четырем гармоническим точкам P, Q, R, S, называются **гармоническими лучами**; g' есть произвольная прямая, пересекающая эти четыре гармонических луча. Результат можно выразить поэтому следующим кратким пред-

[1]) Точки P, R, Q, S — гармоническая система.

ложением: *четыре гармонических луча пересекаются любой прямой в гармонических точках.*

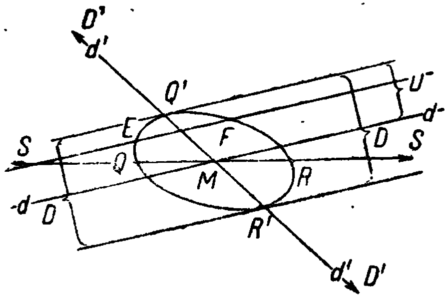
С этим предложением в руках мы обладаем всеми средствами для перенесения теории поляр с окружности на любое коническое сечение. Возьмем вне плоскости черт. 14 точку A и соединим ее с окружностью конической поверхностью; эта поверхность пересекается любой не проходящей через A плоскостью в по коническому сечению.

Точкам, расположенным в плоскости окружности на данной прямой, соответствуют в плоскости проекции тоже точки одной прямой; каждой гармонической системе четырех точек соответствует, по последнему предложению, тоже гармоническая система; каждой касательной к окружности — касательная к коническому сечению; точке касания на окружности — точка касания на коническом сечении. Следовательно: *главное предложение теории поляр может быть повторено слово в слово для любого конического сечения. Это относится и к дальнейшим предложениям упомянутой теории, поскольку они не опираются на специально метрические свойства окружности.* К таким непереносимым метрическим [1]) свойствам относится, например, перпендикулярность прямой p к диаметру QR.

---

[1]) Метрическими называются такие свойства, которые связаны с измерением, т. е. с длиной отрезка и величиной угла, например: перпендикулярность (прямой угол), параллельность (равные накрест лежащие углы), равенство фигур (равенство отрезков и углов), подобие (равенство углов, пропорциональность отрезков) и т. д. Наоборот, свойства положения связаны только с понятиями — прямая, точка, пересечение, принадлежность и т. п; например предложения: „две прямые пересекаются только в одной точке", „через одну точку можно провести сколько угодно прямых" и т. д. — выражают свойства положения. Все построения, при выполнении которых откладываются равные отрезки или углы, т. е. применяется циркуль — зависят от метрических свойств. Построения, выполняемые при помощи одной линейки, без циркуля, зависят только от свойства положения. Хотя гармоническая система нами определена метрически — с помощью отношения отрезков, — а гармонические свойства полного четырехсторонника доказаны с помощью метрической теоремы Менелая, но в предложении о гармоническом делении диагоналей полного четырехсторонника не входят никакие другие понятия, кроме понятий положения. Таким

Из общих предложений теории поляр можно вывести много частных свойств конических сечений. Каждая прямая в плоскости конического сечения — следовательно, и бесконечно удаленная прямая — имеет полюс; пусть полюсом бесконечно удаленной прямой будет M [1].



Черт. 16.

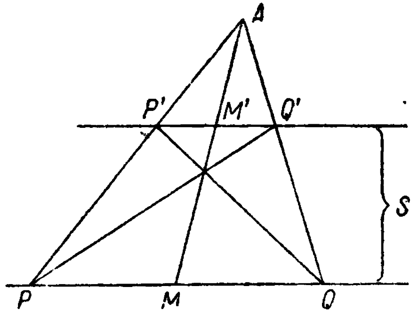
Проведем через M (черт. 16) произвольную секущую, которая пересечет коническое сечение в точках Q и R, а бесконечно удаленную прямую — в бесконечно удаленной точ-

образом гармонические свойства полного четырехсторонника суть свойства положения. Гармоническая система, как мы видели, может быть построена без применения циркуля, т. е. исходя только из свойств положения. Ниже читатель увидит, как можно обосновать все учение о гармонической системе без обращения к метрическим свойствам (см. главу о Штаудте). Читатель уже знает, что точки, расположенные на одной прямой, при проектировании изображаются тоже точками, расположенными на одной прямой; прямые, проходящие через одну точку, изображаются тоже прямыми, проходящими через одну точку; но равные отрезки и углы изображаются, вообще говоря, неравными отрезками и углами. Таким образом при проектировании сохраняются свойства положения, но не метрические свойства. Гармоническое расположение точек при проектировании сохраняется, но метрические свойства окружности — равенство радиусов, равенство центральных углов, опирающихся на равные дуги, и т. д. — не сохраняются. Окружность переходит в коническое сечение, которое имеет общие свойства с окружностью, но имеет и такие свойства, которые отличны от свойств окружности; к первым относятся свойства положения, ко вторым — метрические свойства. Главное предложение теории поляр сохраняется целиком, так как в нем речь идет только о точках, прямых и гармонической системе точек. Но, например, предложение, что поляра точки P перпендикулярна к диаметру, проходящему через P, не имеет места для конического сечения: перпендикулярность — это свойство метрическое (см. ниже главу о Понселе и особенно о Штаудте).

[1] Где полюс бесконечно удаленной прямой относительно окружности?

ке S. Согласно главному предложению теории поляр (пункт 1), точки S, Q, M, R суть четыре гармонических точки; точка S лежит в бесконечности; значит, сопряженная с ней точка M делит отрезок QR пополам [1]). Другими словами, она делит пополам каждую проходящую через нее хорду [2]). Благодаря этой особенности ее называют ц е н т р о м, а проходящие через нее хорды—д и а м е т р а м и конического сечения (диаметры эти, однако, между собой не равны, как у окружности [3]).

Поляры всех точек прямой p проходят через полюс P этой прямой; полярой каждой бесконечно удаленной точки D является прямая, проходящая через M, т. е. диаметр.



Черт. 17.

На этом диаметре d, согласно второму пункту главного предложения, должны быть расположены точки касания касательных к коническому сечению, проходящие через D. Так как эти касательные проходят через одну и ту же бесконечно удаленную точку D, то они параллельны. Отсюда вытекает предложение: „*через оба*

---

[1]) Определение гармонической системы точек, данное на стр 26—27 еряет смысл, если одна из точек системы — бесконечно удаленная. Однако и в этом случае можно говорить о гармонической системе, если точки удовлетворяют построению четвертой гармонической, данному на стр. 27. При этом прямые, проходящие через бесконечно удаленную точку, очевидно, параллельны. Построение четвертой гармонической M, сопряженной с бесконечно удаленной точкой S прямой PQ относительно точек P и Q, представлено на черт. 17. Легко доказать, что точка M занимает положение середины отрезка QP. Таким образом концы отрезка, его середина и бесконечно удаленная точка его прямой образуют гармоническую систему.

Предлагаем читателю дать другое доказательство, основываясь на черт. 17 и пользуясь подобием треугольников.

[2]) QMR — совершенно произвольная хорда, проходящая через M.

[3]) Рекомендуем читателю все разбираемые свойства конических сечений рассмотреть на чертежах для эллипса, параболы и гиперболы.

конца каждого диаметра проходят две параллельные касательные".

Через бесконечно удаленную точку D, кроме двух касательных, можно провести бесконечное множество секущих: все они, конечно, параллельны касательным. Пусть любая из них пересекает коническое сечение в точках E и F, а диаметр—в G; тогда, по 1-му пункту главного предложения, D, E, G, F—четыре гармонические точки, а так как D лежит в бесконечности, то G делит хорду EF пополам. Но EF есть произвольная хорда, параллельная обеим касательным, а G точка пересечения ее с диаметром; отсюда предложение: „*каждый диаметр делит пополам хорды, параллельные касательным, проведенным через его концы*".

Между всеми этими параллельными хордами есть одна, проходящая через M, т. е. диаметр d'. Где полюс этого диаметра? Этот полюс D', во всяком случае, как и полюс каждого диаметра, лежит в бесконечности; но d' принадлежит к числу проходящих через D хорд. По одному из предложений теории поляр (см. стр. 31), ее полюс D' должен лежать на поляре точки D, т. е. на диаметре d. Оба диаметра d и d' находятся, значит, в таком отношении, что каждый из них имеет полюсом бесконечно удаленную точку другого; такие диаметры называются сопряженными. Ко второму диаметру d' тоже относится упомянутое предложение, что он делит пополам хорды, параллельные касательным, проведенным через его конечные точки. Направление этих касательных легко определить; они пересекаются в полосе прямой d' (главное предложение, пункт 2-й), т. е. в бесконечно удаленной точке D', лежащей на диаметре d. Значит d' делит пополам хорды, параллельные d; отсюда предложение: „*каждый диаметр делит пополам хорды, параллельные сопряженному с ним диаметру*" *).

Этим выводом из общих предложений мы закончим изложение теории поляр по Дезаргу.

*) Где расположен центр и как проходят диаметры у параболы, т. е. у конического сечения, касающегося бесконечно удаленной прямой?

