

ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ



Б.Н. НАУМОВ

ТЕОРИЯ
НЕЛИНЕЙНЫХ
АВТОМАТИЧЕСКИХ
СИСТЕМ





ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1972

Б. Н. НАУМОВ

**ТЕОРИЯ
НЕЛИНЕЙНЫХ
АВТОМАТИЧЕСКИХ
СИСТЕМ**

ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1972

Теория нелинейных автоматических систем. Частотные методы. Наумов Б. Н. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1972, 544 стр.

Изложены методы описания динамических свойств нелинейных систем произвольного порядка на основе интегральных уравнений, частотные методы анализа абсолютной устойчивости положения равновесия (метод В. М. Попова) и процессов в нелинейных системах, а также частотные методы синтеза корректирующих устройств (последовательных, параллельных и обратных связей). Исследование качества нелинейных систем базируется на косвенных критериях (степень устойчивости, интегральные квадратичные и среднеквадратичные оценки). Рассмотрены частотные методы анализа периодических и вынужденных движений. Изложены методы исследования устойчивости и качества нелинейных систем при случайных воздействиях. Книга содержит обзор работ и подробный список литературы по нелинейным системам.

Илл. 511, табл. 17, библи. 1206 назв.

Борис Николаевич Наумов

Теория нелинейных автоматических систем.
Частотные методы

М., 1972 г., 544 стр. с илл.

Редактор *Р. Т. Янушевский*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*

Корректоры *О. А. Бутусова, Н. Б. Румянцева*

Сдано в набор 17/VIII 1971 г. Подписано к печати 26/I 1972 г. Бумага 84×108¹/₃₂, тип. № 1. Физ. печ. л. 17. Условн. печ. л. 28,56. Уч.-изд. л. 28,02.
Тираж 6400 экз. Т-01525. Цена книги 2 р. 01 к. Заказ 1213.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	11
Глава I. Уравнения нелинейных систем автоматического управления	14
§ 1. Структурные схемы нелинейных систем	14
§ 2. Описание динамических свойств линейной части системы	17
1. Дифференциальные уравнения (18). 2. Передаточные функции (19). 3. Частотные характеристики (22). 4. Временные характеристики (46).	
§ 3. Нелинейные элементы систем автоматического управления	50
1. Релейные элементы (51). 2. Нелинейные элементы с произвольными кусочно-линейными характеристиками (52). 3. Нелинейные элементы со степенными характеристиками (54). 4. Нелинейные элементы с характеристиками типа сухого трения (54). 5. Нелинейные элементы, имеющие характеристики, зависящие от нескольких переменных (55).	
§ 4. Описание динамических свойств замкнутых нелинейных систем	56
1. Системы с одним нелинейным элементом (56). 2. Системы с двумя нелинейными элементами (60).	
§ 5. Классификация нелинейных систем	62
§ 6. Примеры составления интегральных уравнений нелинейных систем автоматического управления	63
1. Система автоматического регулирования скорости двигателя (63). 2. Позиционная следящая система (69). 3. Система автоматического регулирования процесса измельчения (нейтральная система с запаздыванием) (75).	

Глава II. Устойчивость нелинейных систем автоматического управления	80
§ 1. Определение понятия устойчивости нелинейных систем	80
§ 2. Частотный критерий абсолютной устойчивости положения равновесия (критерий В. М. Попова)	87
1. Частотный критерий абсолютной устойчивости положения равновесия (87). 2. Некоторые обобщения критерия Попова (89). 3. Нелинейные системы с гистерезисными характеристиками (91).	
§ 3. Частотный критерий абсолютной устойчивости процессов в нелинейных системах	93
§ 4. Абсолютная устойчивость в пространстве параметров	97
1. Определение областей абсолютной устойчивости положения равновесия (98). 2. Определение областей абсолютной устойчивости процессов (103).	
Глава III. Анализ и синтез нелинейных систем на основе критерия абсолютной устойчивости процессов	105
§ 1. Различные формулировки критерия абсолютной устойчивости процессов	105
§ 2. Анализ абсолютной устойчивости процессов	112
§ 3. Синтез корректирующих устройств нелинейных систем, обеспечивающих абсолютную устойчивость процессов	114
1. Общие соображения (114). 2. Желаемая логарифмическая частотная характеристика (115). 3. Синтез последовательных корректирующих устройств (116).	
§ 4. Примеры исследования абсолютной устойчивости процессов в нелинейных системах	118
1. Система автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока (118). 2. Позиционная следящая система (124). 3. Система автоматического регулирования с запаздыванием (130). 4. Выделение областей абсолютной устойчивости в системе третьего порядка (136).	
Глава IV. Анализ и синтез нелинейных систем на основе критерия абсолютной устойчивости положения равновесия	138
§ 1. Различные формулировки критерия абсолютной устойчивости положения равновесия (критерия В. М. Попова)	138
§ 2. Кривые Попова для некоторых типовых линейных частей системы	145

§ 3. Анализ абсолютной устойчивости положения равновесия	149
§ 4. Синтез корректирующих устройств, обеспечивающих абсолютную устойчивость положения равновесия	151
§ 5. Примеры исследования абсолютной устойчивости положения равновесия систем автоматического управления	153
1. Система автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока (153). 2. Позиционная следящая система (160). 3. Система автоматического управления с запаздыванием (165). 4. Система автоматического управления В. А. Плисса (167).	
Глава V. Устойчивость нелинейных систем с переменными во времени параметрами	173
§ 1. Устойчивость систем с одним переменным во времени параметром	173
1. Критерий абсолютной устойчивости линейных и нелинейных систем с одним переменным во времени параметром (173). 2. Критерий асимптотической устойчивости линейных систем с одним переменным во времени параметром (критерий Бонджиорно) (178).	
§ 2. Пример исследования устойчивости системы с переменным во времени параметром	180
Глава VI. Косвенные оценки качества переходных процессов в абсолютно устойчивых нелинейных системах	184
§ 1. Сущность понятия степени устойчивости	184
§ 2. Степень устойчивости в нелинейных системах с абсолютно устойчивыми процессами	185
1. Достаточное условие, при выполнении которого отклонение от процесса в нелинейной системе будет иметь степень устойчивости не менее заданной (185). 2. Использование логарифмических частотных характеристик для анализа и синтеза корректирующих устройств, при наличии которых отклонение от процесса будет иметь степень устойчивости не менее заданной (187). 3. Примеры анализа и синтеза качества нелинейных систем (190).	
§ 3. Степень устойчивости в нелинейных системах с абсолютно устойчивым положением равновесия.	195
1. Достаточное условие, при выполнении которого отклонение от положения равновесия будет иметь степень устойчивости не менее заданной (195) 2. Анализ и синтез нелинейных систем, обладающих заданной	

	степень устойчивости при помощи логарифмических частотных характеристик (196). 3. Пример анализа и синтеза нелинейной системы автоматического регулирования скорости двигателя (197).	
§ 4	Оценка качества в абсолютно устойчивых нелинейных системах	199
	1. Вывод соотношений для оценки показателей качества переходных процессов (201). 2. Определение параметра Δ (203). 3. Определение численного значения Δ с использованием логарифмических частотных характеристик линейной части системы (205). 4. Пример оценки переходного процесса в нелинейной системе (206).	
§ 5	Интегральные квадратичные оценки переходных процессов в нелинейных системах автоматического управления	210
	1. Интегральная квадратичная оценка в нелинейной системе с абсолютно устойчивыми процессами (210). 2. Интегральная квадратичная оценка в нелинейной системе с абсолютно устойчивым положением равновесия (219). 3. Примеры вычисления верхних значений интегральных квадратичных оценок в абсолютно устойчивых нелинейных системах (220).	
Глава VII. Автоколебания и вынужденные движения в релейных системах		
		224
§ 1.	Общие соображения	225
§ 2.	Условия существования периодических режимов	226
§ 3.	Характеристика релейной системы и ее использование для исследования периодических режимов	230
§ 4.	Логарифмические характеристики релейных систем	237
	1. Исследование автоколебаний в релейных системах (243). 2. Исследования вынужденных движений в релейных системах (248).	
§ 5.	Устойчивость периодических режимов в релейных системах	253
§ 6.	Примеры исследования автоколебаний и вынужденных движений в релейных системах	265
	1. Анализ автоколебаний в релейных системах (265). 2. Синтез релейных систем из условия существования автоколебаний с заданными параметрами (272).	
Глава VIII. Автоколебания и вынужденные движения в системах с произвольными нелинейными характеристиками (метод гармонического баланса)		
		274
§ 1.	Приближенное исследование автоколебаний в нелинейных системах (метод гармонического баланса)	275
	1. Сущность метода гармонического баланса (275). 2. Различные методы вычисления $J_{н. в}(A)$ (280).	

	3. Анализ периодических движений в нелинейных системах (292).	
§ 2.	Приближенное исследование вынужденных движений в нелинейных системах на основе метода гармонического баланса	301
	1. Сущность метода (302). 2. Анализ вынужденных движений (305). 3. Решение задачи синтеза (314).	
§ 3.	Устойчивость периодических движений в нелинейных системах	318
§ 4.	Примеры исследования периодических режимов в нелинейных системах	324
Глава IX Устойчивость нелинейных систем при случайных воздействиях		
		330
§ 1.	Некоторые общие сведения из теории случайных процессов	330
	1. Случайный процесс и его основные характеристики (330).	
§ 2.	Прохождение случайных процессов через линейную часть системы	342
§ 3.	Прохождение случайных процессов через нелинейные элементы	344
§ 4.	Абсолютная устойчивость процессов в нелинейных системах автоматического управления при случайных воздействиях	345
	1. Критерий устойчивости (345). 2. Пример исследования абсолютной устойчивости процессов в нелинейной системе, работающей при наличии помех (349).	
Глава X. Исследование качества нелинейных систем при случайных воздействиях (метод статистической линеаризации)		
		353
§ 1.	Сущность метода	353
§ 2.	Статистическая линеаризация нелинейных элементов	354
§ 3.	Исследование качества (точности) нелинейных систем на основе метода статистической линеаризации (361).	
§ 4.	Примеры исследования качества нелинейных систем (364).	
Глава XI. Переходные процессы в нелинейных системах автоматического управления		
		370
§ 1.	Метод приближенного вычисления переходных процессов в нелинейных системах автоматического управления с одним нелинейным элементом	371
§ 2.	Нелинейные системы автоматического управления с запаздыванием	389
§ 3.	Нелинейные системы автоматического управления с несколькими нелинейными элементами	393

§ 4. Некоторые соображения об использовании методов приближенного вычисления переходных процессов для программирования на ЭВМ	395
Краткий обзор работ по теории нелинейных автоматических систем	397
Приложения	420
1. Основные теоремы преобразования Лапласа	420
2. Таблица оригиналов и соответствующих им изображений по Лапласу	421
3. Таблица типовых нелинейных характеристик и соответствующих им моделей	422
4. Асимптотические логарифмические частотные характеристики и соответствующие им передаточные функции корректирующих устройств	430
5. Формулы, позволяющие вычислять интегральные квадратичные оценки $J_{20} = \int_0^{\infty} h_{\text{отк}}^2(t) dt$ через коэффициенты изображения по Лапласу	448
6. Таблица чисел k и их значений $20 \lg k$ в дБ	449
7. Выражения эквивалентных комплексных коэффициентов усиления для типовых нелинейных характеристик	450
8. Выражения и графики статистических коэффициентов усиления для типовых нелинейных характеристик	456
9. Графики зависимостей $m_y(m_x, \sigma_x)$	464
10. Значения функции Крампа $\Phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$	466
11. Таблица степенных функций	468
Литература по теории нелинейных систем	472

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время любая отрасль промышленности и оборонной техники немыслима без использования систем автоматического управления, представляющих собой замкнутые динамические системы с отрицательной обратной связью.

Примерами таких систем являются системы автоматического управления химическими процессами, атомными реакторами, системы управления движением ракет, самолетов, искусственных спутников, системы управления экономической деятельностью, системы управления жизнедеятельностью в живых организмах и т. п. На первый взгляд кажется, что это совершенно разнородные системы, не имеющие ничего общего между собой. Вместе с тем теоретической основой, объединяющей все эти системы, является теория автоматического управления, рассматривающая различные теоретические вопросы, связанные с анализом и синтезом динамических свойств всевозможных систем автоматического управления. Первое, с чем приходится иметь дело при исследовании той или иной реальной системы автоматического управления, это математическое описание динамических свойств отдельных функциональных элементов, входящих в замкнутую систему управления.

В общем случае каждый из функциональных элементов системы обладает динамическими свойствами и его поведение может быть описано линейным или нелинейным дифференциальным уравнением (обыкновенным или в частных производных).

Совокупность дифференциальных уравнений при учете действующих на систему возмущений, которые могут

представлять собой как заданные, так и случайные функции времени, полностью характеризует динамические свойства всей системы в целом.

Если все функциональные элементы, входящие в систему, описываются линейными дифференциальными уравнениями, то и вся система описывается линейным дифференциальным уравнением и ее принято называть *линейной*.

В этом случае для исследования динамических свойств систем автоматического управления используется линейная теория, методы которой к настоящему времени достаточно хорошо разработаны.

Можно утверждать, что не существует высококачественных систем автоматического управления, динамические свойства которых могут быть полностью описаны при помощи линейной модели, так как все реальные системы нелинейны.

Линейная теория, имеющая дело с линейными моделями, обычно бывает полезна на первой стадии исследования систем автоматического управления, однако она не может охватить всего многообразия движений, которые могут иметь место в реальных системах.