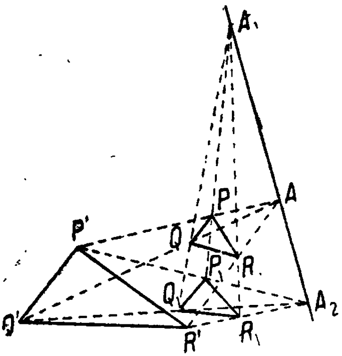
Много новых предложений и плодотворных начинаний дал Дезарг в своем „Brouillon project". Только важнейшие из них можно было изложить или упомянуть в этом сжатом обзоре*). Но, надеюсь, что и эти обломки дают представление о богатстве произведения Дезарга. И какая необыкновенная судьба у этой книги! Лишь немногие современники могли ее оценить, между ними, разумеется, такие люди, как Декарт, Паскаль и Лейбниц. Но скоро она была забыта; все экземпляры ее, напечатанные, вероятно, в небольшом количестве, затерялись и лишь счастливый случай помог Шалю, знаменитому французскому геометру, найти в 1845 г. у одного парижского книгопродавца список этого произведения, сделанный геометром де-ла Гиром (De la Hire) в 1679 г. Лишь во второй половине прошлого столетия Дезарг постепенно приобрел то уважение геометров, которого заслуживает его гениальное творчество. Объяснение тому, что при жизни его книга была так мало распространена, лежит частью в устремлении интересов эпохи на новооткрытый метод аналитической геометрии, частью, однако, в изложении Дезарга — неясном, отрывочном, изобилующем новыми выражениями. Недаром заслуженный издатель трудов Дезарга предпосылает книге „Brouillon project" на четырех страницах „словарь терминов, употребляемых Дезаргом в этой книге".

Мы не можем расстаться с Дезаргом, не упомянув того предложения, которое известно в новой геометрии просто как „предложение Дезарга" и которым мы скоро займемся при обзоре дальнейшего развития этой отрасли науки в Германии. Это предложение сохранилось для потомства в учебнике перспективы, опубликованном в 1648 г. учеником и помощником Дезарга Абрагамом Боссе (Abraham Bosse).

Треугольник PQR (черт. 18), лежащий в плоскости π, перспективно отображается в плоскости проекции ε вторым треугольником $P'Q'R'$. Лучи зрения PP', QQ'

*) К сожалению, за недостатком места, приходится отказаться от изложения теории инволюции Дезарга.

и RR' пересекаются в глазу A. Прямая изображения $P'Q'$ расположена в плоскости AQP, проектирующей прямую PQ; прямые одной и той же плоскости пересекаются; значит, PQ и $P'Q'$ пересекаются в точке R''. Точно так же QR и $Q'R'$ пересекаются в точке P'' и RP и $R'P'$ в точке Q''. Три точки P'', Q'', R'' (на чертеже не показаны) расположены: 1) на сторонах треугольника PQR—значит, в плоскости π, и 2) на сторонах треугольника $P'Q'R'$—значит, в плоскости ε. Следовательно, они расположены на одной прямой—на прямой пересечения π и ε. Отсюда предложение: *„если два треугольника PQR и $P'Q'R'$ расположены в двух различных плоскостях таким образом, что при некотором взаимном соответствии их вершин прямые, соединяющие соответственные вершины (PP', QQ', RR'), проходят через одну точку (A), то точки пересечения (P'', Q'', R'') соответственных сторон лежат на одной прямой.*



Черт. 18.

Это предложение обратимо. Если оба треугольника расположены таким образом, что стороны их (QR и $Q'R'$, RP и $R'P'$, PQ и $P'Q'$) попарно пересекаются в трех точках (P'', Q'', R''), лежащих на одной прямой, то, очевидно QR и $Q'R$, лежат в одной плоскости α, RP, $R'P'$—в плоскости β и PQ, $P'Q'$—в плоскости γ; эти три плоскости (α, β, γ) должны пересечься в одной точке A. Тотчас видно, что точки P и P' лежат в обеих плоскостях β и γ,—значит, на линии их пересечения; точно так же Q и Q'—на линии пересечения плоскостей α и γ, а R и R'—на линии пересечения плоскостей α и β. Так как эти прямые пересечения сходятся в A, то прямые PP', QQ', RR' пересекаются в одной и той же точке *).

*) Точки и прямые этой фигуры суть все точки и прямые пересечения пяти плоскостей (π, ε, α, β, γ).

Представим себе теперь, что треугольник PQR еще раз перспективно отображен на плоскость ε из другого центра („глаза") A_1. Тогда в плоскости ε появится другой перспективный треугольник $P_1Q_1R_1$; в каком отношении находятся оба треугольника $P'Q'R'$ и $P_1Q_1R_1$ плоскости ε (черт. 18). Так как при перспективном отображении 1) три точки, расположенные на одной прямой, изображаются тремя точками одной прямой и так как 2) прямые, проходящие через одну точку, изображаются тоже прямыми, проходящими через одну точку, то тотчас можно заключить, что: 1) $P'Q'$ с P_1Q_1, $Q'R'$ с Q_1R_1, $R'P'$ с R_1P_1 пересекаются в трех точках одной прямой и 2) $P'P_1$, $Q'Q_1$ и $R'R_1$ проходят через одну точку A_2 [1]).

Вместо изложенного можно применить другой метод: возьмем треугольник $P'Q'R'$ и $P_1Q_1R_1$ плоскости ε, у которых прямые $P'P_1$, $Q'Q_1$ и $R'R_1$ проходят через одну и ту же точку A_2, и соединим эти треугольники с двумя точками A и A_1, лежащими вне ε на прямой, проходящей через A_2; тогда легко будет восстановить фигуру (черт. 18) и доказать этим, что соответственные стороны обоих треугольников пересекаются в трех точках одной прямой. Таким же образом можно доказать обратное, — что если соответственные стороны пересекаются на одной прямой, то прямые, соединяющие соответственные вершины, проходят через одну точку.

Мы получим, таким образом, известное предложение Дезарга: „*Если два треугольника $P'Q'R'$ и $P_1Q_1R_1$ лежат в одной плоскости так, что прямые, соединяющие соответственные вершины P' и P_1, Q' и Q_1, R' и R_1, проходят через одну точку, то точки пересечения соответственных сторон $P'Q'$ и P_1Q_1, $Q'R'$ и Q_1R_1, $P'R'$ и P_1R_1 лежат на одной, прямой и обратно.*

[1]) Таким образом два треугольника $P'Q'R'$ и $P_1Q_1R_1$ одной плоскости ε расположены так, что: 1) соответственные стороны их пересекаются в трех точках, расположенных на одной прямой, и 2) три прямые, соединяющие соответственные вершины, пересекаются в одной точке A_2. Можно доказать, что всегда, если два треугольника расположены так, что соблюдено условие 2-е, то непременно будет соблюдено условие 1-е, и наоборот. Предлагаем читателю проделать это методом, указанным ниже в тексте.

Два треугольника, расположенные так, как описано в этом двойном предложении, называются **перспективными** треугольниками. Точка пересечения прямых, соединяющих соответственные вершины, называется **центром**, а прямая, по которой пересекаются соответственные стороны,—**осью перспективы**.

В качестве приложения теоремы Дезарга докажем известное предложение, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке. Пусть A_m — середина стороны BC, B_m — середина AC и C_m — середина AB в треугольнике ABC. Точки пересечения прямых AB и $A_m B_m$, BC и $B_m C_m$, CA и $C_m A_m$ лежат на одной прямой, а именно — на бесконечно удаленной прямой плоскости [1]). Таким образом треугольник ABC и $A_m B_m C_m$ перспективны [2]), и прямые AA_m, BB_m, CC_m проходят через одну точку.

Необходимо подчеркнуть, что доказательство предложения Дезарга не нуждается в средствах „**метрической**“ геометрии, т. е. в измерении или сравнении отрезков и углов. Оно может быть проведено исключительно с помощью „геометрии положения“. В доказательстве идет речь только о точках, лежащих на одной прямой, о прямых, лежащих в одной плоскости или проходящих через одну точку [3]), т. е. о чистых **понятиях положения**. К этому замечанию мы позже вернемся.

---

[1]) Эти прямые попарно параллельны.

[2]) Ось перспективы — бесконечно удаленная прямая плоскости.

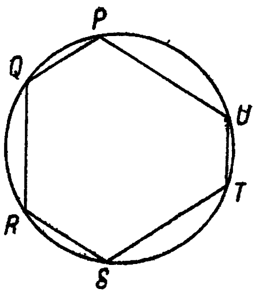
[3]) Хотя в самом предложении Дезарга говорится только о точках и прямых одной плоскости, но доказательство основано на введении точек и прямых пространства, т. е. не лежащих в данной плоскости. Дать доказательство этого замечательного предложения, основанное только на свойствах положения, не выходя за пределы плоскости, невозможно, как это показали Гильберт и Клейн. См. Hilbert, Grundlagen der Geometrie (имеется русский перевод, изд. „Сеятель“, Петроград).

II. ПАСКАЛЬ.

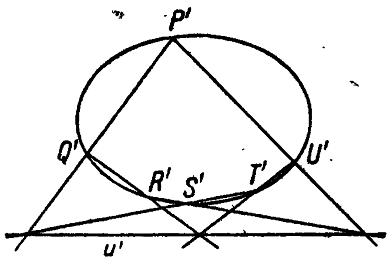
К тем математикам, которые с одушевлением приняли и развили дальнейшее учение Дезарга о конических сечениях, относится прежде всего юный Паскаль. Блэз Паскаль (Blaise Pascal, 1623—1662) шестнадцати лет от роду писал свой „Опыт о конических сечениях" („Essai pour les coniques"), в котором он скромно указывает, что тем немногим, что он открыл в теории конических сечений, он обязан сочинениям Дезарга, и что он, насколько сумел, пытался подражать методу Дезарга. К этому „немногому, что он открыл", относится не более и не менее, как основное предложение теории конических сечений, которого одного было бы достаточно, чтобы обессмертить имя Паскаля. Всякий, хотя бы поверхностно занимавшийся учением о конических сечениях, знает предложение Паскаля. При доказательстве его Паскаль следовал методу Дезарга, т. е. сперва доказал правильность своего предложения для окружности, а затем посредством центральной перспективы — для любого конического сечения.