Известно, что устойчивая линейная система устойчива при любом начальном отклонении — вне зависимости от его величины. Нелинейная система при одних отклонениях может быть устойчивой, а при других неустойчивой. В линейных системах *практически* не могут устанавливаться незатухающие колебания. Движения в линейных системах могут быть либо затухающими (устойчивыми), либо расходящимися (неустойчивыми). В нелинейных системах, кроме того, могут устанавливаться устойчивые незатухающие колебания, названные академиком А. А. Андроновым автоколебаниями, которые в ряде случаев являются нежелательными. Имеется также определенный класс нелинейных систем, работающих в режиме автоколебаний (вибрационные регуляторы, релейные системы и т. п.). Поэтому при исследовании нелинейных систем необходимо установить не только сам факт наличия автоколебаний, но и уметь изменить параметры системы, а если нужно, то и ее струк-

туру, чтобы погасить автоколебания, либо изменить их параметры в нужном направлении.

Известно также, что если ко входу линейной системы приложить гармонический сигнал, то на выходе системы будет также гармонический сигнал той же самой частоты, но другой амплитуды. На выходе же нелинейной системы может быть несколько различных типов движений — в зависимости от частоты, амплитуды и фазы гармонического входного сигнала. В нелинейной системе может, например, иметь место так называемое явление захватывания, т. е. устранение ранее существовавших автоколебаний и установление на выходе системы вынужденных колебаний с частотой, равной частоте внешнего периодического воздействия.

Аналогичные примеры, характеризующие наличие новых типов движений в нелинейных системах, можно было бы продолжить. Из изложенного следует, что только рассмотрение нелинейной модели может отразить большинство физических явлений, имеющих место в реальных системах.

При исследовании реальных систем надо уметь не только определить, какой тип движения будет иметь нелинейная система, но и уметь, если это нужно, изменять параметры и вид этого движения.

Только теория нелинейных систем автоматического управления позволяет ответить на многие перечисленные выше вопросы, но, к сожалению, пока еще далеко не на все.

В связи с этим теория нелинейных систем автоматического управления была и до сих пор остается предметом исследований многих советских и зарубежных ученых. Для решения проблем нелинейной теории широко привлекается различный математический аппарат. Тем не менее теория нелинейных систем еще далека от своего завершения и требует решения многих важных для практики проблем.

В настоящей монографии сделана попытка изложить с единой точки зрения некоторые важные разделы теории нелинейных систем (устойчивость и качество, периодические и вынужденные движения при заданных и случайных воздействиях), опираясь при этом на частотные

представления, хорошо себя зарекомендовавшие при исследовании динамики линейных систем автоматического управления.

Основная цель, которая была поставлена при написании данной монографии, — не претендуя на математическую строгость, а иногда и пренебрегая ею, изложить в доступной для использования форме основные разделы теории нелинейных систем автоматического управления.

Поэтому большое внимание уделено расчетным примерам, иллюстрирующим методику применения каждого метода.

В конце книги приведен перечень работ в области теории нелинейных систем, часть из которых была использована при написании данной работы. Этот перечень может оказаться полезным для тех читателей, которые захотят ознакомиться и с другими эффективными методами исследования нелинейных систем, не нашедшими отражения в настоящей работе.

В заключение автор хотел бы выразить благодарность академику Б. Н. Петрову и членам-корреспондентам АН СССР А. М. Летову и Е. П. Попову за просмотр рукописи и ряд ценных замечаний. Автор глубоко признателен профессору Я. З. Цыпкину, под руководством которого он начал заниматься теорией нелинейных систем и который оказал ему большую помощь при подготовке монографии. Автор признателен профессорам

К. Изава, Я. Ку, Д. Лагассу, Я. Савараги, К. Мира за предоставление материалов для библиографии в области нелинейных систем, помещенной в конце книги.

Большое участие в подготовке рукописи принимали В. И. Дымков, Л. Казарян, Н. Н. Попова и Р. Т. Янушевский. Автор выражает им свою благодарность.

УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 1. Структурные схемы нелинейных систем

Система автоматического управления, предназначенная для регулирования одной регулируемой величины, может быть изображена в виде функциональной схемы (см. рис. 1.1).

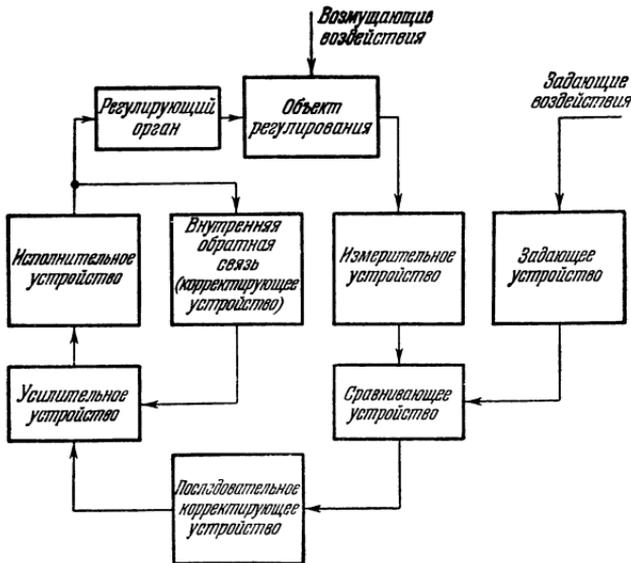


Рис. 1.1.

В некоторых случаях отдельные функциональные элементы могут отсутствовать (последовательные корректирующие устройства, обратные связи, усилители и т. п.) или могут быть объединены вместе (задающее и сравнивающее устройства, управляющее и усилительное устройства и т. д.).

Подобную функциональную схему можно изобразить и для систем автоматического управления в случае двух и более регулируемых величин. Однако в дальнейшем будут рассматриваться лишь системы с одной регулируемой величиной.

На всякую систему автоматического управления действуют задающие и возмущающие воздействия, выводящие систему из состояния равновесия и вызывающие переходные процессы для различных переменных, характеризующих динамическое состояние системы.

Задающие воздействия оказывают в некотором смысле полезное действие, и система должна воспроизводить их с той или иной заранее заданной степенью точности; возмущающие воздействия оказывают вредное действие. В общем случае оба эти воздействия могут быть приложены в разных точках системы, но бывает, что они действуют и в одной точке.

Часто для удобства исследования динамических свойств оба эти воздействия приводят к одной точке. Условимся далее возмущающие и задающие воздействия, приведенные к какой-либо точке, называть *внешним воздействием* и обозначать через $f(t)$. Внешнее воздействие $f(t)$ может характеризоваться некоторой *заданной*, либо *случайной* функцией времени. В тех случаях, когда $f(t)$ имеет характер заданной функции времени, будем различать два его типа:

исчезающее внешнее воздействие $f_n(t)$, когда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_n(t) = 0$$

и, кроме того,

$$\int_0^{\infty} f_n(t) dt \leq \infty;$$

ограниченное внешнее воздействие $f_o(t)$, если

$$|f_o(t)| \leq M_f.$$

Всякая система автоматического управления, как правило, имеет по крайней мере один функциональный элемент, характеризуемый нелинейной функцией, либо

в более общих случаях — нелинейным дифференциальным уравнением.

Таким образом, если перейти к составлению математической модели системы, соответствующей приведенной на рис. 1.1 функциональной схеме, то большинство систем автоматического управления можно представить в виде структурной схемы, состоящей из линейной части и нелинейного элемента (рис. 1.2), либо в более общем

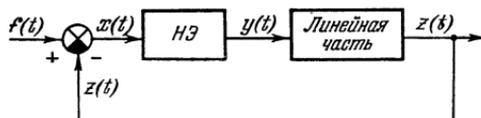


Рис. 1.2.

случае — линейных частей и нелинейных элементов (рис. 1.3). Линейные части системы характеризуются

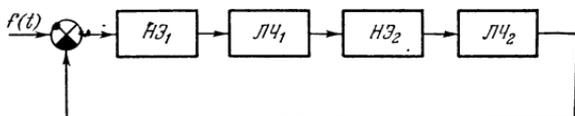


Рис. 1.3.

линейными дифференциальными уравнениями, а нелинейные элементы — некоторыми нелинейными функциями (однозначными или многозначными, симметричными или несимметричными).

§ 2. Описание динамических свойств линейной части системы

Линейная часть системы может состоять из нескольких произвольным образом соединенных между собой линейных элементов. Динамические свойства линейной части системы могут быть описаны при помощи дифференциальных уравнений, передаточных функций, частотных и временных характеристик.

Рассмотрим кратко каждый из перечисленных выше способов.

1. Дифференциальные уравнения. Линейная часть системы представляет собой соединение нескольких функциональных элементов, каждый из которых может быть описан дифференциальным уравнением. Таким образом, линейная часть системы характеризуется системой линейных неоднородных дифференциальных уравнений. Исключая промежуточные переменные, можно получить одно дифференциальное уравнение n -го порядка:

$$a_0 \frac{d^n z}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} z}{dt^{n-1}} + \dots + a_n z = b_0 \frac{d^m y}{dt^m} + \dots + b_m y, \quad (1.1)$$

где $z(t)$ — выходная величина линейной части системы; $y(t)$ — входная величина линейной части системы; $a_i (i=0, 1, \dots, n)$; $b_j (j=0, 1, \dots, m)$ — постоянные, значения которых определяются параметрами элементов, входящих в линейную часть системы; $z(0) = z_0$, $\dot{z}(0) = \dot{z}_0$, \dots , $z^{(n-1)}(0) = z_0^{(n-1)}$, $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$, \dots , $y^{(m-1)}(0) = y_0^{(m-1)}$ — начальные значения соответственно выходной и входной величин, а также их производных.

В тех случаях, когда линейная часть системы состоит из нескольких линейных элементов, каждый из



Рис. 1.4.

которых описывается линейным дифференциальным уравнением, необходимо решить систему дифференциальных уравнений, исключив все переменные, кроме входной $y(t)$ и выходной $z(t)$.

Пример. Рассмотрим линейную часть системы, структурная схема которой приведена на рис. 1.4. Пред-

положим, что данная линейная часть системы характеризуется следующей системой линейных дифференциальных уравнений при нулевых начальных условиях:

$$\begin{aligned}y_1(t) &= y(t) - y_2(t), \\ T \frac{dz}{dt} + z &= k_1 y_1(t), \\ y_2(t) &= k_2 \frac{dz}{dt}.\end{aligned}$$

Исключая промежуточные переменные, получим

$$a_0 \frac{dz}{dt} + a_1 z = b_0 y(t),$$

где

$$\begin{aligned}a_0 &= k_2 + \frac{T}{k_1}, \\ a_1 &= \frac{1}{k_1}, \quad b_0 = 1.\end{aligned}$$

2. Передаточные функции. Для описания динамических свойств линейной части системы удобнее всего пользоваться передаточной функцией, которая представляет собой отношение изображения по Лапласу выходной величины $z(t)$ к изображению входной величины $y(t)$ при нулевых начальных условиях

$$K_{\text{л. ч}}(p) = \frac{\mathcal{L}\{z(t)\}}{\mathcal{L}\{y(t)\}} = \frac{Z(p)}{Y(p)}, \quad (1.2)$$

где

$$\mathcal{L}\{ \ } = \int_0^{\infty} e^{pt} \{ \ } dt \quad (1.3)$$

— операция преобразования Лапласа; $Z(p)$, $Y(p)$ — изображения по Лапласу, соответствующие оригиналам $z(t)$ и $y(t)$.

Для нахождения передаточной функции линейной части системы, описываемой, например, дифференциальным уравнением n -го порядка (1.1), надо найти изображение по Лапласу для левой и правой частей дифференциального уравнения, используя при этом теоремы преобразования Лапласа (см. приложение 1).

Таблица оригиналов и соответствующих им изображений по Лапласу приведена в приложении 2.

В данном случае

$$\mathcal{L} \left\{ a_{n-1} \frac{dz}{dt} \right\} = a_{n-1} p Z(p) - a_{n-1} z_0,$$

$$\mathcal{L} \left\{ a_{n-2} \frac{d^2 z}{dt^2} \right\} = a_{n-2} p^2 Z(p) - a_{n-2} p z_0 - a_{n-2} \dot{z}_0,$$

.....

$$\mathcal{L} \left\{ a_0 \frac{d^n z}{dt^n} \right\} = a_0 p^n Z(p) - a_0 p^{n-1} z_0 - a_0 p^{n-2} \dot{z}_0 - \dots - a_0 z_0^{(n-1)}.$$

Аналогичные выражения можно получить и для правой части уравнения.

В результате вместо (1.1) получим

$$\begin{aligned} (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) Z(p) = \\ = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) Y(p) + P_n(p), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} P_n(p) = [z_0(a_{n-1} + a_{n-2}p + \dots + a_0 p^{n-1}) + \\ + \dot{z}_0(a_{n-2} + a_{n-3}p + \dots + a_0 p^{n-2}) + \dots + z_0^{(n-1)}] - \\ - [y_0(b_{m-1} + b_{m-2}p + \dots + b_0 p^{m-1}) + \\ + \dot{y}_0(b_{m-2} + b_{m-3}p + \dots + b_0 p^{m-2}) + \dots + y_0^{(m-1)}] \end{aligned}$$

или

$$Z(p) = K_{\text{л. ч}}(p) Y(p) + F_n(p),$$

где

$$K_{\text{л. ч}}(p) = \frac{Z(p)}{Y(p)} = \frac{b_0 p^m + \dots + b_m}{a_0 p^n + \dots + a_n} = \frac{P(p)}{Q(p)}$$

— передаточная функция линейной части системы;

$F_n(p) = \frac{P_n(p)}{a_0 p^n + \dots + a_n}$ — изображение по Лапласу некоторого фиктивного возмущения $f_n(t)$, действующего на входе линейной части системы (рис. 1.5) и определяемого ненулевыми начальными условиями.