Простейший случай предложения Паскаля имеет место, когда в окружность вписан правильный шестиугольник $PQRSTU$. Легко понять, что две противоположные стороны его, например PQ и ST, параллельны между собой, таким образом точки пересечения трех пар противоположных сторон — PQ и ST, QR и TU, RS и UP — лежат на бесконечно удаленной прямой плоскости. Мы получим несколько иную фигуру, если откажемся от равенства сторон, но сохраним их параллельность. Возьмем, например, на окружности произвольные точки P и S (черт. 19), проведем $PQ \parallel ST$ и $QR \parallel TU$ и соединим точку R с S и U с P. Прямая RS, конечно, параллельна UP (нетрудное доказательство этого предоставим читателю). Ясно, что и в этом случае точки пересечения противоположных сторон лежат на бесконечно удаленной прямой u плоскости окружности *).

Если теперь какую-нибудь точку A, лежащую вне плоскости $\varkappa$ данного круга, соединить с окружностью и вписанным в нее шестиугольником и пересечь образованный таким образом конус (и вписанную в него шестигранную пирамиду) произвольной плоскостью, не параллельной плоскости $\varkappa$, то в сечении получится некоторое коническое сечение со вписанным в него шестиугольником $P'Q'R'S'T'U'$ (черт. 20). Перспективным изображением бесконечно удаленной прямой и будет та прямая u', по которой плоскость изображения пересечется с пло-



Черт. 19.



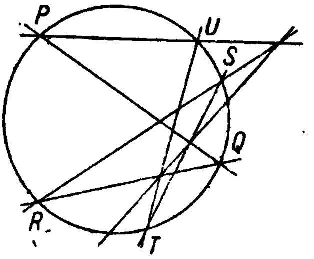
Черт. 20.

скостью, проходящей через A параллельно $\varkappa$. На этой прямой u' лежат точки пересечения противоположных сторон шестиугольника $P'Q'R'S'T'U'$.

Обобщим сейчас несколько понятие о шестиугольнике. Мы понимаем под шестиугольником не часть плоскости, ограниченную шестью прямолинейными отрезками, как это делается в элементарной геометрии, а некоторую фигуру, состоящую из шести прямых, которая получается, если шесть произвольно расположенных в одной плоскости точек P, Q, R, S, T, U соеди-

*) При этом обобщении известное свойство правильного шестиугольника, что его главные диагонали пересекаются в одной точке, очевидно, не сохраняется.

нить в вышеуказанном порядке прямыми PQ, QR, RS, ST, TU, UP (черт. 21). При этом может случиться, что некоторые из соединяющих эти точки прямых пересекутся между собой. Прямые PQ и ST, QR и TU, RS и UP попарно называются противоположными сторонами шестиугольника[1]). Если эти шесть точек лежат на окружности в любом порядке, то можно доказать, как это сделал Паскаль многократным применением теоремы Менелая[2]), что точки попарного пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой. Это общее предложение содержит в себе вышеупомянутые частные случаи вписанных в окружность шестиугольников с параллельными сторонами. В общем предложении речь идет только о проективных отношениях, которые можно перенести на любое коническое сечение посредством центральной перспективы. Таким образом получается общее предложение Паскаля: *„точки пересечения противоположных сторон вписанного в коническое сечение шестиугольника лежат на одной прямой"*.



Черт. 21.

Это предложение имеет разнообразнейшие применения; можно, исходя из него, развить все учение о конических сечениях. Допустим, например, что даны пять точек P, Q, R, S, T конического сечения; обозначим

---

[1]) Чтобы без труда найти противоположные стороны, поступают так: перенумеровывают вершины шестиугольника в том порядке, в каком они соединены прямыми; при этом противоположные вершины, как и в правильном шестиугольнике, обозначаются порядковыми номерами, разнящимися на 3, например 1 и 4, 5 и 2. Стороны, соединяющие пары противоположных вершин, будут противоположными сторонами, например сторона, соединяющая 1-ю и 2-ю вершины, противоположна стороне, соединяющей 4-ю и 5-ю.

[2]) Конечно, одного только многократного применения предложения Менелая недостаточно, так как в том случае не были бы приняты во внимание свойства окружности и вообще конического сечения. Доказательство предложения Паскаля читатель найдет в прибавлении I.

некоторую шестую точку этого сечения через U; тогда должно иметь место соотношение, выражаемое следующей схемой:

$$\left.\begin{array}{l}(PQ,\ ST)=V\\(QR,\ TU)=W\\(RS,\ UP)=X\end{array}\right\}p.$$

Это означает: точки V, W, X, в которых пересекаются попарно прямые, поставленные в скобки, лежат на одной прямой p — прямой Паскаля. В рассматриваемом случае точка V, очевидно, вполне определена, как точка пересечения данных прямых PQ и ST; не то с двумя другими точками: W и X. Мы знаем только, что они лежат на прямой p, проходящей через V. Если мы возьмем произвольно такую прямую p, то точка W тотчас будет определена как точка пересечения QR и p, а точка X — как точка пересечения RS и p. Недостающие прямые TU и UP получим, соединив T с W и P с X; точка пересечения этих прямых есть, очевидно, шестая точка конического сечения U*)[1]. В этом построении p есть произвольная прямая, проходящая через V. Заменим ее другой прямой p', проходящей через V; тогда изменятся точки W и X и тем самым точка U. Если p пробегает весь пучок лучей[2]) с вершиной V, то U пробегает все коническое сечение, проходящие через пять данных точек. Таким образом *коническое сечение вполне определяется пятью точками*[3]).

---

*) Читатель не преминет выполнить это, а также и следующие построения несколько раз при разных положениях заданных частей.

[1]) Построенная таким образом точка U есть шестая вершина шестиугольника Паскаля $PQRSTU$, т. е такого шестиугольника, противоположные стороны которого пересекаются в трех точках одной прямой p. Читатель легко докажет, основываясь на предложении Паскаля, что если пять вершин P, Q, R, S и T шестиугольника Паскаля лежат на некотором коническом сечении, то и шестая вершина его U лежит на том же коническом сечении.

[2]) Пучком лучей называют совокупность лучей, проходящих через одну и ту же точку — вершину или центр пучка (и лежащих в одной и той же плоскости).

[3]) Но этим еще не доказано, что любые пять точек определяют коническое сечение, так как если бы через пять точек P, Q, R, S и T нельзя было провести коническое сечение, то шестиугольник $PQRSTU$,

Будет ли коническое сечение эллипсом, параболой или гиперболой — зависит от расположения пяти данных точек.

Если одна из шести точек, например U, совпадает с соседней точкой, например T, то сторона шестиугольника TU — секущая конического сечения — переходит в касательную к нему в точке T, а шестиугольник превращается в пятиугольник. Схема, в которой U заменено через T, принимает следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}(PQ,\ ST)&=V\\(QR,\ TT)&=W\\(RS,\ TP)&=X\end{aligned}\right\}p.$$

Символ TT обозначает касательную, полученную из секущей TU. Если снова принять за данные пять точек P, Q, R, S, T, то на этот раз получим, вместо некоторой шестой точки, касательную в точке T. Так как в последней строке схемы неизвестная точка U заменена известной T, то обе точки V и X, а тем самым и прямая Паскаля p, определены; p пересекает QR в W, а прямая WT есть искомая касательная в точке T. Точно так же можно построить касательные в других данных точках.

Можно, наоборот, принять за данные четыре точки конического сечения и касательную, проходящую через одну из них, и построить произвольную пятую точку конического сечения. Пусть, например, даны четыре точки P, Q, R, S и касательная в точке P, которую можно рассматривать как прямую, соединяющую две

будучи шестиугольником Паскаля (см. прим. [1]) на стр. 44), тем не менее не был бы вписанным в коническое сечение. Это действительно имеет место, если, например, три из пяти заданных точек лежат на одной прямой. Можно, однако, доказать предложение, обратное предложению Паскаля: *„если противоположные стороны шестиугольника пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой, то вокруг шестиугольника можно описать коническое сечение, если только никакие три из его вершин не лежат на одной прямой"*. Отсюда, между прочим, следует, что всякие пять точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой, определяют коническое сечение (эллипс, гиперболу или параболу).

совпадающие в P вершины шестиугольника. Если искомая точка есть T, то шестиугольник можно обозначить символом: $PPQRST$, и по этому схема построения выразится так:

$$\left.\begin{aligned}(PP,\ RS) &= V\\ (PQ,\ ST) &= W\\ (QR,\ TP) &= X\end{aligned}\right\} p.$$

Точка V определена как точка пересечения касательной PP и секущей RS; дальнейшее рассуждение, по образцу первого построения, предоставим читателю.

Если в шестиугольнике $PQRSTU$ точка R совпадает с Q и U с T, — шестиугольник превращается в четырехугольник, и противоположные стороны шестиугольника QR и TU превращаются в касательные, проходящие через вершины четырехугольника Q и T. Предложение Паскаля приводит тем самым к важному следствию: *касательные, построенные в двух противоположных вершинах вписанного четырехугольника, пересекаются в точке, лежащей на прямой, которая соединяет точки попарного пересечения противоположных сторон четырехугольника.* Ясно, что стороны четырехугольника $PQST$ и касательные в противоположных вершинах P и S также образуют частный случай шестиугольника Паскаля. Поэтому точка пересечения касательных, проходящих через точки P и S, лежит на упомянутой прямой. Четыре касательные в точках P, Q, R и S образуют описанный вокруг конического сечения четырехугольник. Таким образом получаем предложение: *„точки пересечения противоположных сторон вписанного четырехугольника лежат на одной прямой с точками пересечения противоположных сторон такого описанного четырехугольника, стороны которого проходят через вершины вписанного“.*

Чтобы показать, к каким интересным следствиям легко приводит предложение Паскаля, примем, что вписанный четырехугольник $PQST$ есть параллелограм [1]).

[1]) Так как через любые пять точек можно провести коническое сечение, то вписанным пяти- или четырехугольником может быть любой пяти- или четырехугольник.

Точки пересечения его противоположных сторон лежат на бесконечно удаленной прямой; на той же прямой должны лежать точки пересечения противоположных сторон описанного четырехугольника [1]). Отсюда следует: *касательные в вершинах вписанного параллелограма образуют описанный параллелограм.*

Но можно итти еще дальше. Если в шестиугольнике $PQRSTU$ совпадают Q с P, S с R и U с T, то он состоит из вписанного треугольника PRT, и место сторон шестиугольника PQ, RS и TU заступают касательные PP, RR и TT. В этом случае из предложения Паскаля следует: *касательные, построенные в вершинах вписанного треугольника, пересекают его противоположные стороны в трех точках одной прямой.*

Выведенные для четырехугольника и треугольника следствия могут быть использованы для того, чтобы по трем точкам и двум проходящим через них касательным найти другие точки конического сечения или касательную в третьей точке. Если, например, даны три точки P, Q, T, и касательные в Q и T, то, обозначая искомую точку через S, составим схему шестиугольника $PQQSTT$:

$$\left.\begin{aligned}(PQ,\ ST)&=V\\(QQ,\ TT)&=W\\(QS,\ TP)&=X\end{aligned}\right\}p.$$

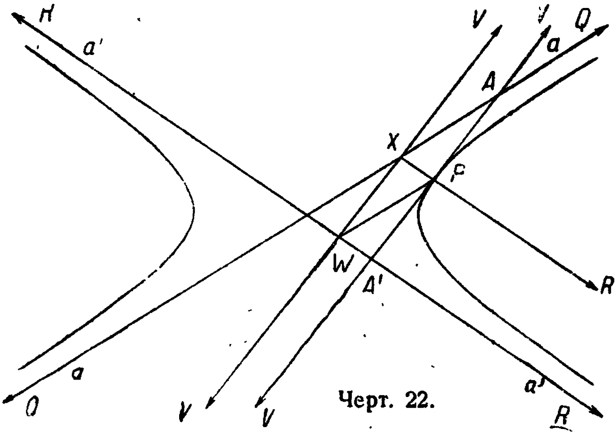
Точка W определена как точка пересечения данных касательных. Произвольная прямая p, проходящая через W, пересекает PQ в V и TP в X; прямые TV и QX пересекаются в искомой точке S. Поворачивая прямую p, можно найти сколько угодно других точек конического сечения. Если нужно найти касательную в точке P, то составляем схему построения для шестиугольника $PPQQTT$.

Эти построения показывают, что *коническое сечение определяется не только пятью точками, но также*

[1]) Стороны которого проходят через вершины вписанного параллелограма.

четырьмя точками и касательной в одной из них или тремя точками и касательными в двух из них.

Очень интересные особые случаи получаются при введении бесконечно удаленных элементов, например, бесконечно удалённой касательной и бесконечной удаленной точки параболы. Еще многообразней, чем у параболы, будут построения и вытекающие из них следствия у гиперболы с ее двумя бесконечно удаленными точками и проходящими через них касательными — асимптотами. Если дана асимптота, то тем самым определена одна точка гиперболы, а именно — одна из ее



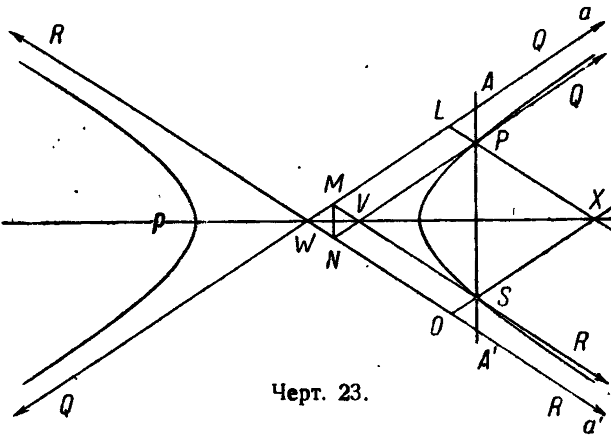
Черт. 22.

бесконечно удаленных точек. Поэтому можно поставить задачу: по обеим асимптотам и по одной точке гиперболы найти касательную в этой точке или другую точку гиперболы. Пусть a и a' будут данные асимптоты, Q и R — их бесконечно удаленные точки и P — конечная точка [1]) гиперболы (черт. 22). Тогда, если отыскивается касательная в точке P, можно воспользоваться схемой шестиугольника $PPQQRR$:

$$\left.\begin{aligned}(PP,\ QR) &= V\\ (PQ,\ RR) &= W\\ (QQ,\ RP) &= X\end{aligned}\right\} p.$$

[1]) То-есть не бесконечно удаленная.

Прямые QQ и RR — касательные с точками касания Q и R, т. е. асимптоты a и a'; QR есть бесконечно удаленная прямая плоскости. Построение выполняется следующим образом: PQ, — т. е. прямая, проходящая через P параллельно a, — пересекает $RR = a'$ в точке W; RP — т. е., прямая, проходящая через P параллельно a', — пересекает $QQ = a$ в точке X; прямая $p = WX$ пересекает QR, т. е. бесконечно удаленную прямую в точке V. Точка V есть, таким образом, бесконечно удаленная точка прямой p, прямая VP, проходящая через P параллельно p, есть искомая касательная.



Черт. 23.

Чертеж дает важное свойство гиперболы: если A и A' суть точки пересечения найденной касательной с асимптотами a и a', то $XWA'P$ и $XWPA$ будут параллелограмами с общей стороной XW: поэтому $A'P = XW$ и $PA = XW$ и, следовательно, $A'P = PA$. Таким образом получаем предложение: *„лежащий между асимптотами отрезок касательной делится пополам в точке касания"*.

Если нужно найти вместо касательной в точке P другую точку гиперболы S (черт. 23), то шестиугольником служит $PQQSRR$, и схема имеет вид:

$$\left.\begin{array}{r}(PQ,\ SR) = V \\ (QQ,\ RR) = W \\ (QS,\ RP) = X\end{array}\right\} p.$$

Вторая строка схемы показывает, что W есть точка пересечения асимптот a и a'.

Проведем через W произвольную прямую p; прямая, проходящая через P параллельно a, пересекает p в точке V; прямая, проходящая через P параллельно a', пересекает p в X. Прямые, проходящие через V параллельно a' и через X параллельно a, пересекаются в искомой точке S.

Из этого построения можно вывести замечательное свойство гиперболы: если продолжить стороны параллелограма $PXSV$ до пересечения с асимптотами в точках L, M, N, O, то, на основании известной теоремы из учения о равновеликости, фигуры $LPVM = VSON$, и поэтому также $LPNW = MSOW$. Итак, имеем предложение: *„прямые, проведенные из какой-либо точки гиперболы параллельно асимптотам, ограничивают вместе с последними параллелограм, с постоянной (т. е. с одной и той же для двух различных точек гиперболы) площадью“*.

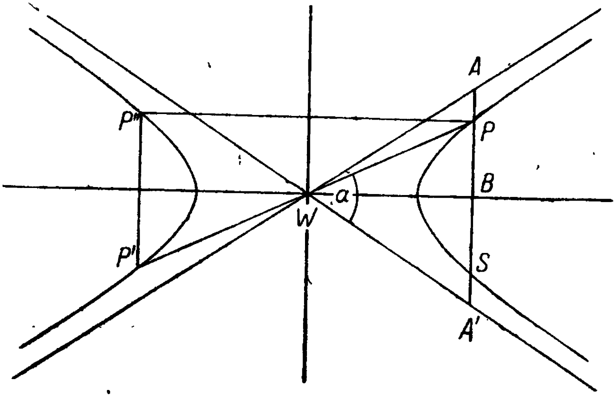
Из подобия треугольников WMN и VPS, (что легко доказать), имеем $PS \parallel MN$; если продолжение PS пересекает асимптоты в точках A и A', то треугольники WMN, LAP, $OA'S$ не только подобны, но и равны; поэтому $AP = SA'$. Прямая PS есть секущая гиперболы, которая пересекает кривую в точках P и S. Этот результат можно выразить следующим предложением: *„оба отрезка секущей, заключенные между гиперболой и ее асимптотами, равны между собой.*

Из этого предложения следует значительно более простое решение задачи о нахождении точек гиперболы по асимптотам и одной данной точке. Проводим через P какую-нибудь прямую, которая пересекает асимптоты в точках A и A', и откладываем на этой прямой от точки A' в направлении, противоположном AP, отрезок равный AP. Конец S этого отрезка есть точка гиперболы. Если проходящая через P секущая AA' пробегает весь пучок лучей с вершиной P, то точка S пробегает всю гиперболу *).

*) Где лежит S, если AA' параллельна асимптоте? Как нужно провести AA', если P и S принадлежат разным ветвям гиперболы?

Если проходящая через P секущая совпадает с прямой PW, то точки A и A' соединяются в точке W, и равенство $AP=SA'$ принимает форму $WP=SW$; точка W делит, таким образом, пополам отрезок PS. Но P есть совершенно произвольная точка гиперболы, а WP есть, таким образом, произвольная секущая, проходящая через W. Следовательно, точка пересечения асимптот делит пополам каждую проходящую чрез нее секущую. Если мы вспомним следствие, выведенное из теории поляр, то тотчас же поймем, что точка пересечения асимптот есть центр гиперболы. Это можно также легко вывести непосредственно из главного предложения теории поляр. Согласно 2-му пункту его, полярой какой-либо точки является прямая, соединяющая точки касания исходящих из нее касательных. Прямая, соединяющая точки касания исходящих из W касательных, т. е асимптот a и a', есть QR, т. е. бесконечно удаленная прямая. Полюс бесконечно удаленной прямой есть центр конического сечения; следовательно, точка W есть центр гиперболы.