В тех случаях, когда линейная часть системы состоит из нескольких элементов, передаточные функции которых могут быть легко получены указанным выше образом, передаточную функцию линейной части системы можно легко найти путем исключения промежуточных переменных из системы уравнений, записанных относительно изображений по Лапласу, либо, как это

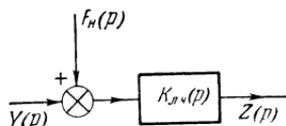


Рис. 1.5.

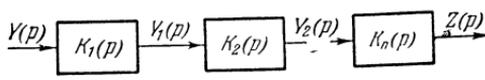


Рис. 1.6.

принято в линейной теории автоматического регулирования, на основе использования правил нахождения передаточных функций последовательного соединения

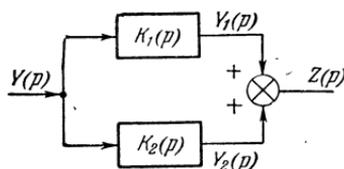


Рис. 1.7.

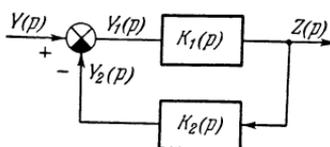


Рис. 1.8.

(рис. 1.6), параллельного соединения (рис. 1.7) и соединения с обратной связью (рис. 1.8). Эти правила можно записать в следующем виде:

1. Для последовательного соединения n элементов

$$K(p) = \frac{Z(p)}{Y(p)} = K_1(p) K_2(p) \dots K_n(p). \quad (1.5)$$

2. Для параллельного соединения

$$K(p) = \frac{Z(p)}{Y(p)} = K_1(p) + K_2(p). \quad (1.6)$$

3. Для соединения с обратной связью

$$K(p) = \frac{Z(p)}{Y(p)} = \frac{K_1(p)}{1 + K_1(p) K_2(p)}. \quad (1.7)$$

Пример. Найдём передаточную функцию линейной части системы, изображённую на рис. 1.9.

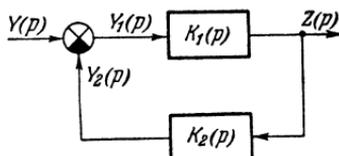


Рис. 1.9.

В этом случае каждый из двух элементов (рис. 1.9) будет характеризоваться следующими передаточными функциями:

$$K_1(p) = \frac{\mathcal{L}\{z(t)\}}{\mathcal{L}\{y_1(t)\}} = \frac{k_1}{Tp + 1},$$

$$K_2(p) = \frac{\mathcal{L}\{y_2(t)\}}{\mathcal{L}\{z(t)\}} = k_2p.$$

Подставляя найденные выражения $K_1(p)$ и $K_2(p)$ в (1.7), определяем искомую передаточную функцию линейной части системы:

$$K_{\text{л. ч}}(p) = \frac{Z(p)}{Y(p)} = \frac{k_1}{k_1 \left(k_2 + \frac{T}{k_1} \right) p + 1}.$$

Таким образом, приведенные выше три правила (1.5), (1.6) и (1.7) позволяют быстро находить передаточную функцию линейной части системы.

3. Частотные характеристики. Динамические свойства линейной части системы могут также однозначно описываться частотной характеристикой, которая характеризует реакцию линейной части системы в установившемся режиме на гармоническое входное воздействие. Если известна передаточная функция линейной части системы, то соответствующую ей частотную характеристику можно легко получить в результате подстановки $p = j\omega$ в $K_{\text{л. ч}}(p)$.

Из сказанного следует, что если линейная часть системы состоит из нескольких линейных элементов, ча-

стотные характеристики которых известны, то для нахождения $K_{л.ч}(j\omega)$ можно пользоваться теми же правилами, что и для нахождения передаточных функций последовательного и параллельного соединений и соединения с обратной связью, которые были записаны нами ранее, а именно:

1. Частотная характеристика последовательного соединения элементов (см. рис. 1.6) равна произведению частотных характеристик, соответствующих каждому элементу, т. е.

$$K(j\omega) = K_1(j\omega) K_2(j\omega) \dots K_n(j\omega).$$

2. Частотная характеристика параллельного соединения элементов (см. рис. 1.7) равна алгебраической сумме отдельных частотных характеристик, т. е.

$$K(j\omega) = K_1(j\omega) + K_2(j\omega).$$

3. Частотная характеристика соединения с обратной связью (см. рис. 1.8) представляется в виде дроби, числитель которой содержит частотную характеристику прямой части, а знаменатель — единицу плюс частотную характеристику разомкнутой системы, т. е.

$$K(j\omega) = \frac{K_1(j\omega)}{1 + K_1(j\omega) K_2(j\omega)}.$$

а) Различные формы представления частотной характеристики линейной части системы. Так как частотная характеристика линейной части системы представляет собой комплексную функцию ω , то ее можно представить в следующем виде:

$$K_{л.ч}(j\omega) = K_{0.л.ч}(\omega) e^{j\varphi_{л.ч}(\omega)},$$

где $K_{0.л.ч}(\omega)$ — амплитудно-частотная характеристика линейной части системы; $\varphi_{л.ч}(\omega)$ — фазо-частотная характеристика линейной части системы.

Как известно из линейной теории, для минимально-фазовых линейных частей системы достаточно задать $K_{0.л.ч}(\omega)$, либо $\varphi_{л.ч}(\omega)$. Известны способы, позволяющие в этом случае определять $K_{0.л.ч}(\omega)$ по $\varphi_{л.ч}(\omega)$ и наоборот (см. работу Г. Бодэ [1]),

Выражение для $K_{л.ч}(j\omega)$ можно также записать в следующем виде:

$$K_{л.ч}(j\omega) = U_{л.ч}(\omega) + jV_{л.ч}(\omega),$$

где $U_{л.ч}(\omega)$, $V_{л.ч}(\omega)$ — соответственно вещественная и мнимая частотные характеристики линейной части системы, которые связаны с амплитудно-частотными характеристиками следующими соотношениями:

$$U_{л.ч}(\omega) = K_{0л.ч}(\omega) \cos \varphi_{л.ч}(\omega),$$

$$V_{л.ч}(\omega) = K_{0л.ч}(\omega) \sin \varphi_{л.ч}(\omega)$$

и

$$K_{0л.ч}(\omega) = \sqrt{V_{л.ч}^2(\omega) + U_{л.ч}^2(\omega)},$$

$$\varphi_{л.ч}(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V_{л.ч}(\omega)}{U_{л.ч}(\omega)}.$$

б) **Логарифмические частотные характеристики.** При исследовании линейных систем автоматического управления широкое распространение получили так называемые *логарифмические частотные характеристики*, которые в ряде случаев позволяют значительно упростить исследование систем. Логарифмические частотные характеристики впервые стали применяться в теории связи. В основном это было вызвано удобством изображения на одном графике величин, отличающихся между собой в сотни и тысячи раз.

В теорию автоматического управления логарифмические частотные характеристики были введены американским ученым Г. Бодэ [1] и уже в 1946 г. впервые были использованы А. Мак-Колом [1] для исследования следящих систем и систем регулирования. Метод логарифмических частотных характеристик является одним из основных инженерных методов, используемых для исследования линейных систем.

В теории линейных систем автоматического управления используются два типа логарифмических частотных характеристик: *логарифмические амплитудно-частотные* $L_{л.ч}(\omega)$ и *фазо-частотные* $\varphi_{л.ч}(\omega)$ *характеристики*; *логарифмические частотные характеристики в декарто-*

вой системе координат $L_{л.ч}(\omega) = f[\varphi_{л.ч}(\omega)]$, где ω входит в качестве параметра.

Логарифмической амплитудно-частотной характеристикой $L_{л.ч}(\omega)$ линейной части системы называется характеристика

$$L_{л.ч}(\omega) = 20 \lg K_{0 л.ч}(\omega).$$

Логарифмической фазо-частотной характеристикой называется характеристика $\varphi_{л.ч}(\omega)$, имеющая логарифмический масштаб по оси абсцисс. При изображении $L_{л.ч}(\omega)$ и $\varphi_{л.ч}(\omega)$ по оси абсцисс используется логарифмический масштаб частот ω . По оси ординат значения $L_{л.ч}(\omega)$ измеряются в децибеллах, а $\varphi_{л.ч}(\omega)$ — в градусах. При использовании логарифмических характеристик обычно пользуются следующими двумя терминами.

При изменении частоты вдвое говорят, что частота изменилась *на октаву*, а при изменении в 10 раз — *на декаду*.

Если пользоваться приближенными способами, то логарифмические частотные характеристики для типовых звеньев строить значительно проще, чем обычные амплитудно-фазовые характеристики. Рассмотрим, какой вид имеют $L(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ для типовых линейных звеньев, являющихся составными элементами большинства линейных частей системы.

Безынерционное звено. Частотная характеристика безынерционного звена имеет вид

$$K(j\omega) = k.$$

Логарифмические амплитудно- и фазо-частотные характеристики в этом случае равны

$$L(\omega) = 20 \lg k, \quad \varphi(\omega) = 0.$$

Таким образом, $L(\omega)$ имеет вид прямой, параллельной оси абсцисс при $k \neq 1$, причем при $k > 1$ прямая $L(\omega) > 0$, а при $k < 1$ $L(\omega) < 0$, при $k = 1$ прямая совпадает с осью абсцисс (рис. 1.10).

Интегрирующее звено. Частотная характеристика интегрирующего звена имеет вид

$$K(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

Соответственно логарифмические амплитудно- и фазочастотные характеристики равны (рис. 1.11)

$$L(\omega) = -20 \lg \omega,$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, логарифмическая амплитудно-частотная характеристика имеет вид прямой, проходящей через точку $\omega=1$ с наклоном минус 20 децибелл на декаду (рис. 1.11, а), а логарифмическая фазочастотная

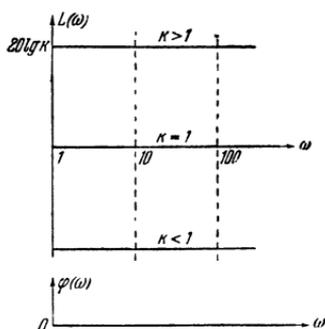


Рис. 1.10.

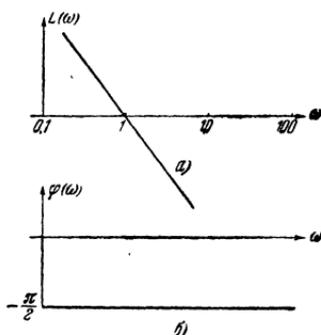


Рис. 1.11.

характеристика — вид прямой, параллельной оси абсцисс (рис. 1.11, б).

Звено первого порядка. Частотная характеристика устойчивого звена первого порядка имеет вид

$$K(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega + 1} = \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} e^{-j\arctg T\omega}.$$

Соответственно логарифмические амплитудно- и фазочастотные характеристики равны

$$L(\omega) = -20 \lg \sqrt{T^2\omega^2 + 1},$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg T\omega.$$

При $T\omega \gg 1$

$$L(\omega) = -20 \lg T\omega$$

и имеет вид прямой, проходящей через точку $\omega = 1/T$, которая называется *сопрягающей частотой*.

При $T\omega \ll 1$

$$L(\omega) \approx 0.$$

В этом случае логарифмическая амплитудно-частотная характеристика совпадает с осью абсцисс. Следовательно, приближенная характеристика $L(\omega)$, называемая *асимптотической*, состоит из отрезков двух прямых, как показано на рис. 1.12.

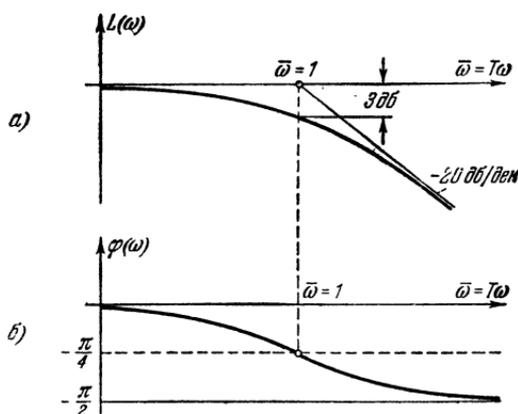


Рис. 1.12.

Если в (1.10) подставить различные значения ω и построить кривую $L(\omega)$, то точная кривая будет отличаться от асимптотической. Наибольшее отличие, равное -3 дБ , будет в точке $\bar{\omega} = T\omega = 1$. При удалении от этой точки вправо и влево разность между асимптотической и точной характеристиками ΔL будет стремиться к нулю (рис. 1.12).

В тех случаях, когда надо построить $L(\omega)$ более точно, можно воспользоваться таблицей разностей ΔL при разных значениях $\bar{\omega}$ (см. табл. 1), либо графиком $\Delta L(\bar{\omega})$ (рис. 1.13).