Из нашего построения следует еще одно важное свойство гиперболы. Делим пополам угол между асимптотами α и проводим через P секущую AA', перпендикулярную к биссектрисе угла α (черт. 24). Если AA' пересекает биссектрису в точке B, а гиперболу в точке S, то $AB=A'B$ и $AP=A'S$; отсюда посредством вычитания получается $PB=SB$. *Две точки, расположенные по разные стороны некоторой прямой таким образом, что соединяющий их отрезок перпендикулярен к этой прямой и делится ею пополам, называются симметричными относительно этой прямой;* сама прямая называется осью симметрии обеих точек. С помощью этих выражений мы можем сказать: *каждая точка гиперболы лежит симметрично с другой определенной ее точкой относительно биссектрисы угла между асимптотами.* Поэтому указанная биссектриса называется осью гиперболы. Можно легко показать, что гипербола имеет еще вторую ось. Строим на продолжении PW за точку W точку гиперболы P' и симметричную ей относительно первой оси точку P''. Легкое размышление дает, что отрезок PP'' перпендикулярен к биссектрисе смежного с α угла (которая, как известно, образует с биссектрисой угла α прямой угол) и делится ею пополам. Таким образом второй осью гиперболы является биссектриса смежного с α угла. Легко заметить, что обе оси являются сопряженными диаметрами, так как параллельная первой оси секущая PP'' делится второй осью пополам.



Черт. 24.

Ближашее иследование сопряженных диаметров эллипса (от которого мы здесь отказываемся) показывает, что и среди них есть одна пара взаимно перпендикулярных. Так как хорды, которые делятся пополам одним из этих диаметров, параллельны другому и тем самым перпендикулярны к первому, то оба эти диаметра являются осями симметрии эллипса, или, короче, осями эллипса. У параболы имеется только одна ось *).

*) Выведенные в этой книге из теории поляр и предложения Паскаля свойства конических сечений образуют часть так называемой элементарной теории конических сечений и могут быть легко развиты чисто элементарно-геометрическим путем. Читателям, которые интересуются этой отраслью элементарной геометрии, нужно особенно указать на „Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung“, von Jacob Steiner (Leipzig 1867). Из большого числа школьных обработок этого произведения следует упомянуть: 1) W. Erler, Die Elemente der Kegelschnitte (Leipzig 1911); 2) Lange, Sinthetische Ceometrie der Kegelschnitte (Berlin 1908).

III. ПОНСЕЛЕ.

Идея Дезарга — перенести свойство окружности на любое коническое сечение посредством центральной перспективы — спустя двести лет была положена Понселе (J.-V. Poncelet, 1788—1867), в более общем виде, в основу новой геометрии. Название „проективная геометрия", которое мы уже часто употребляли для обозначения этой новой отрасли геометрии, восходит к главному произведению Понселе „Исследование проективных свойств фигур". Понселе, как и Дезарг, был человеком техники; в качестве военного инженера он проделал наполеоновский поход в Россию, попал в плен и записал за время плена в Саратове основные идеи вышеупомянутого произведения, которое он опубликовал в 1822 г. в значительно переработанном и расширенном виде. Что такое проективные свойства фигур? Понселе понимает под этим *такие свойства, которые сохраняются при отображении посредством центральной перспективы*. Можно также сказать: *проективны такие свойства, которые общи отображаемому образу и его перспективному изображению.*

К проективным свойствам конических сечений, например, принадлежит (если основываться на только что пройденном) предложение Паскаля; проективны общие предложения о полюсе и поляре; проективно далее свойство четырех точек одной прямой, образующих гармоническую систему, так как четырем гармоническим точкам прямой g соответствуют, как это было выше доказано, четыре гармонические точки отображающей ее прямой g'. Но не проективно, например, деление отрезка на части в определенном отношении, так как отображенные части отрезка находится, вообще, в другом отношении, чем таковые основного образа.

Не проективна, далее, величина угла, так как только в особых случаях угол на отображении равен углу основного образа.

Понселе первый понял большое и богатое следствиями значение различия между **проективными** и **непроективными** свойствами и построил систематически **проективную геометрию**.

Однако имя Понселе должно быть здесь упомянуто еще на другом основании и как раз в связи с именем Жергонння (Gergonnes), его земляка и научного противника. Оба долгие годы с большой враждой и раздражением боролись из-за первенства в открытии важного основного предложения проективной геометрии — **закона взаимности** или **двойственности**. Частности этого спора здесь нас не интересуют: мы радуемся прекрасному открытию и остаемся равнодушными к тому, кому из обоих спорящих принадлежит в этом открытии львиная доля.

Закон взаимности примыкает к теории поляр. Каждой точке в плоскости какого-либо конического сечения отвечает некоторая прямая, в качестве ее поляры. Для каждой фигуры этой плоскости, состоящей из прямых и точек, можно построить вторую фигуру, в которой место каждой точки первой фигуры занимает ее поляра и место каждой прямой — ее полюс. Две находящиеся в таком отношении фигуры мы назовем **взаимно полярными**, или, короче, просто **взаимными**. Предложения теории поляр позволяют по известному свойству одной фигуры заключить об определенном свойстве другой.

Поляры всех точек одной прямой проходят, как известно, через одну точку, а именно — через полюс этой прямой. Таким образом тем точкам одной фигуры, которые лежат на одной прямой, соответствуют на другой такие прямые, которые пересекаются в одной точке. Прямой, соединяющей две точки одной фигуры, отвечает точка пересечения соответственных прямых другой фигуры. Треугольнику *ABC* одной фигуры отвечает на другой трехсторонник (т. е. совокупность трех прямых с тремя точками их пересечения) *abc*;

сторонам треугольника соответствуют вершины трехсторонника. Если, например, первая фигура состоит из двух треугольников PQR и $P'Q'R'$, расположенных таким образом, что PP', QQ' и RR' проходят через одну точку A, то взаимная фигура образуется двумя трехсторонниками pqr и $p'q'r'$, расположенными таким образом, что точки пересечения pp', qq', rr' принадлежат одной прямой a. Согласно первой части предложения Дезарга, точки пересечения соответственных сторон обоих треугольников первой фигуры лежат на одной прямой. На основании закона взаимности мы заключаем отсюда, что на второй фигуре прямые, соединяющие соответственные вершины, проходят через одну точку. Таким образом вторая часть (т. е. обратная первой) двойного предложения Дезарга о перспективных треугольниках может быть установлена без особого доказательства на основании закона взаимности. Скоро мы применим взаимное перенесение к другому важному предложению.

Вышеприведенный пример уже достаточно показывает большую пользу закона взаимности. Из каждого предложения, основанного на отношениях положения между точками и прямыми, можно тотчас же, без доказательства, вывести другое, в котором точки и прямые известным образом обмениваются ролями. При этом нужно только фигуру, к которой относится данное предложение, преобразовать с помощью какого-либо конического сечения во взаимно полярную. Все содержание проективной геометрии на плоскости можно, согласно предыдущему, выразить на двух разных языках. Слово „точка" первого языка означает „прямая" на втором; слово „прямая" на первом означает „точка" на втором; „лежат на одной прямой" в переводе на другой язык означает „проходят через одну точку" и т. д. Словарем для перевода с одного языка на другой является теория поляр конического сечения. Так как благодаря этому каждое предложение проективной геометрии на плоскости должно указывать на взаимное ему предложение, то **закон взаимности** называют, по Жергонню, **законом** или началом двойственности. Существует также соответствующий закон двойственности и для пространства; мы, однако, не можем здесь ближе войти в рассмотрение этого[1]).

Попробуем теперь составить предложение, взаимное по началу двойственности важнейшему предложению проективной геометрии, — предложению Паскаля. Если первая фигура состоит из шести точек P, Q, R, S, T, U конического сечения, которые соединены прямыми в один шестиугольник, то каждой вершине шестиугольника отвечает, в качестве поляры относительно этого конического сечения, проходящая через нее касательная; таким образом шести вершинам вписанного шестиугольника отвечают шесть касательных p, q, r, s, t, u. Каждой стороне шестиугольника отвечает точка пересечения двух касательных, соответствующих концам этой стороны. Шесть касательных с шестью точками попарного пересечения соседних касательных образуют описанный вокруг конического сечения „шестисторонник". Содержание предложения Паскаля можно представить схемой:

$$\left.\begin{aligned}(PQ,\ ST)&=V\\(QR,\ TU)&=W\\(RS,\ UP)&=X\end{aligned}\right\}p,$$

значение которой было выше уже разъяснено и осве-

[1]) Более глубокое основание принципа двойственности заключается в двойственности аксиом, лежащих в основе проективной геометрии (аксиом сопряжения, проективного расположения и непрерывности — по Гильберту). Так, например, аксиоме „две точки определяют прямую" (прямую проходящую через них) отвечает взаимная аксиома „две прямые определяют точку" (точку их пересечения): Наоборот, в элементарной геометрии вышеупомянутой аксиоме „две точки определяют прямую" не отвечает взаимно „две прямые определяют точку", так как две параллельные прямые не определяют таковой. Таким образом принцип двойственности в проективной геометрии существенно обусловлен введением бесконечно удаленных элементов. Как мы уже указывали (стр. 14), на бесконечно удаленные элементы не распространяются метрические свойства. Поэтому в метрической геометрии, в которой имеет место первая аксиома и в которой вместе с тем существуют непересекающиеся прямые одной плоскости, принцип двойственности не имеет места.

щено большим количеством примеров. Взаимная схема для шестисторонника представляется так:

$$\left.\begin{aligned}(pq,\ st)&=v\\(qr,\ tu)&=w\\(rs,\ up)&=x\end{aligned}\right\}B.$$

Как понять эту схему? Прямой, соединяющей две точки, например PQ, отвечает точка пересечения соответственных прямых, например pq. Первая скобка содержит поэтому точки пересечения первой и второй стороны шестисторонника, а также четвертой и пятой, т. е. две противоположные вершины. Как V означает точку пересечения противоположных сторон PQ и ST шестиугольника, точно также v означает прямую, соединяющую противоположные вершины pq и st шестисторонника. Прямые v, w, x являются, таким образом, прямыми, соединяющими три пары противоположных вершин. В первой схеме p означает прямую, на которой лежат три точки V, W, X. Точкам одной прямой отвечают взаимно прямые, проходящие через одну точку; следовательно, три прямые v, w, x пересекаются в одной точке, которая на схеме, по мотивам, которые скоро разъяснятся, названа буквой B[1]). Посредством этих соображений мы получаем, в качестве предложения, взаимного с предложением Паскаля, следующее не менее важное предложение: *„прямые, соединяющие три пары противоположных вершин описанного вокруг конического сечения шестисторонника, пересекаются в одной точке.“* Это предложение называют по имени открывшего его *) — предложением Брианшона. Точка B называется „точкой Брианшона“.

[1]) В проективной геометрии принято точки обозначать прописными буквами, а прямые—малыми буквами латинского алфавита, причем, преобразуя какую-либо фигуру во взаимную ей, обычно прямую второй фигуры, отвечающую некоторой точке первой, обозначают той же, но не прописной, а малой буквой, и наоборот — точку второй фигуры, отвечающую некоторой прямой первой, обозначают той же, но не малой, а прописной буквой. В данном случае, однако, точка второй фигуры, отвечающая прямой p, названа буквой B. Причина тому разъяснена ниже; во всяком случае, читатель должен помнить, что точка B отвечает прямой p.

*) Brianchon, Sur les surfaces courbes du second degrè („Journ. de l'école polytechnique“, Bd. 6, 1806).

Предложение Брианшона, так же как предложение Паскаля, может быть применено ко многим построениям. Можно, например, по пяти данным касательным конического сечения найти сколько угодно других касательных. Если подвижная касательная u движется вокруг конического сечения до совпадения с неподвижной касательной t, то точка пересечения tu превращается в точку касания неподвижной касательной, и эту точку, следовательно, мы должны обозначить символом tt. Из общего предложения Брианшона можно получить много частных случаев, если две касательные слить в одну, место точки их пересечения tu заступает в этом случае на предыдущей схеме точка касания tt. После этого пояснения читатель сможет самостоятельно поставить и разрешить задачи, взаимные тем, которые решаются применением предложения Паскаля. Как общий результат этих построений, обращает на себя внимание то, что коническое сечение однозначно определяется пятью касательными или четырьмя касательными и точкой касания одной из них, или тремя касательными и точками касания двух из них.

В качестве дальнейших приложений предложения Брианшона пусть читатель выполнит следующие задания:

1. По четырем касательным к параболе найти другие ее касательные (бесконечно удаленная прямая является пятым заданным элементом!)

2. По трем касательным и точке касания одной из них найти другие касательные к параболе.

3. По четырем касательным к параболе найти точку касания одной из них.

4. По четырем касательным к параболе найти точку касания бесконечно удаленной касательной, т. е. направление, в котором лежит эта точка.

5. По асимптотам и одной касательной найти другие касательные к гиперболе (вместе с каждой асимптотой задана также ее точка касания!).

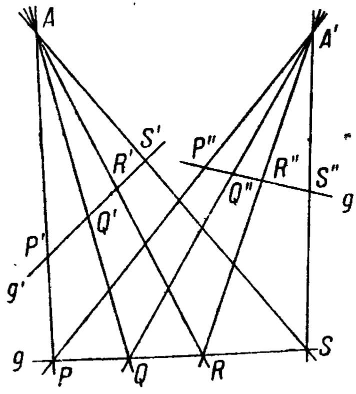
6. По тем же условиям найти точку касания данной касательной (какое предложение можно вывести из построения?).

IV. ШТЕЙНЕР.

Из большого количества математиков прошлого столетия, которые имеют заслуги в дальнейшем развитии и более строгом обосновании проективной геометрии, особенно выделяются два немецких геометра — Штейнер и фон-Штаудт.

Если мы Якова Штейнера (Jacob Steiner, 1796—1863) — сына швейцарского крестьянина — причисляем к немцам, то употребляем последнее в широком смысле, относя сюда всех тех, чей родной язык немецкий. Мы делаем это с тем большим правом, что Штейнер почти половину своей жизни провел в Берлине в качестве профессора университета и члена Академии наук. Здесь он создал свое первое произведение по геометрии — „Систематическое развитие взаимной зависимости геометрических образов“ (1832). Что он сделал этим произведением, к сожалению, оставшимся незаконченным, для проективной геометрии, — мы не сможем выразить лучше, чем прекрасными словами предисловия: „Предлагаемое произведение пытается вскрыть тот механизм, которым связаны друг с другом разнообразнейшие явления в пространстве. Существует весьма ограниченное количество весьма простых основных соотношений, выражающих ту схему, по которой основная масса предложений развивается последовательно и без всяких затруднений. Посредством надлежащего усвоения этих немногих основных соотношений делаешься господином всего предмета; порядок заступает место хаоса, и видишь, как все части естественно опираются друг на друга, располагаются в прекрасном порядке и соединяются в удачно отграниченные группы. Таким образом удается овладеть теми элементами, из которых исходит природа, и с возможной экономией и простейшим образом придать фигурам несчетное множество свойств". Эти слова с неподражаемой ясностью рисуют сущность проективной геометрии и объясняют, кстати, то особое наслаждение, которое свойственно занятиям этой частью учения о пространстве.

В чем состоят, однако, те немногие основные соотношения, посредством усвоения которых можно стать „господином всего предмета"? Коротко говоря, это — „проективные соотношения основных образов". Особый случай этих соотношений мы уже изучили в методе центральной перспективы Дезарга: точкам $P, Q, R, S, \ldots$ одной прямой g здесь отвечают точки $P', Q', R', S', \ldots$ другой прямой g', расположенные так, что соединяющие их прямые PP', QQ', RR', SS' пересекаются в одной и той же точке A (черт. 25).



Черт. 25.

Если P, Q, R, S суть какие-либо четыре гармонические точки прямой g, то то же самое относится к соответствующим точкам прямой g'. Уже греческому геометру Паппу (конец III в. н. э.) было известно, что это свойство гармонических точек есть особый случай общего соотношения, которое имеет место для любых четырех точек прямой. Незначительным изменением доказательства, данного выше для гармонических точек, можно найти, что для четырех любых точек прямой g и их изображений имеет место равенство:

$$\frac{PQ}{RQ} : \frac{PS}{RS} = \frac{P'Q'}{R'Q'} : \frac{P'S'}{R'S'}\text{ [1]}$$

---

[1]) Из равенства (стр. 32) $\frac{QP}{QR} \cdot \frac{SP'}{SR''} = \frac{Q''P'}{Q''R''} \cdot \frac{SP}{SR}$ имеем: $\frac{QP}{QR} : \frac{SP}{SR} = \frac{Q''P'}{Q''R''} : \frac{SP'}{SR''}$, т. е. двойное отношение четырех

Каждая половина этого равенства содержит отношение двух отношений, или, лучше сказать, двойное отношение. Таким образом *двойное отношение каких-либо четырех точек одной прямой равно двойному отношению их перспективных изображений.* Если P, Q, R, S — четыре гармонические точки, то их двойное отношение равно 1 [1]). Отсюда следует, что $\frac{P'Q'}{R'Q'}=\frac{P'S'}{R'S'}$, или что P', Q', R', S' тоже гармонические точки [2]).

Равенство двойных отношений действительно не только для четырех определенных точек P, Q, R, S, и их отображений, но оно выражает общее соотношение, которое имеет место между четырьмя произвольно взятыми точками g и соответственными точками g'. Соединим какую-нибудь новую точку A' — которую, по желанию, можно взять в плоскости, определенной точкой A и прямой g, или вне ее, — с точками прямой g и пересечем пучок исходящих из A' лучей третьей прямой g'' в точках P'', Q'', R'', S'',...; тогда согласно Паппу:

$$\frac{PQ}{RQ}:\frac{PS}{RS}=\frac{P''Q''}{R''Q''}:\frac{P''S''}{R''S''}$$

и поэтому также:

$$\frac{P'Q'}{R'Q'}:\frac{P'S'}{R'S'}=\frac{P''Q''}{R''Q''}:\frac{P''S''}{R''S''}.$$

Оба ряда точек g' и g'' [3]), как отображения g, тем самым так отнесены друг к другу, что каждой точке

точек сохраняется при перспективном отображении их на прямую, проходящую через одну из этих точек S. Применяя доказанное к точкам P', Q'', R'', S, отображаемым на прямую g', проходящую через P', получим равенство, приведенное в тексте.

[1]) Так как $\frac{PQ}{RQ}=\frac{PS}{RS}$. Необходимо сделать оговорку, что здесь, как и во всей книжке, речь идет только об абсолютной величине отрезков, но не об их направлении.

[2]) Это, конечно, не новый вывод, а повторение в новых терминах уже доказанного на стр. 32.

[3]) Рядом точек называют совокупность точек одной прямой. Очевидно, что ряд точек есть образ, взаимный по принципу двойственности пучку лучей.

одного ряда отвечает определенная точка другого; любой точке T' прямой g' легко найти соответствующую точку T'' прямой g'', соединив точку пересечения T двух прямых AT' и g с точкой A'[1]. Между любыми четырьмя точками прямой g' и отвечающими им точками g'' остается в силе равенство двойных отношений. Следовательно, ряды точек g' и g'' находятся в таком же соответствии между собой, как g и g'. Единственная разница состоит в том, что прямые, соединяющие соответственные точки $P'P''$, $Q'Q''$, $R'R''$, $S'S''$, вообще говоря, не пересекаются в одной точке. Такое соответствие прямых g' и g'' Штейнер называет проективным соответствием[2].