Т а б л и ц а 1

$\bar{\omega} = T\omega$	0,1	0,25	0,4	0,5	1,0	2,0	2,5	4,0	10,0
ΔL	0,04	0,32	0,65	1,0	3,01	1,0	0,65	0,32	0,04

Логарифмическая фазо-частотная характеристика (см. рис. 1.12, б)

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} T\omega$$

в логарифмическом масштабе частот является кососимметричной относительно точки $\bar{\omega} = 1$, при которой

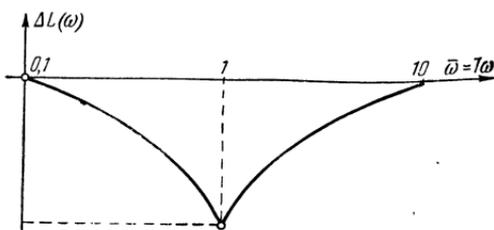


Рис. 1.13.

$\varphi(1) = -45^\circ$. Для построения кривой $\varphi(\bar{\omega})$ в рассматриваемом диапазоне частот удобно пользоваться номограммой (рис. 1.14).

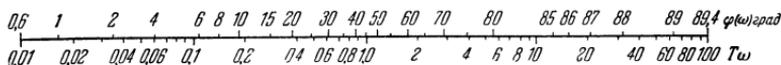


Рис. 1.14.

При построении логарифмических частотных характеристик для неустойчивого звена первого порядка, имеющего частотную характеристику

$$K(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega - 1} = \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} e^{-j(\pi - \operatorname{arctg} T\omega)},$$

логарифмическая амплитудно-частотная характеристика $L(\omega)$ совпадает с логарифмической характеристикой

устойчивого звена первого порядка, а логарифмические фазо-частотные характеристики различны (рис. 1.15).

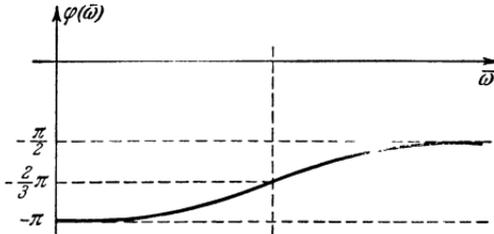


Рис. 1.15.

Звено второго порядка. Частотная характеристика устойчивого звена второго порядка имеет вид

$$K(j\omega) = \frac{1}{-T^2\omega^2 + 2j\xi T\omega + 1} = \frac{1}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}} e^{-j \arctg \frac{2\xi T\omega}{1-T^2\omega^2}}.$$

Логарифмические амплитудно- и фазо-частотные характеристики равны

$$L(\bar{\omega}) = -20 \lg \sqrt{(1 - \bar{\omega}^2)^2 + (2\xi\bar{\omega})^2},$$

$$\varphi(\bar{\omega}) = -\arctg \frac{2\xi\bar{\omega}}{1 - \bar{\omega}^2},$$

где $\bar{\omega} = T\omega$.

Кривые $L(\bar{\omega})$ и $\varphi(\bar{\omega})$ приведены на рис. 1.16.

Как следует из рис. 1.16, логарифмическая амплитудно-частотная характеристика $L(\bar{\omega})$ имеет пик, величина которого зависит от величины коэффициента демпфирования ξ . Поэтому изображение характеристики $L(\bar{\omega})$ в виде двух отрезков в окрестности точки $\bar{\omega} = T\omega = 1$ может оказаться недопустимым. При $0,38 < \xi < 0,71$ максимальное расхождение между точной и асимптотической характеристиками не превышает 3 дб.

При $\bar{\omega} = T\omega \ll 1$

$$L(\bar{\omega}) \approx 0,$$

при $\bar{\omega} = T\omega \gg 1$

$$L(\bar{\omega}) \approx -40 \lg \bar{\omega}.$$

Таким образом, асимптотой характеристики $L(\bar{\omega})$ при малых значениях $\bar{\omega}$ является ось абсцисс $\bar{\omega}$, а при больших — прямая, имеющая наклон минус 40 дБ/декада.

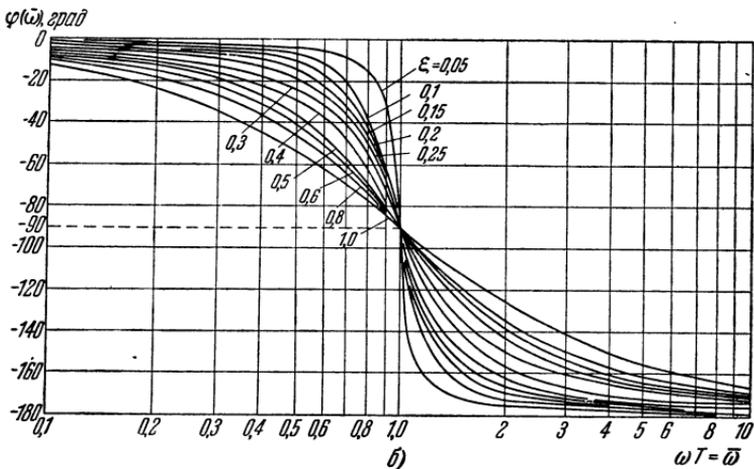
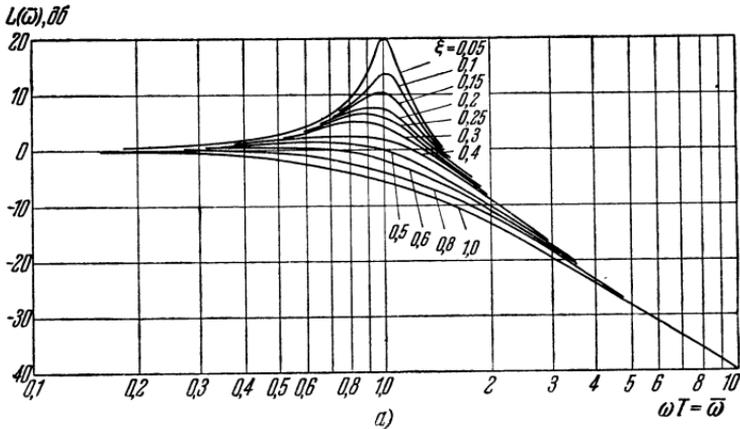


Рис. 1.16.

На рис. 1.17 изображены кривые отклонений точных логарифмических амплитудно-частотных характеристик от асимптотических.

Аналогично можно легко получить правила построения логарифмических частотных характеристик для других типовых линейных звеньев.

Логарифмические амплитудно- и фазо-частотные характеристики последовательного соединения, соединения с обратной связью и параллельного соединения элементов.

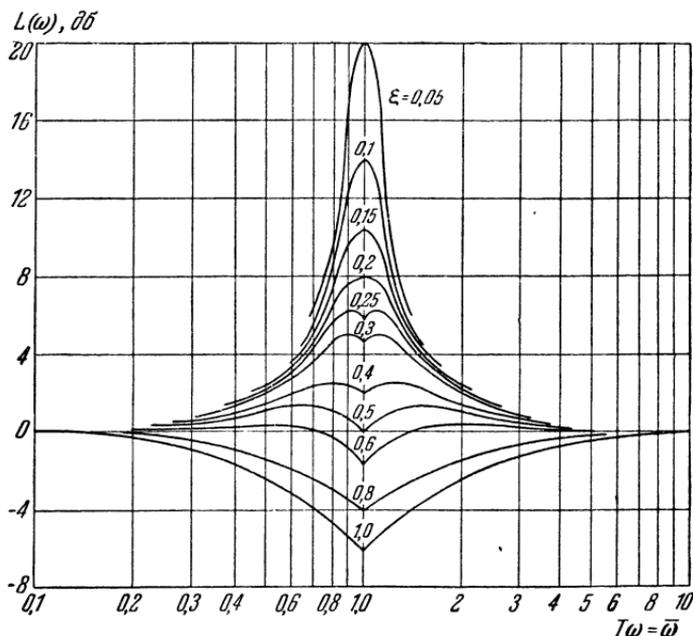


Рис. 1.17.

Очень часто линейная часть системы представляет собой соединение нескольких элементов, логарифмические характеристики которых известны. В этом случае возникает задача определения $L(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ линейной части системы по логарифмическим частотным характеристикам отдельных элементов, входящих в линейную часть системы.

Последовательное соединение элементов. Предположим, что линейная часть системы состоит из последовательного соединения двух элементов, частотные характеристики которых $K_1(j\omega)$ и $K_2(j\omega)$, а следовательно,

известны и логарифмические частотные характеристики $L_1(\omega)$, $L_2(\omega)$ и $\varphi_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega)$ (рис. 1.18). Частотная характеристика $K_{\text{по}}(j\omega)$ линейной части системы в данном случае равна

$$K_{\text{по}}(j\omega) = K_1(j\omega) K_2(j\omega)$$

или

$$K_{\text{по}}(j\omega) = K_{0\text{по}}(\omega) e^{j\varphi_{\text{по}}(\omega)} = K_{10}(\omega) K_{20}(\omega) e^{j[\varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega)]}. \quad (1.8)$$

Тогда в соответствии с принятым определением логарифмические амплитудно- и фазо-частотные характеристики линейной части системы будут иметь следующий вид:

$$L_{\text{по}}(\omega) = 20 \lg K_{10}(\omega) + 20 \lg K_{20}(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega), \quad (1.9)$$

$$\varphi_{\text{по}}(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega). \quad (1.10)$$

Таким образом, логарифмические амплитудно- и фазо-частотные характеристики линейной части системы,

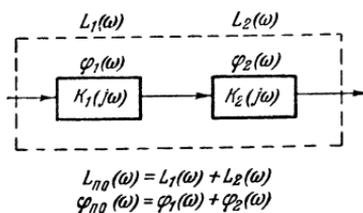


Рис. 1.18.

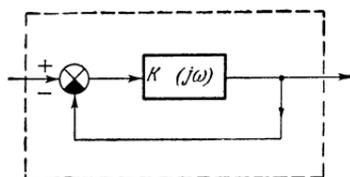


Рис. 1.19.

состоящей из двух последовательно включенных элементов, соответственно равны сумме логарифмических амплитудно- и фазо-частотных характеристик отдельных элементов.

Это правило справедливо и при большем числе последовательно соединенных элементов.

Соединение с обратной связью. Частотная характеристика соединения с обратной связью (рис. 1.19) равна

$$K_{\text{о.с}}(j\omega) = \frac{K(j\omega)}{1 + K(j\omega)}$$

или

$$K_{\text{о.с}}(j\omega) = \frac{K_0(\omega) e^{j\varphi(\omega)}}{1 + K_0(\omega) e^{j\varphi(\omega)}} = K_{0\text{о.с}}(\omega) e^{j\varphi_{\text{о.с}}(\omega)}. \quad (1.11)$$

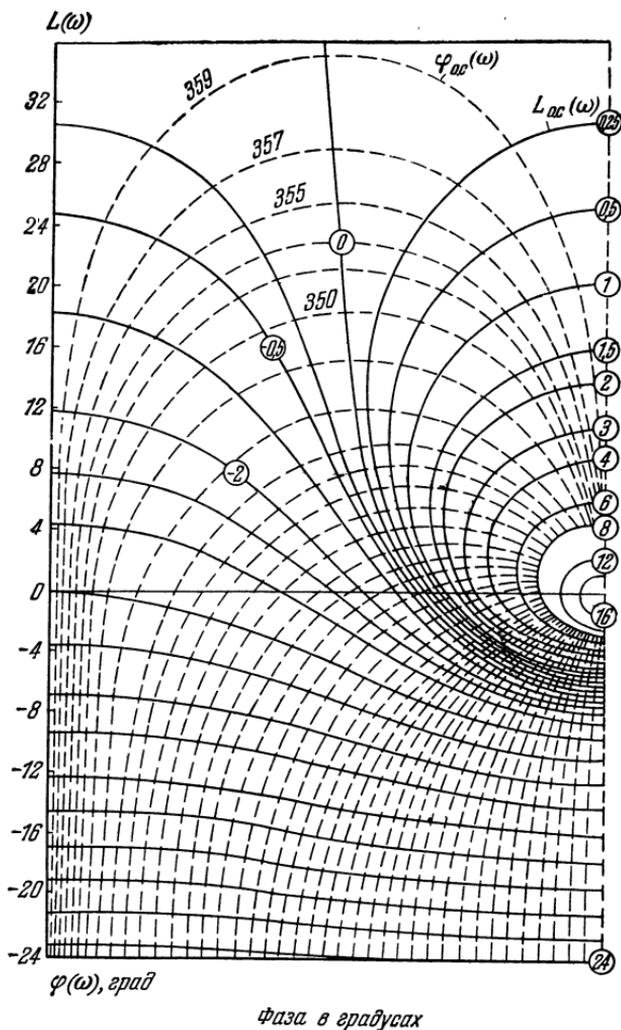


Рис. 1.20.

Из (1.11) можно получить выражения для $K_0(\omega)$ и $\varphi(\omega)$:

$$K_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2 \cos \varphi_{0.c}(\omega)}{K_{0.o.c}(\omega)} + \frac{1}{K_{0.o.c}^2(\omega)}}}, \quad (1.12)$$

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \left[\frac{\sin \varphi_{0.c}(\omega)}{\cos \varphi_{0.c}(\omega) - K_{0.o.c}(\omega)} \right]. \quad (1.13)$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика разомкнутой системы имеет вид

$$L_{o.c}(\omega) = -20 \lg \sqrt{1 - \frac{2 \cos \varphi_{0.c}(\omega)}{K_{0.o.c}(\omega)} + \frac{1}{K_{0.o.c}^2(\omega)}}. \quad (1.14)$$

Задаваясь различными значениями $\varphi_{0.c}$ и $K_{0.o.c}$, находим соответствующие значения $L(\omega)$ и $\varphi(\omega)$.