Проективное соответствие, как Штейнер показал далее, находится в тесной связи с *теорией конических сечений*. Допустим, что точка A' лежит в плоскости, определяемой точкой A и прямой g; тогда все части построения будут лежать в этой плоскости. Соединим каждую точку T' прямой g' с отвечающей ей точкой T'' прямой g''; тогда *все бесчисленные прямые, соединяющие такие точки, являются касательными к одному*

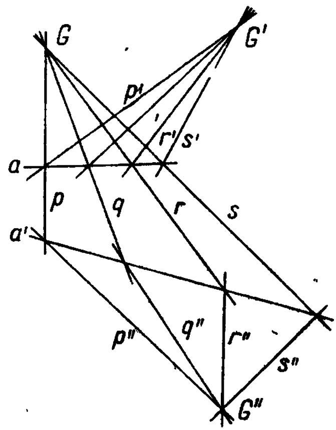
---

[1] Ряды точек g' и g'' не являются перспективным изображением один другого, но между их точками можно установить однозначное взаимное соответствие, относя друг к другу те точки обоих рядов, которые являются перспективным изображением одной и той же точки прямой g. Так, точки T' и T'' соответствуют одна другой, так как обе они являются перспективными изображениями одной и той же точки T ряда g.

[2] Перспективное соответствие между двумя рядами точек существует, если прямые, соединяющие соответственные точки обоих рядов, пересекаются в одной точке. Так ряды точек g и g', равным образом g и g'', перспективны. Повторяя несколько раз перспективное отображение одного ряда точек g на разные прямые g', g'', . . . из разных центров перспективы A, A', . . ., получим несколько не перспективно расположенных рядов точек g', g'', . . ., между которыми, однако, сохранится равенство двойных отношений любых четырех точек одного ряда и соответственных точек другого. *Два ряда точек, между которыми установлено такое однозначное соответствие, что двойное отношение четырех любых точек одного ряда равно двойному отношению отвечающих им точек другого, называются проективными.* Очевидно, что перспективное соответствие двух рядов точек есть частный случай проективного.

и тому же коническому сечению, которое, смотря по взаимному расположению точек A и A' и прямых g, g' и g'', может быть *эллипсом, гиперболой* или *параболой*. Если читатель построит достаточно большое число таких касательных, то он легко сможет от руки начертить это коническое сечение. Он так же легко убедится, путем приложения предложения Брианшона, что прямые g' и g'' тоже принадлежат к числу касательных. Доказательство этих предложений мы вынуждены здесь обойти[1]).

Построим теперь фигуру, взаимную или двойственную с фиг. 25. Четырем точкам P, Q, R, S, лежащим на одной прямой g, отвечают теперь четыре прямые p, q, r, s, проходящие через одну точку G (черт. 26), точке A отвечает прямая a, четырем лучам AP, AQ, AR, AS — четыре точки пересечения ap, aq, ar, as. Точно так же четырем лучам, идущим через A', отвечают четыре точки пересечения прямых p, q, r, s со второй прямой a'. Прямым g' и g'' здесь отвечают две точки G' и G''; точкам P', Q', R', S', т. е. точкам пересечения прямой g' с „лучами зрения“ AP, AQ, AR, AS, идущими через A, отвечают четыре луча p', q', r', s', которые соединяют G' с точками ap, aq, ar, as. Точками P'', Q'', R'', S'' отвечают точно так же четыре луча p'', q'', r'', s'', которые соединяют G'' с $a'p$, $a'q$, $a'r$, $a's$. Оба пучка G' и G'' связаны теперь таким соотношением, что каждому лучу t' пучка G' легко найти соответствующий луч t'' пучка G'', луч t' пересекает a; прямая t, соединяющая точку пересечения at' с G, пересекает a' и t'' есть луч, соединяющий



Черт. 26.

[1]) Доказательство — см. прибавление I.

G'' с a'. Два пучка G' и G'', которые связаны между собой таким образом, Штейнер называет **проективными**[1].

Прямым, соединяющим соответственные точки на прямых g' и g'', взаимно отвечают точки пересечения соответственных лучей обоих пучков. *Как там прямые, соединяющие соответственные точки, образуют касательные к коническому сечению, точно так же здесь точки пересечения соответственных лучей образуют точки конического сечения. Центры G' и G'' обоих проективных пучков лежат на этом коническом сечении.*

Из проективного отношения рядов точек и пучков Штейнер вывел все свойства конических сечений, в особенности предложения Паскаля и Брианшона, теорию поляр и т. д. Именно Штейнеру и его ученикам удалось распространить схему проективного отношения на более высокие основные образы, чем ряд точек и пучок лучей. Эти отношения по сегодняшний день образуют основу всей проективной геометрии.

Если мы хотим между двумя данными прямыми g' и g'' установить проективное соответствие, то можем на каждой из них выбрать произвольно три точки P', Q', R' и P'', Q'', R''; пусть $P'P''$, $Q'Q''$, $R'R''$ будут

---

[1]) **Два пучка** G и G', равным образом G и G'', **соответственные лучи которых пересекаются на одной прямой, называются перспективными.** Два пучка, перспективные третьему, вообще говоря, не перспективны между собой, т. е. точки пересечения соответственных прямых обоих пучков не лежат на одной прямой. Читатель легко сообразит, что если пересечь каждый пучок G' и G'' прямыми a и a', то ряды точек, образуемых пересечением лучей каждого пучка с соответствующей прямой, т. е. точки пересечения лучей пучка G' с прямой a и пучка G'' с прямой a', проективны, если отнести друг к другу точки, в которых эти прямые пересекаются соответственными лучами. Условимся двойное отношение точек пересечения каких-либо четырех лучей с произвольной прямой называть двойным отношением этих лучей. Тогда двойное отношение любых четырех лучей пучка G' равно двойному отношению соответственных лучей пучка G''. Такие два пучка G' и G'', у которых двойное отношение любых четырех лучей одного пучка G' равно двойному отношению соответственных лучей другого пучка G'', мы называем проективными. Перспективность пучков есть, очевидно, частный случай проективности.

три пары соответственных точек. Возьмем на g' четвертую произвольную точку S'; тогда на g'' ей должна быть отнесена только одна какая-то точка. Для этой точки S'' должно иметь место равенство:

$$\frac{P'Q'}{R'Q'} : \frac{P'S'}{R'S'} = \frac{P''Q''}{R''Q''} : \frac{P''S''}{R''S''}.$$

Отсюда, однако, следует:

$$\frac{P''S''}{R''S''} = \left(\frac{P'S'}{R'S'} \cdot \frac{P''Q''}{R''Q''}\right) : \frac{P'Q'}{R'Q'}.$$

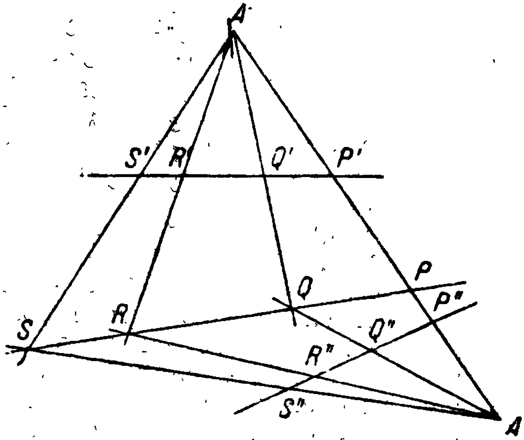
Так как все три отношения отрезков, находящиеся с правой части равенства, вполне известны, то тем самым и отношение, в котором точка S'' делит отрезок $P''R''$, однозначно определено. О том, есть ли точка S'' внутренняя или внешняя точка деления, можно легко заключить по расположению четырех точек на прямой g' [1]). Этим доказано так называемое основное предложение проективной геометрии: *„проективное отношение двух рядов точек вполне определяется, если каким-либо трем точкам одного ряда отнесены три произвольные точки другого; тогда каждой четвертой точке одного ряда отвечает вполне определенная точка другого“*.

Чтобы путем построения найти точку ряда g'', отвечающую точке S' ряда g', нужно определить такой третий ряд точек g, чтобы g' и g'' можно было рас-

---

[1]) Равенство двойных отношений позволит вычислить, в каком отношении отрезок $P''R''$ делится точкой S''. Но при этом точка S'' может лежать внутри отрезка $P''R''$ или вне его, т. е. производить внутреннее или внешнее деление. Так как направление отрезков не принято нами во внимание в двойном отношении, то оно не дает возможности заключить, будет ли точка S'' лежать между точками $P''R''$ или вправо или влево от них. Но при проектировании в расположении четырех точек сохраняется некоторое постоянное соответствие, которое по расположению четырех точек одного ряда позволяет судить о расположении отвечающих им точек другого. Читатель может попытаться обнаружить это постоянное соотношение. Мы поможем ему намеком: рассматривать следует сразу две пары точек; если речь идет о четырех гармонических точках — две пары сопряженных точек.

сматривать как его перспективные изображения. Это можно сделать, например, следующим образом: на прямой $P'P''$ (черт. 27) выберем две произвольные точки A' и A''; прямые $A'Q'$ и $A''Q''$ пересекутся в точке Q, $A'R'$ и $A''R''$ в R; прямая $QR = g$ пересечет $P'P''$ в P. Очевидно, P', Q', R' и P'', Q'', R'' являются перспективными изображениями точек P, Q, R для центров A' и A''. Теперь легко найти точку S на прямой g, отве-



Черт. 27.

чающую точке S' прямой g' и отсюда — точку S'' на прямой g''. Прямые g', g'', $P'P''$, $Q'Q''$, $R'R''$ и $S'S''$ являются шестью касательными некоторого конического сечения. Таким образом мы заново решили задачу: по пяти данным касательным конического сечения найти его шестую касательную. Пусть читатель попробует самостоятельно решить взаимную задачу: связать проективно два пучка, в каждом из которых даны три луча, и к четвертому лучу одного пучка найти соответственный луч другого.

V. ШТАУДТ.

Для доказательства основного предложения и вообще для обоснования проективной геометрии Штейнер пользуется двойным отношением. Двойное отношение хотя и „проективно“ в смысле Понселе, но оно содержит величины отрезков и, следовательно, является понятием старой метрической геометрии.

Тем самым в проективную геометрию, изучающую чистые свойства положения, вводится чуждая ее подлинной сущности метрическая составная часть. Применение предложения Менелая Дезаргом и Паскалем тоже представляет собой прием, чуждый для чистой проективной геометрии. Чтобы новая геометрия была действительно „геометрией положения“, чтобы обосновать и развить ее независимо от метрической геометрии Евклида, — для этого нужно было изгнать все эти чуждые ей приемы и все здание проективной геометрии обосновать только на свойствах положения.

Соображения этого рода привели профессора математики Христиана фон-Штаудта (Christian V. Staudt, 1798—1867) к созданию величественной „Геометрии положения“ (1847) — произведения, которому в начале угрожала судьба сочинений Дезарга: оно было слишком тяжело написано, ставило, при своей сжатости, слишком большие требования к способностям среднего читателя, а потому изучалось и ценилось исключительно в узком кругу. Только благодаря более доступным изложениям, лучше удовлетворяющим потребностям начинающего читателя, — среди которых, бесспорно, лучшим является мастерская „Геометрия положения“, Т. Рейе (Th. Reye, „Geometrie der Lage“), — новой дисциплине был создан доступ в более широкий круг. Вместе с тем, естественно, росло число тех, которые не пожалели усилий, чтобы самим углубиться в гениальное произведение Штаудта.

Штаудт дает в начале отличное от обычного определение гармонических точек. Выше мы определили четыре гармонические точки, как две пары точек, из которых каждая производит внутреннее и внешнее деление отрезка, определяемого двумя другими, в одном и том же отношении. К таким парам мы пришли при рассмотрении полного четырехсторонника. Оказалось, что каждая диагональ его гармонически делится двумя другими; например, на черт. 13 точки E, Q, F, R суть четыре гармонические точки. Этим основным свойством полного четырехсторонника Штаудт воспользовался для определения гармонических точек. Он говорит: *„Если на одной прямой даны три точки E, Q, F и если затем построен полный четырехсторонник так, что одна диагональ проходит через Q, а E и F суть две противоположные его вершины, то другая диагональ этого четырехсторонника пересекает данную прямую в точке R, которая называется четвертой гармонической, сопряженной с Q"*.

Это определение удовлетворяет требованию Штаудта: в него не входят никакие метрические понятия. Но в то время как при старом определении достаточно короткого расчета, чтобы показать, что к трем точкам E, Q, F возможна только одна сопряженная с Q четвертая гармоническая R, у Штаудта однозначная определенность точки R нуждается в особом геометрическом доказательстве; ведь мыслимо, что возможно построить два разных четырехсторонника, которые имеют требуемое положение относительно точек E, Q, F, но при этом третья диагональ одного встречает данную прямую в иной точке, чем третья диагональ другого [1].

---

[1] Если бы этот мыслимый случай имел место, то трем точкам E, Q, F отвечали бы две гармонические сопряженные с Q точки R и R_1, в которых третьи диагонали обоих четырехсторонников пересекали бы данную прямую; тогда обе точки R и R_1, удовлетворяли бы определению Штаудта. Раньше мы назвали гармоническими четыре точки, удовлетворявшие известному однозначному метриче-

28. Докажите, что если в треугольнике проведены три высоты, то прямые, соединяющие основания высот, пересекают противоположные стороны треугольника в трех точках, лежащих на одной прямой.

29. То же для биссектрис треугольника.

30. То же для медиан треугольника.

31. Если коническое сечение представляет собой две прямые, то обоснование теории поляр, данное в тексте, для этого случая не годится. Докажите непосредственно, что и в этом случае главное предложение теории поляр имеет место. Найдите полюс произвольной прямой по отношению к двум прямым.

Задачи к главе II.

Предложение Паскаля.

32. Прочтите схему:

$$\left.\begin{array}{l}(AB,\ KL)=X\\ (BC,\ LM)=Y\\ (AC,\ KM)=Z\end{array}\right\} p.$$

Что вы можете сказать о прямых AK, BL и CM?

33. Докажите, что прямая, на которой пересекаются противоположные стороны вписанного и описанного четырехугольников (см. стр. 46), есть поляра внутренней точки пересечения диагоналей этих четырехугольников.

Задачи к главе III.

Принцип взаимности.

34. Составьте задачи, взаимные задачам 22, 23, 24 и 32.

35. Даны две пары касательных к коническому сечению из точек P и S. Постройте полюс прямой PS. Коническое сечение не дано. Задачу решать, как взаимную задаче 22.

36. Решение задачи 35 дает способ построения полюса прямой, отличный от способа, который дает решение задачи 24. Какое предложение, уже известное читателю, вытекает из сопоставления обоих построений?

Задачи к главе IV.

Проективность.

37. Докажите, что перспективность двух рядов точек однозначно определена, если даны две точки одного ряда и отвечающие им две точки другого.

38. Даны два проективных ряда точек на прямых a и b: 1) если точку пересечения прямых a, b считать точкой первого ряда, то найдите отвечающую ей точку второго ряда, 2) если точку ab, считать точкой второго ряда, то найдите отвечающую ей точку первого ряда; 3) если точке ab, как точке первого ряда, отвечает она же, как точка второго ряда, т. е. если точка ab отвечает самой себе, — то докажите, что ряды перспективны.

39. На прямых a и b даны два ряда перспективных точек. Докажите, что точка пересечения этих прямых ab, как точка первого ряда, отвечает самой себе, как точке второго ряда.

40—41. Составьте и решите задачи, взаимные задачам 37, 38 и 39.

42. Соответственные лучи двух проективных пучков S и T пересекаются на коническом сечении. 1) Какой луч пучка T отвечает их общему лучу ST, рассматриваемому как луч пучка S? 2) Какой луч пучка S отвечает их общему лучу TS, как лучу пучка T? Докажите, что эти лучи касаются конического сечения в точках S и T.

43. Составьте аналогичную задачу для рядов точек.

44. В двух проективных пучках имеется только одна пара параллельных соответственных лучей. Какое коническое сечение определяют точки пересечения соответственных лучей этих пучков?

45. То же, если только две пары лучей параллельны.

46. Докажите, что если три пары соответственных лучей двух проективных пучков пересекаются под одним и тем же углом, то пучки конгруэнтны, т. е. что остальные соответственные лучи попарно пересекаются под таким же углом?

47. Если три пары соответственных лучей проективных пучков параллельны, то и остальные соответственные лучи попарно параллельны. Докажите это. Почему пучки в этом случае считаются перспективными? Где лежит ряд точек, по отношению к которому оба пучка перспективны?

48. Центр перспективы двух рядов точек лежит в бесконечности. Во что превращается перспективность?

49. Могут ли быть три луча одного пучка перпендикулярны трем соответственным лучам проективного с ним пучка? Какое коническое сечение образуют в этом случае точки пересечения соответственных лучей этих пучков?

50. Докажите, что два конических сечения пересекаются не более чем в четырех точках.

Задачи к главе V.

Геометрия положения.

51. Можно ли сохранить то определение конических сечений, которое дано в этой книжке, если обосновывать проективную геометрию исключительно на свойствах положения?

52. Коническое сечение представляет собою две прямые, и шестиугольник Паскаля начерчен так, что соседние вершины лежат на разных прямых. Имеет ли в этом случае место предложение Паскаля?

Задачи к Прибавлению.

53. Желая доказать, что любые два проективных пучка можно перспективно отобразить на некоторую плоскость так, чтобы точки пересечения соответственных лучей этих пучков изобразились точками, лежащими на окружности (т. е. чтобы пучки изобразились парой конгруэнтных пучков), мы задали пучки вершинами S и T, общим лучом ST, двумя лучами s и t, отвечающими лучу ST в первом и во втором пучке и парой соответственных лучей p и p_1. Если бы мы попытались провести доказательство, задав пучки S и T первыми попавшимися тремя парами лучей (что было бы самым естественным) p и p', q и q', r и r' или, что то же, пятью точками S, T, P, Q, R, то наткнулись бы на задачу: вписать в окружность треугольник так, чтобы его стороны прошли через три данные точки, расположенные на одной прямой. Предлагается читателю пойти этим путем и дойти до этой задачи.

54. Так как читатель умеет построить такие два конгруэнтных пучка, которые являются перспективным изображением данных проективных пучков, то он сумеет решить задачу, о которой идет речь в предыдущем упражнении. Предлагается проделать это.

Редактор ГТТИ *И. Н. Бронштейн*. Техредактор *А. И. Архангельский*.
Ревиз. корректор *М. К. Саталкин*.

Издание сдано в набор 9 января 1932 г. подписано к печати 13 марта, вышло в свет в количестве 6000 экз. Книга отпечатана в Москве в 5-й типографии ОГИЗа «Пролетарское слово». Каланчевский туп., д. 3/5. Заказ 5148. Печатных листов в книге 2⅜, типографских знаков в листе 66830. Статформат 82/111 в 1/32. Уполн. Главлита Б. 18627.

-50