Используя декартову систему координат и откладывая по оси ординат $L(\omega)$, а по оси абсцисс $\varphi(\omega)$, можно построить кривые равных значений $L_{o.c}(\omega)$ и $\varphi_{0.c}(\omega)$ (рис. 1.20). Приведенная номограмма, впервые использовавшаяся Д. Никольсом*), позволяет по логарифмическим амплитудно- и фазо-частотным характеристикам разомкнутой линейной части системы $L(\omega) =$

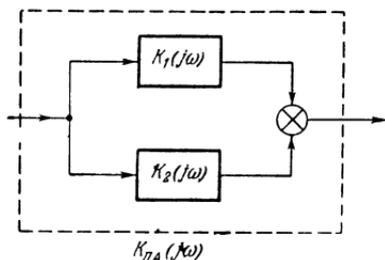


Рис. 1.21.

$= 20 \lg K_0(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ находить логарифмические частотные характеристики замкнутой системы

$$L_{o.c}(\omega) \text{ и } \varphi_{o.c}(\omega). \quad (1.15)$$

Параллельное соединение элементов. Если линейная часть системы состоит из параллельного соединения двух элементов (рис. 1.21), то частотная характеристика такого соединения равна

$$K_{\text{па}}(j\omega) = K_1(j\omega) + K_2(j\omega) = K_{0\text{па}}(\omega) e^{-j\varphi_{\text{па}}(\omega)}$$

или

$$K_{\text{па}}(j\omega) = K_{10}(\omega) e^{j\varphi_1(\omega)} + K_{20}(\omega) e^{j\varphi_2(\omega)}. \quad (1.16)$$

*) См. Теория следящих систем, М., Изд-во ИЛ, 1947, под ред. Дж. Никольса и Р. Филлипса.

Если известны логарифмические амплитудно- и фазо-частотные характеристики каждого элемента $L_1(\omega)$, $L_2(\omega)$, $\varphi_1(\omega)$ и $\varphi_2(\omega)$, то для нахождения логарифмических амплитудно- и фазо-частотных характеристик параллельного соединения $L_{\text{па}}(\omega) = 20 \lg K_{0 \text{ па}}(\omega)$ и $\varphi_{\text{па}}(\omega)$ можно воспользоваться обобщенной для данного случая номограммой, использовавшейся для нахождения логарифмических частотных характеристик соединения с обратной связью

$$K_{0. \text{с}}(j\omega) = \frac{K_0(\omega) e^{j\varphi(\omega)}}{1 + K_0(\omega) e^{j\varphi(\omega)}} = K_{0. \text{с}}(\omega) e^{j\varphi_{0. \text{с}}(\omega)}.$$

Возможность модификации указанной номограммы была показана в работе А. И. Гузенко [1]. Покажем возможность такой модификации. Для этого представим выражение для обратной частотной характеристики соединения с обратной связью в виде:

$$\frac{e^{-j\varphi_{0. \text{с}}(\omega)}}{K_{0. \text{с}}(\omega)} = 1 + \frac{1}{K_0(\omega)} \cos \varphi(\omega) - j \frac{1}{K_0(\omega)} \sin \varphi(\omega). \quad (1.17)$$

Преобразуем также выражение для частотной характеристики параллельного соединения двух элементов к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{K_{0 \text{ па}}(\omega)}{K_{10}(\omega)} e^{j[\varphi_{\text{па}}(\omega) - \varphi_1(\omega)]} &= 1 + \frac{K_{20}(\omega)}{K_{10}(\omega)} \cos [\varphi_2(\omega) - \varphi_1(\omega)] - \\ &- j \frac{K_{20}(\omega)}{K_{10}(\omega)} \sin [\varphi_2(\omega) - \varphi_1(\omega)]. \quad (1.18) \end{aligned}$$

Из сравнения выражений (1.17) и (1.18) следует, что при выполнении перечисленных ниже условий для нахождения логарифмических частотных характеристик, соответствующих параллельному соединению двух элементов (см. рис. 1.21), могут быть использованы номограммы Никольса, если положить

$$\frac{1}{K_{0. \text{с}}(\omega)} = \frac{K_{0 \text{ па}}(\omega)}{K_{10}(\omega)}, \quad (1.19)$$

$$\frac{1}{K_0(\omega)} = \frac{K_{20}(\omega)}{K_{10}(\omega)}, \quad (1.20)$$

$$\varphi_2(\omega) - \varphi_1(\omega) = \varphi(\omega), \quad (1.21)$$

$$\varphi_{0. \text{с}}(\omega) = \varphi_{\text{па}}(\omega) - \varphi_1(\omega). \quad (1.22)$$

Записывая вместо (1.19)—(1.22) выражения для соответствующих им логарифмических характеристик, получим:

$$-L_{o.c}(\omega) = L_{па}(\omega) - L_1(\omega), \quad (1.23)$$

$$-L(\omega) = L_2(\omega) - L_1(\omega), \quad (1.24)$$

$$\mp \varphi(\omega) = \pm [\varphi_2(\omega) - \varphi_1(\omega)], \quad (1.25)$$

$$\pm \varphi_{o.c}(\omega) = \mp [\varphi_{па}(\omega) - \varphi_1(\omega)], \quad (1.26)$$

где

$$L_{o.c}(\omega) = 20 \lg K_{o.c}(\omega),$$

$$L_{па}(\omega) = 20 \lg K_{опа}(\omega),$$

$$L_1(\omega) = 20 \lg K_{10}(\omega),$$

$$L_2(\omega) = 20 \lg K_{20}(\omega).$$

Из (1.23)—(1.26) следует правило получения и использования модифицированной номограммы Никольса (рис. 1.22).

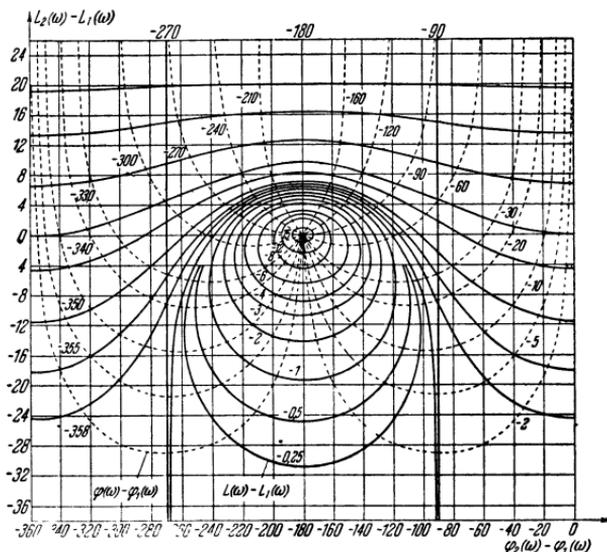


Рис. 1.22.

Для того чтобы найти логарифмические амплитудно- и фазо-частотные характеристики $L_{па}(\omega) = 20 \lg K_{опа}\omega$

и $\varphi_{па}(\omega)$ по известным логарифмическим амплитудно- и фазо-частотным характеристикам отдельных элементов, необходимо:

1. Построить логарифмические характеристики $L_1(\omega)$, $L_2(\omega)$ и $\varphi_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega)$.

2. Построить логарифмические характеристики $L_2(\varphi) - L_1(\omega)$ и $\varphi_2(\omega) - \varphi_1(\omega)$.

3. Перестроить найденные характеристики $\Delta L(\omega)$ и $\Delta\varphi(\omega)$ в декартовой системе на плоскости номограммы (рис. 1.22).

4. По пересечениям с кривыми номограммы определить $L_{па}(\omega) - L_1(\omega)$ и $\varphi_{па}(\omega) - \varphi_1(\omega)$ при соответствующих этим пересечениям значениях ω .

5. Из найденных $L_{па}(\omega) - L_1(\omega)$ и $\varphi_{па}(\omega) - \varphi_1(\omega)$ не трудно найти $L_{па}(\omega)$ и $\varphi_{па}(\omega)$, так как $L_1(\omega)$ и $\varphi_1(\omega)$ известны.

Для нахождения частотных характеристик, соответствующих параллельному соединению двух элементов

$$K_{па}(j\omega) = K_1(j\omega) + K_2(j\omega),$$

можно также воспользоваться номограммой, приведенной в книге П. Наслена [1] (рис. 1.23), которая позволяет определять действительную и мнимую части $U_1(\omega)$, $V_1(\omega)$, $U_2(\omega)$ и $V_2(\omega)$, соответствующие

$$K_1(j\omega) = U_1(\omega) + jV_1(\omega),$$

$$K_2(j\omega) = U_2(\omega) + jV_2(\omega).$$

Для этого требуется:

1. Построить логарифмические амплитудно- и фазо-частотные характеристики $L_1(\omega)$, $\varphi_1(\omega)$, $L_2(\omega)$ и $\varphi_2(\omega)$.

2. Построить логарифмические частотные характеристики для каждого элемента в декартовой системе координат на плоскости номограммы (рис. 1.23), т. е.

$$L_1(\omega) = Q_1[\varphi_1(\omega)] \quad \text{и} \quad L_2(\omega) = Q_2[\varphi_2(\omega)].$$

3. По точкам пересечения логарифмических характеристик с кривыми номограммы определить $U_1(\omega)$, $V_1(\omega)$, $U_2(\omega)$, $V_2(\omega)$ при значениях ω , соответствующих точкам пересечения. Складывая $U_1(\omega)$ и $U_2(\omega)$, $U_1(\omega)$ и $V_2(\omega)$,

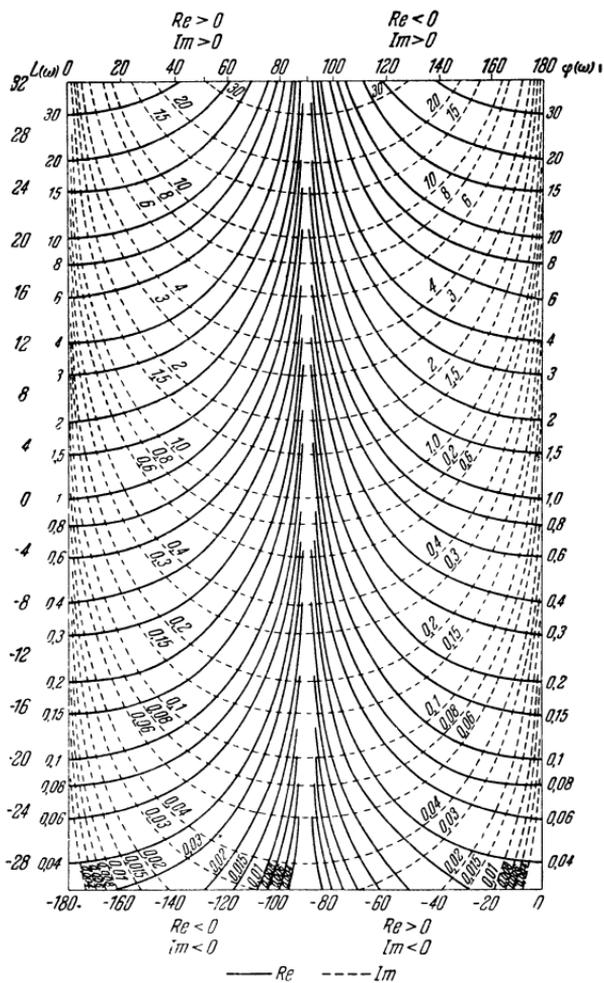


Рис. 1.23.

находим действительную и мнимую части $U_{\text{па}}(\omega)$ и $V_{\text{па}}(\omega)$ параллельного соединения

$$K_{\text{па}}(j\omega) = U_{\text{па}}(\omega) + jV_{\text{па}}(\omega).$$

4. Зная $U_{\text{па}}(\omega)$ и $V_{\text{па}}(\omega)$, определяем искомые логарифмические амплитудно- и фазо-частотные характеристики параллельного соединения двух элементов.

В заключение следует отметить, что практически удобнее пользоваться описанным выше способом, предложенным А. И. Гузенко [1].

Определение логарифмических характеристик в том случае, когда линейная часть системы не может быть представлена в виде соединения элементарных звеньев. При рассмотрении различных способов получения логарифмических частотных характеристик последовательного и параллельного соединений и соединения с обратной связью предполагалось, что элементы, входящие в эти соединения, могут быть представлены в виде элементарных звеньев.

Иногда имеют место случаи, когда исходная линейная часть системы не может быть представлена в виде соединения элементарных звеньев.

В этом случае можно воспользоваться преобразованием исходной системы к новой структуре, которую можно назвать канонической (Б. Н. Наумов [7]). Канонической структурной схеме, соответствующей исходной линейной части системы n -го порядка, характеризуемой передаточной функцией

$$K_{\text{л. ч}}(p) = \frac{Z(p)}{Y(p)} = \frac{b_0 p^m + \dots + b_m}{a_0 p^n + \dots + a_n},$$

соответствует система, приведенная на рис. 1.24, описываемая выражением, которое нетрудно получить из данного выражения

$$Z(p) = \left[\frac{b_0}{a_0} p^{m-n} + \dots + \frac{b_m}{a_0} p^{-n} \right] Y(p) - \left[\frac{a_1}{a_0} p^{-1} + \frac{a_2}{a_0} p^{-2} + \dots + \frac{a_n}{a_0} p^{-n} \right] Z(p).$$

Вводя обозначения

$$K_y(p) = \frac{b_0}{a_0} p^{m-n} + \dots + \frac{b_m}{a_0} p^{-n}, \quad (1.27)$$

$$K_z(p) = \frac{a_1}{a_0} p^{-1} + \frac{a_2}{a_0} p^{-2} + \dots + \frac{a_n}{a_0} p^{-n}, \quad (1.28)$$

получим

$$Z(p) = K_y(p) Y(p) - K_z(p) Z(p). \quad (1.29)$$

Тогда, как следует из рис. 1.24, можно записать выражение для передаточной функции линейной части системы в следующем виде:

$$K_{\text{л. ч.}}(p) = \frac{Z(p)}{Y(p)} = \frac{K_y(p)}{1 + K_z(p)}. \quad (1.30)$$

После проведенного структурного преобразования

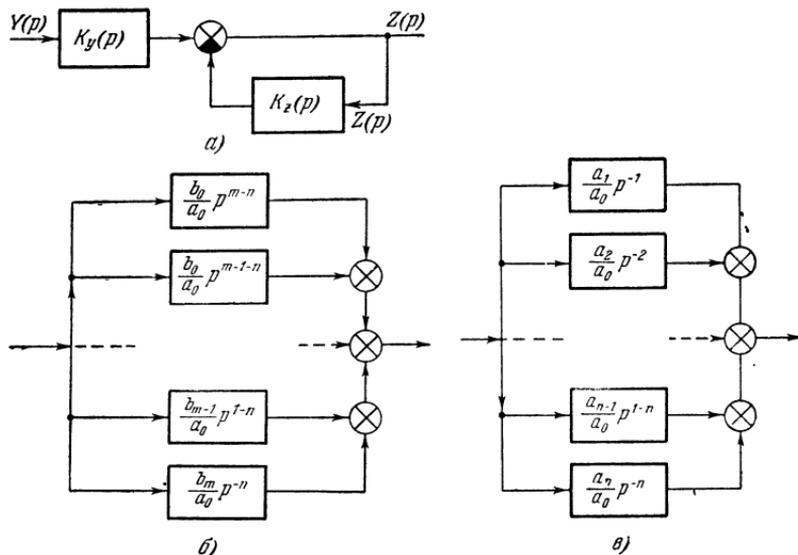


Рис. 1.24.

методика нахождения логарифмических частотных характеристик сводится к следующему:

1. Строятся логарифмические амплитудно- и фазочастотные характеристики, соответствующие $K_y(p)$ и $K_z(p)$.

2. Определяются логарифмические характеристики, соответствующие выражению

$$\frac{K_y(p)}{1 + K_z(p)}.$$

Пример. Найдем логарифмические амплитудно- и фазо-частотные характеристики для линейной части системы, характеризуемой передаточной функцией (рис. 1.25, а)

$$K_{л.ч}(p) = \frac{Z(p)}{Y(p)} = \\ = \frac{1}{p^3 + p^2 + p + 1}.$$

В соответствии с изложенной выше методикой для нахождения логарифмических частотных характеристик:

1. Преобразуем исходную линейную часть системы (рис. 1.25, а) к канонической структуре (рис. 1.25, б). Тогда передаточную функцию линейной части системы можно записать в виде

$$K_{л.ч}(p) = \frac{Z(p)}{Y(p)} = \frac{K_y(p)}{1 + K_z(p)},$$

где

$$K_y(p) = \frac{1}{p^3},$$

$$K_z(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3}.$$

2. Воспользуемся приведенной выше номограммой для нахождения логарифмических частотных характеристик суммы по логарифмическим частотным характеристикам каждого слагаемого.

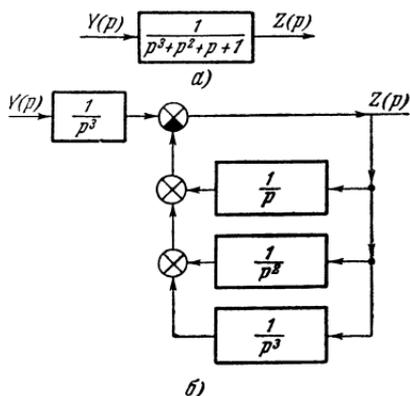


Рис. 1.25.

Для этого обозначим

$$K_1(p) = \frac{1}{p},$$

$$K_2(p) = \frac{1}{p^2},$$

$$K_3(p) = \frac{1}{p^3}$$

и соответственно

$$L_1(\omega) = 20 \lg K_{10}(\omega),$$

$$\varphi_1(\omega) = \arg K_1(j\omega),$$

$$L_2(\omega) = 20 \lg K_{20}(\omega),$$

$$\varphi_2(\omega) = \arg K_2(j\omega),$$

$$L_3(\omega) = 20 \lg K_{30}(\omega),$$

$$\varphi_3(\omega) = \arg K_3(j\omega).$$

Определим вначале (рис. 1.26)

$$L'(\omega) = 20 \lg \text{mod} [K_1(j\omega) + K_2(j\omega)],$$

$$\varphi'(\omega) = \arg [K_1(j\omega) + K_2(j\omega)].$$

Для этого строим кривые (рис. 1.26)

$$L_2(\omega) - L_1(\omega),$$

$$\varphi_2(\omega) - \varphi_1(\omega),$$

далее кривую $L_2(\omega) - L_1(\omega) = Q_1[\varphi_2(\omega) - \varphi_1(\omega)]$ на плоскости номограммы (рис. 1.27) и определяем

$$L'(\omega) - L_1(\omega),$$

$$\varphi'(\omega) - \varphi_1(\omega),$$

а затем и искомые $L'(\omega)$ и $\varphi'(\omega)$.

Все необходимые построения приведены на рис. 1.27.

3. Точно так же определяем логарифмические характеристики

$$L_2(\omega) = 20 \lg \text{mod} [K_1(j\omega) + K_2(j\omega) + K_3(j\omega)],$$

$$\varphi_2(\omega) = \arg [K_1(j\omega) + K_2(j\omega) + K_3(j\omega)].$$

Для этого сначала строим в декартовой системе координат на плоскости номограммы $L'(\omega) - L_3(\omega) = Q_2[\varphi'(\omega) - \varphi_3(\omega)]$ (рис. 1.28) и определяем $L_z(\omega) -$

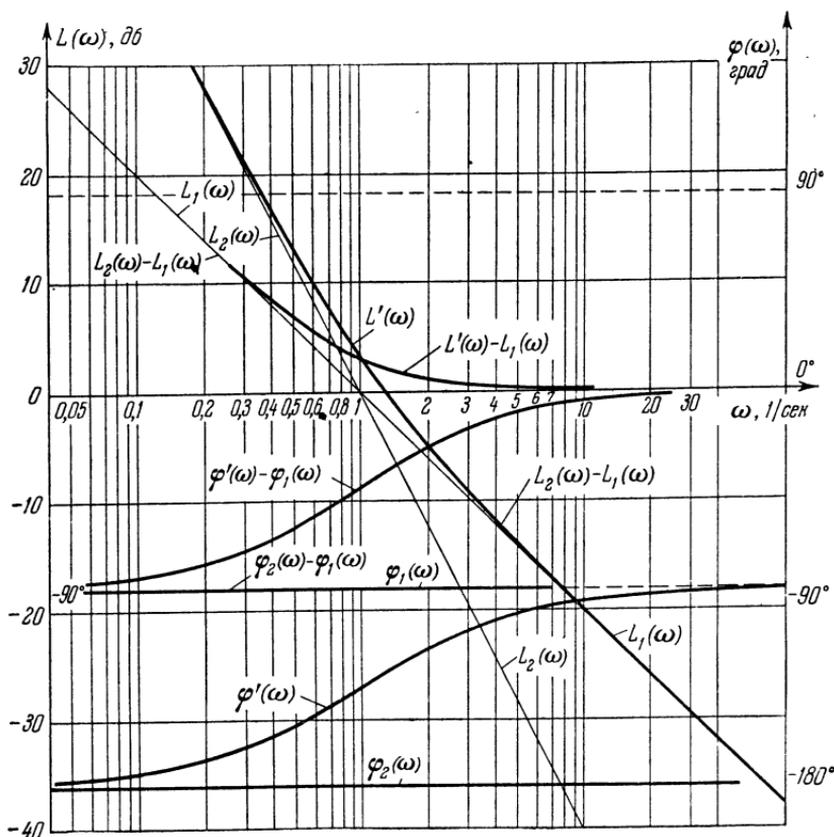


Рис. 1.26.

$-L_3(\omega)$ и $\varphi_2(\omega) - \varphi_3(\omega)$. Так как $L_3(\omega)$ и $\varphi_3(\omega)$ известны, то нахождение $L_z(\omega)$ и $\varphi_2(\omega)$ не представляет труда.

Все построения, необходимые для нахождения $L_z(\omega)$ и $\varphi_2(\omega)$, приведены на рис. 1.27 и рис. 1.28.

4. Аналогично, используя ту же номограмму, находим логарифмические амплитудно- и фазо-частотные

Все необходимые построения приведены на рис. 1.29.

В заключение отметим, что для нахождения логарифмических частотных характеристик линейной части системы, когда ее нельзя представить в виде соединения

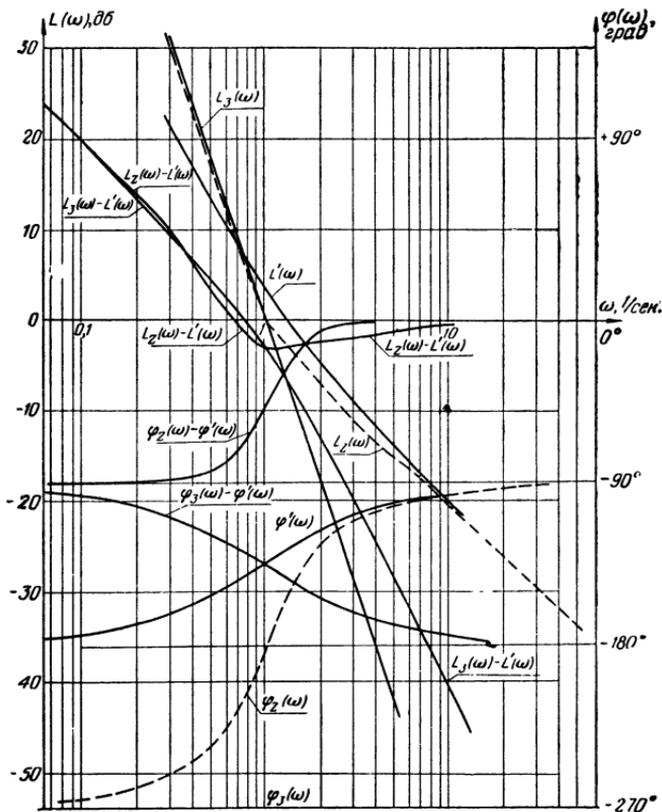


Рис. 1.28.

элементарных звеньев, можно воспользоваться и другими структурными преобразованиями, что в ряде случаев может значительно скорее дать искомый результат. Более подробно со структурными методами преобразования систем автоматического управления можно ознакомиться в работе Б. Н. Петрова [2].

Один из методов структурных преобразований, который может быть использован для нахождения

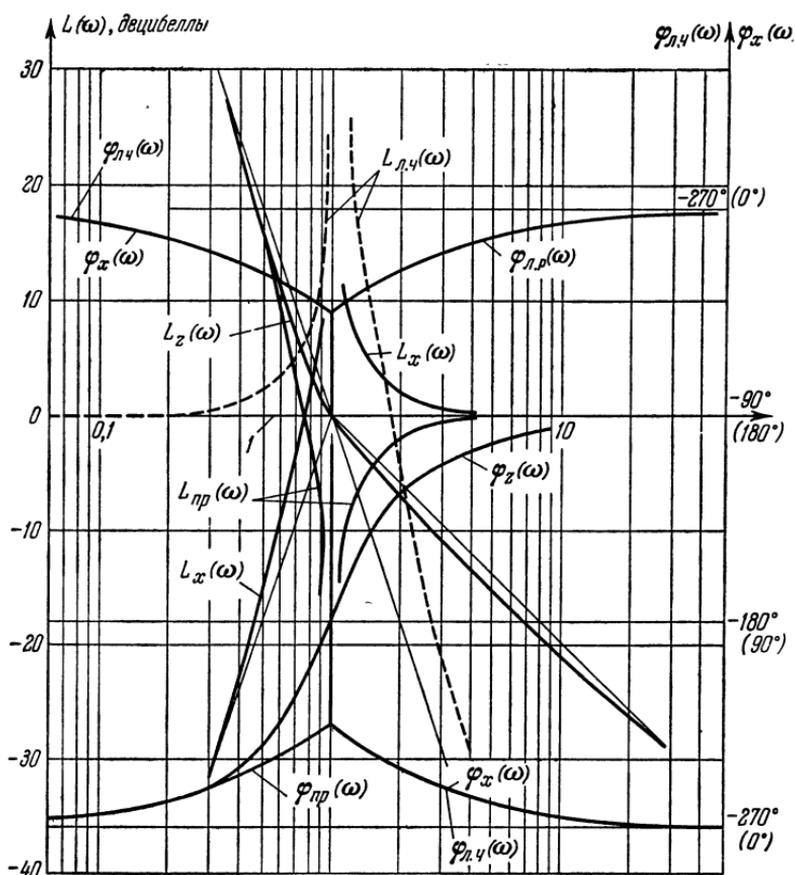


Рис. 1.29.

логарифмических характеристик, изложен в работе Н. Т. Кузовкова [1].

4. Временные характеристики. Динамические свойства линейной части системы могут быть однозначно определены поведением ее при входных воздействиях, представляющих собой единичную скачкообразную

функцию (рис. 1.30):

$$f(t) = 1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0, \end{cases}$$

изображение которой по Лапласу равно:

$$F(p) = \mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{p},$$

либо дельта-функцию (рис. 1.31):

$$f(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \infty & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Изображение по Лапласу дельта-функции $\delta(t)$:

$$F(p) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1.$$

Обычно реакция линейной части системы на единичное скачкообразное входное воздействие обозначается $h(t)$. Она называется *временной характеристикой*.

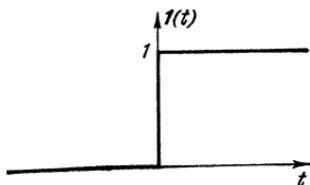


Рис. 1.30.

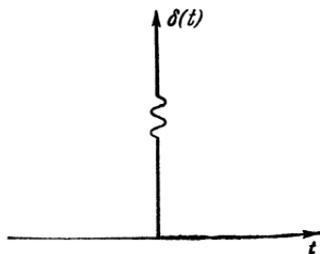


Рис. 1.31.

Производная по времени от временной характеристики $h'(t) = \frac{dh}{dt}$ называется *импульсной характеристикой*. Она представляет собой реакцию линейной части системы на входное воздействие, представляющее собой дельта-функцию. Известны различные способы определения временной характеристики.

Определение временной характеристики $h(t)$ по передаточной функции линейной части системы.

Обозначим изображение по Лапласу для временной характеристики линейной части системы через

$$H(p) = \mathcal{L}\{h(t)\}.$$

Тогда

$$H(p) = K_{\text{л. ч.}}(p) \frac{1}{p},$$

где $K_{\text{л. ч.}}(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$ — передаточная функция линейной части системы. Тогда, если известны все n корней уравнения $Q(p) = 0$ и, кроме того, известно, что все корни различны и не равны нулю, то можно записать следующее выражение для временной характеристики (см. М. Ф. Гарднер, Дж. Бернс [1]):

$$h(t) = \frac{P(0)}{Q(0)} + \sum_{v=1}^n \frac{P(p_v)}{p_v Q'(p_v)} e^{p_v t}$$

и соответственно для импульсной характеристики линейной части системы

$$h'(t) = \sum_{v=1}^n \frac{P(p_v)}{Q'(p_v)} e^{p_v t},$$

где $Q'(p_v) = \left[\frac{\partial Q}{\partial p} \right]_{p=p_v}$, p_v — корни уравнения $Q(p) = 0$.

В случае, когда уравнение

$$Q(p) = 0$$

имеет кратные корни, т. е.

$$Q(p) = (p - p_1)^{\nu_1} (p - p_2)^{\nu_2} \dots (p - p_k)^{\nu_k} \dots (p - p_n)^{\nu_n} = 0, \\ \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k + \dots + \nu_n = n,$$

соответственно выражения для временной и импульсной характеристик линейной части системы имеют следующий вид:

$$h(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\nu_k} \frac{H_{ki}}{(\nu_k - i)!} t^{\nu_k - i} e^{p_k t}, \quad t \geq 0,$$

где

$$H_{ki} = \frac{1}{(i-1)!} \left[\frac{d^{i-1}}{dp^{i-1}} \cdot \frac{(p-p_k)^{\nu_k} P(p)}{Q(p)} \right].$$

Для импульсной характеристики имеем

$$h'(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\nu_k} \left[\frac{H_{ki}}{(\nu_k - i - 1)!} t^{\nu_k - 2} e^{p_k t} + \frac{H_{ki} p_k}{(\nu_k - i)!} t^{\nu_k - 1} e^{p_k t} \right], \quad t \geq 0.$$

Временная и импульсные характеристики могут быть также определены, если известны действительная $U_{л.ч}(\omega)$ и мнимая $V_{л.ч}(\omega)$ частотные характеристики устойчивой линейной части системы (Б. Н. Наумов [7]), на основе интеграла Фурье:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{л.ч}(j\omega)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega,$$

$$h'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{л.ч}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

В результате имеем

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} U_{л.ч}(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega,$$

$$h(t) = K_{л.ч}(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} V_{л.ч}(\omega) \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega,$$

$$h'(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} U_{л.ч}(\omega) \cos \omega t d\omega,$$

$$h'(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} V_{л.ч}(\omega) \sin \omega t d\omega,$$

где

$$U_{л.ч}(\omega) = \operatorname{Re}[K_{л.ч}(j\omega)], \quad V_{л.ч}(\omega) = \operatorname{Im}[K_{л.ч}(j\omega)].$$

Аналогичные выражения для определения $h(t)$ и $h'(t)$ могут быть получены и для более общих случаев, когда характеристическое уравнение линейной части системы имеет один и два нулевых корня, а остальные корни находятся в левой комплексной полуплоскости.

§ 3. Нелинейные элементы систем автоматического управления

Составной частью всякой нелинейной системы автоматического управления является один или несколько нелинейных элементов.

В подавляющем большинстве случаев нелинейный элемент от одной переменной (рис. 1.32) может быть

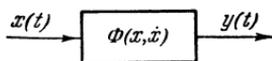


Рис. 1.32.

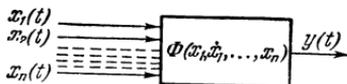


Рис. 1.33.

описан некоторой нелинейной функцией, зависящей от x и ее производной \dot{x} :

$$y = \Phi(x, \dot{x}), \quad (1.31)$$

где y — выходная величина нелинейного элемента, x — входная величина нелинейного элемента.

Такие элементы, называемые также иногда нелинейными элементами с одним входом, можно разделить на следующие четыре основных типа (см. приложение 3) в зависимости от вида нелинейных характеристик:

1. Релейные элементы.
2. Нелинейные элементы с произвольными кусочно-линейными характеристиками.
3. Нелинейные элементы со степенными характеристиками.
4. Нелинейные элементы с характеристиками типа сухого трения.

Наряду с нелинейными элементами от одной переменной, встречаются также элементы, нелинейная характеристика которых зависит от одной или нескольких переменных, действующих на ее входе (рис. 1.33). В этом случае нелинейный элемент может быть описан некоторой нелинейной функцией

$$y = \Phi(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \dots), \quad (1.32)$$

где x_1, x_2, \dots — входные величины нелинейного элемента, $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots$ — производные по времени от входных величин, y — выходная величина нелинейного элемента. *Такие нелинейные элементы иногда называют также нелинейными элементами со многими входами.*

Если характеристика нелинейного элемента с одним или несколькими входами зависит также от времени, т. е.

$$y = \Phi[x, \dot{x}, t] \quad (1.33)$$

или

$$y = \Phi[x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \dots, x_n, \dot{x}_n, t], \quad (1.34)$$

то такие нелинейные характеристики принято называть *нестационарными*.

Нестационарность имеет место в тех случаях, когда вид нелинейных характеристик меняется в зависимости от времени.

В приложении 3 приведены типовые нелинейные характеристики, их математическое описание, а также соответствующие им эквивалентные модели (Е. П. Попов, И. П. Пальтов [1], Я. З. Цыпкин [8]).

Рассмотрим кратко основные особенности каждой из приведенных выше групп нелинейных элементов.

1. Релейные элементы. Релейные элементы являются наиболее распространенным типом нелинейных элементов. Нелинейная характеристика релейных элементов состоит из горизонтальных и вертикальных отрезков прямых (см. пп. 1—5, приложение 3).

Наиболее общим типом релейных характеристик является релейная характеристика с гистерезисом и зоной нечувствительности (см. п. 4, приложение 3)

Из этой характеристики могут быть получены многие релейные характеристики. Например, при $x_0=0$, $\lambda=0$ мы получаем идеальную релейную характеристику (см. п. 1, приложение 3) и т. д.

Отметим, что наряду с симметричными релейными элементами встречаются и несимметричные релейные элементы — соответствующая им нелинейная характеристика несимметрична при положительных и отрицательных значениях входной величины.

Одна из несимметричных релейных характеристик приведена на рис. 1.34. Кроме приведенных выше релейных элементов, можно себе также представить так называемые релейные элементы с опережающими петлями,

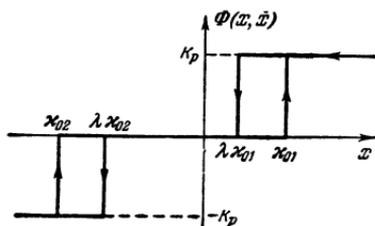


Рис. 1.34.

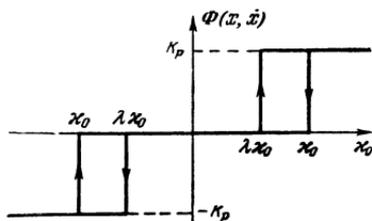


Рис. 1.35.

которые в некоторых случаях являются составными частями более сложных нелинейных элементов. На рис. 1.35 приведена симметричная релейная характеристика с зоной нечувствительности и положительным гистерезисом.

2. Нелинейные элементы с произвольными кусочно-линейными характеристиками. Очень часто характеристики нелинейных элементов, с которыми приходится иметь дело на практике, достаточно точно можно аппроксимировать кусочно-линейными. Поэтому нелинейные элементы, которые можно аппроксимировать кусочно-линейными, выделяются в отдельную группу.

В ряде случаев к моделям подобных нелинейностей оказывается удобным прибегать при моделировании систем автоматического управления со звеньями типа «люфт» и «упор».

Остановимся кратко на описании моделей каждой из указанных нелинейностей.

Характеристики типа люфт и упор приведены на рис. 1.36, а, б. Модель нелинейной характеристики типа люфт (рис. 1.37, а), можно получить при помощи параллельного соединения нелинейной характеристики типа упор и линейного безынерционного элемента с коэффициентом, равным единице, и наоборот, используя нелинейную характеристику типа упор, можно получить характеристику типа люфт (рис. 1.37, б).

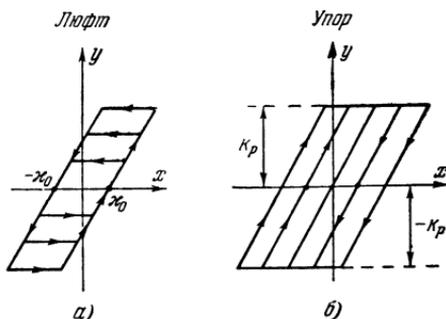


Рис. 1.36.

Кроме того, для получения нелинейных характеристик типа люфт и упор можно, в свою очередь, построить модели, состоящие из линейного безынерционного элемента с коэффициентом, равным единице, интегрирующего звена и однозначного нелинейного

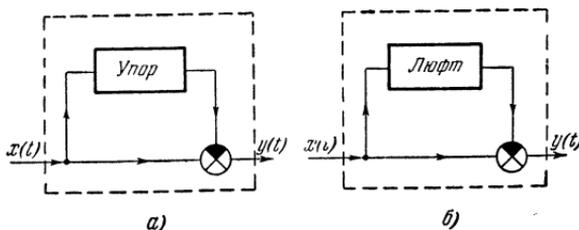


Рис. 1.37.

элемента, представляющего собой релейный элемент с зоной нечувствительности при $k_p \rightarrow \infty$ (рис. 1.38, 1.39) (Д. А. Белова, А. В. Нетушил [1]).

В заключение еще раз подчеркнем, что из возможности представления каждой из указанных нелинейных характеристик при помощи эквивалентной схемы с однозначной характеристикой следует, что, например, экспериментальное исследование на электронных вычислительных установках непрерывного действия системы

с люфтом можно свести к исследованию некоторой системы с упором. При этом рассмотрение нелинейной системы с неоднозначными характеристиками можно

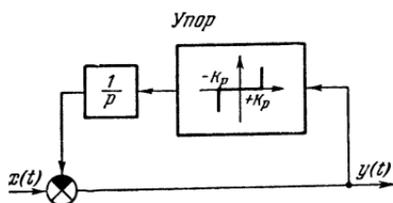


Рис. 1.38.

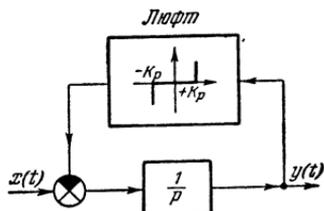


Рис. 1.39.

свести к исследованию некоторой эквивалентной системы с однозначной нелинейной характеристикой.

3. Нелинейные элементы со степенными характеристиками. В ряде случаев нелинейные характеристики, с которыми приходится встречаться на практике, удобнее аппроксимировать не кусочно-линейными характеристиками, а степенными функциями (часто суммой степенных функций). Степенные функции, в свою очередь, характеризуют силы вязкого трения при больших скоростях движения, когда силы пропорциональны квадрату и кубу скорости.

Наиболее простыми степенными характеристиками являются характеристики вида

$$y = \Phi(x) = kx^n. \quad (1.35)$$

При целом нечетном n она имеет вид

$$y = \Phi(x) = kx^n \operatorname{sgn} x. \quad (1.36)$$

4. Нелинейные элементы с характеристиками типа сухого трения. Характеристики нелинейных элементов типа сухого трения представляют собой зависимости силы или момента трения от скорости движения (см. пп. 15, 16 приложения 3). Сила вязкого трения в жидкостях и газах при больших скоростях пропорциональна квадрату скорости. Часто зависимость силы трения от скорости имеет вид, изображенный на рис. 1.40, которая называется характеристикой сухого трения. Причем наличие спада у нелинейной характеристики типа «сухого трения» может явиться причиной неустойчивости

системы (В. В. Казакевич [3]). Практически при исследовании систем автоматического управления при учете сил «сухого трения» пользуются простейшей идеализацией (рис. 1.41). В основу принятой идеализации входит предположение, сделанное Кулоном, о том, что величина силы сухого трения не зависит от скорости (А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин [1]). Характеристика

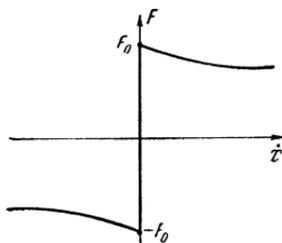


Рис. 1.40.

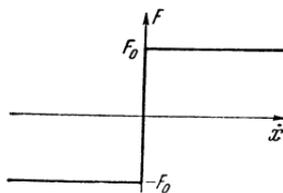


Рис. 1.41.

типа «сухого трения» (рис. 1.41) по внешнему виду совпадает с идеальной релейной характеристикой, т. е. при изменении знака скорости знак силы или момента меняется скачкообразно на обратный.

Весьма существенное отличие от идеальной релейной характеристики заключается в том, что если сумма всех действующих на систему сил такова, что $\dot{x}=0$, то сила сухого трения может также принимать значения не только C или $-C$, но и значения

$$-C \leq F(\dot{x}) \leq C. \quad (1.37)$$

Об этом следует всегда помнить при исследовании систем автоматического управления, имеющих нелинейные элементы сухого трения.

5. Нелинейные элементы, имеющие характеристики, зависящие от нескольких переменных. В системах автоматического управления встречаются элементы, имеющие стационарные характеристики, зависящие от нескольких входных величин:

$$y = \Phi(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \dots, x_n, \dot{x}_n). \quad (1.38)$$

К этому типу нелинейных элементов может быть отнесена нелинейная многопараметрическая характеристика, примером которой может служить, например,

механическая характеристика асинхронного двигателя (см. п. 17 приложения 3).

Более сложным типом нелинейной характеристики, зависящей от нескольких переменных, является логическая характеристика, используемая, например, для ступенчатого изменения отдельных параметров системы в зависимости от выполнения определенных соотношений между входными величинами (М. А. Старикова [1]). В ряде случаев введение логических устройств может существенно улучшить динамические свойства систем автоматического управления.

Логические элементы в общем случае могут иметь несколько входных и несколько выходных величин (см. п. 18 приложения 3). Связь входных и выходных величин в логических элементах выражается логической функцией, которая является нелинейной.

Закон действия логического элемента, или его алгоритм, может быть выражен таблицей состояний, в которой каждой комбинации входных величин соответствует определенная комбинация и значения выходных.

§ 4. Описание динамических свойств замкнутых нелинейных систем

Для описания динамических свойств замкнутых систем автоматического управления можно воспользоваться нелинейными дифференциальными либо интегральными уравнениями.

Использование интегральных уравнений для описания динамических свойств замкнутых нелинейных систем обладает рядом преимуществ, многие из которых будут видны из дальнейшего изложения. Поэтому остановимся кратко на методике получения интегральных уравнений для замкнутых систем автоматического управления с одним и двумя нелинейными элементами при учете входных воздействий, представляющих собой заданные функции времени.

1. Системы с одним нелинейным элементом. Структурная схема системы автоматического управления с одним нелинейным элементом приведена на рис. 1.42. Предположим, что рассматриваемая нелинейная система характеризуется следующей системой трех уравнений:

Линейная часть системы

$$a_0 \frac{d^n z}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} z}{dt^{n-1}} + \dots + a_n z = b_0 \frac{d^m y}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + b_m y \quad (1.39)$$

при ненулевых начальных условиях

$$z_0, \dot{z}_0, \dots, z_0^{(n-1)}, y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(m-1)};$$

нелинейный элемент

$$y = \Phi(x, \dot{x}); \quad (1.40)$$

уравнение элемента сравнения

$$x(t) = f(t) - z(t), \quad (1.41)$$

где $f(t) = f_0(t) - f_n(t)$ действующее на систему внешнее воздействие.

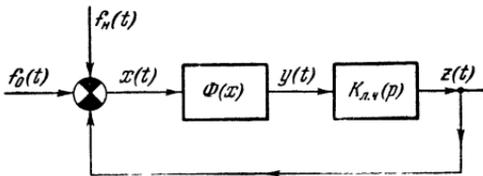


Рис. 1.42.

Если подвергнуть левую и правую части уравнений (1.39), (1.40) и (1.41) преобразованию Лапласа, то получим систему уравнений относительно изображений:

$$\left. \begin{aligned} Z(p) &= K_{\text{л.ч}}(p) Y(p) - F_n(p), \\ Y(p) &= \mathcal{L}\{\Phi[x, \dot{x}]\}, \\ X(p) &= F_0(p) - Z(p), \end{aligned} \right\} \quad (1.42)$$

где $Z(p)$, $Y(p)$, $X(p)$, $F(p)$ — соответственно изображения по Лапласу для $z(t)$, $y(t)$, $x(t)$, $f(t)$;

$$K_{\text{л.ч}}(p) = \frac{b_0 p^m + \dots + b_m}{a_0 p^n + \dots + a_n} = \frac{P(p)}{Q(p)} \quad (1.43)$$

— передаточная функция линейной части системы;

$$F_n(p) = \frac{P_n(p)}{Q(p)} = \mathcal{L}\{f_n(t)\} \quad (1.44)$$

— эквивалентное внешнее воздействие, определяемое ненулевыми начальными условиями. При нулевых начальных условиях $f_n(t) \equiv 0$; $P_n(p)$ — многочлен $(n-1)$ -й степени, определяемый выражением (1.4).

Исключая промежуточные переменные из уравнений (1.42), получим

$$X(p) = F(p) - K_{л.ч}(p) \mathcal{L}\{\Phi(x, \dot{x})\}, \quad (1.45)$$

где

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = F_0(p) - F_n(p). \quad (1.46)$$

Уравнению (1.45) соответствует структурная схема нелинейной системы, приведенная на рис. 1.42.

Переходя от изображений к оригиналам, нетрудно получить нелинейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода, которое полностью характеризует динамику рассматриваемой системы, содержащей один нелинейный элемент:

$$x(t) = f(t) - \int_0^t h'(t-\lambda) \Phi[x(\lambda), \dot{x}(\lambda)] d\lambda, \quad (1.47)$$

где

$$\begin{aligned} f(t) &= f_0(t) - f_n(t), \\ h'(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{K_{л.ч}(p)\} \end{aligned}$$

— импульсная характеристика линейной части системы.

Полученное нелинейное интегральное уравнение (1.47) характеризует $x(t)$ как в переходном, так и в установившемся режиме.

Если нас интересует установившийся режим работы исследуемой системы, то, устремляя в (1.47) $t \rightarrow \infty$, получим нелинейное интегральное уравнение, характеризующее установившиеся движения (если таковые существуют):

$$x^0(t) = f_0(t) - \int_0^\infty h'(t-\lambda) \Phi[x(\lambda), \dot{x}(\lambda)] d\lambda. \quad (1.48)$$

В случае устойчивой линейной части системы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h'(t) = 0.$$

Для того чтобы в дальнейшем иметь дело только с системами, имеющими устойчивую линейную часть, охватывая одновременно случаи нейтральной и неустойчивой части системы, проведем эквивалентное преобразование нелинейной системы (рис. 1.42).

Для этого охватим линейную часть системы жесткой отрицательной обратной связью с коэффициентом обратной связи $r > 0$ таким образом, чтобы эквивалентная передаточная функция

$$K_{л.ч}^n(p) = \frac{K_{л.ч}(p)}{1 + rK_{л.ч}(p)} \quad (1.49)$$

соответствовала устойчивой линейной части системы (рис. 1.43).

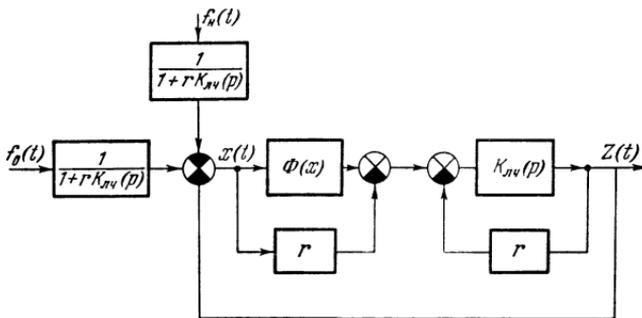


Рис. 1.43.

Можно показать, что для того чтобы проведенное преобразование было эквивалентным, необходимо параллельно нелинейному элементу включить элемент с коэффициентом $r > 0$, причем так, чтобы

$$\Phi(x) = \Phi_n(x) + rx, \quad (1.50)$$

где $\Phi_n(x)$ — нелинейная характеристика преобразованной системы.

Кроме того, надо провести эквивалентное преобразование и действующих на систему воздействий:

$$F_n^0(p) = \mathcal{L}\{f_n^0(t)\} = \frac{F_0(p)}{1 + rK_{л.ч}(p)}, \quad (1.51)$$

$$F_n^H(p) = \mathcal{L}\{f_n^H(t)\} = \frac{F_H(p)}{1 + rK_{л.ч}(p)}. \quad (1.52)$$

Структурная схема системы, полученная в результате проведенного эквивалентного преобразования, приведена на рис. 1.43, 1.44. В результате проведенного

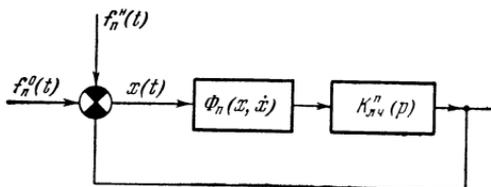


Рис. 1.44.

структурного преобразования линейная часть системы стала устойчивой, а следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h'_n(t) = 0,$$

где

$$h'_n(t) = \mathcal{L}^{-1} \{K_{\text{л. ч}}^{\text{н}}(p)\}.$$

Нелинейное интегральное уравнение преобразованной системы имеет следующий вид:

$$x(t) = f_n^0(t) - f_n^{\text{н}}(t) - \int_0^t h'_n(t - \lambda) \Phi[x(\lambda), \dot{x}(\lambda)] d\lambda. \quad (1.53)$$

Из (1.53) нетрудно получить также нелинейное интегральное уравнение, характеризующее установившиеся движения $x^0(t)$ в преобразованной системе, если такие движения существуют:

$$x^0(t) = f_n^0(t) - \int_0^{\infty} h'_n(t - \lambda) \Phi[x(\lambda), \dot{x}(\lambda)] d\lambda. \quad (1.54)$$

2. Системы с двумя нелинейными элементами. В некоторых случаях при исследовании динамики нелинейных систем автоматического управления возникает необходимость учесть влияние на динамику не одного, а двух нелинейных элементов. На рис. 1.45 приведена одна из возможных структурных схем системы автоматического управления с двумя нелинейными элементами.

Рассмотренная выше методика позволяет без особого труда найти интегральные уравнения и для системы с двумя нелинейными элементами.

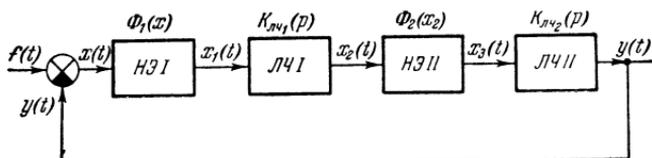


Рис. 1.45.

Нелинейная система, структурная схема которой приведена на рис. 1.45, характеризуется следующими уравнениями, записанными относительно изображений по Лапласу при нулевых начальных условиях:

$$X(p) = F(p) - Y(p), \quad (1.55)$$

$$X_1(p) = \mathcal{L} \{ \Phi_1 [x(t)] \}, \quad (1.56)$$

$$X_2(p) = K_{лч1}(p) X_1(p), \quad (1.57)$$

$$X_3(p) = \mathcal{L} \{ \Phi_2 [x_2(t)] \}, \quad (1.58)$$

$$Y(p) = K_{лч2}(p) X_3(p), \quad (1.59)$$

где $X(p)$, $F(p)$, $Y(p)$, $X_1(p)$, $X_2(p)$, $X_3(p)$ — соответственно изображения по Лапласу для $x(t)$, $f(t)$, $y(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$; $x_1(t) = \Phi_1 [x(t)]$ — характеристика первого нелинейного элемента; $x_3(t) = \Phi_2 [x_2(t)]$ — характеристика второго нелинейного элемента;

$$K_{лч1}(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n};$$

$$K_{лч2}(p) = \frac{Y(p)}{X_3(p)} = \frac{c_0 p^l + c_1 p^{l-1} + \dots + c_l}{d_0 p^s + d_1 p^{s-1} + \dots + d_s};$$

a_i , b_i , c_i , d_i — постоянные коэффициенты; $n \geq m$, $s \geq l$.

Решая совместно (1.55), (1.56), (1.57), (1.58), (1.59) и переходя от изображений к оригиналам, получим следующие два нелинейных интегральных уравнения, которые полностью характеризуют переходные процессы

в системе с двумя нелинейными элементами при учете действующего на нее внешнего воздействия $f(t)$:

$$x_1(t) = f(t) - \int_0^t h'_2(t - \lambda_2) \Phi_2[x_2(\lambda_2)] d\lambda_2, \quad (1.60)$$

$$x_2(t) = \int_0^t h'_1(t - \lambda_1) \Phi_1[x(\lambda_1)] d\lambda_1, \quad (1.61)$$

где

$$h'_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{K_{\text{л. ч. 1}}(p)\},$$

$$h'_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{K_{\text{л. ч. 2}}(p)\}.$$

Здесь $h'_1(t)$, $h'_2(t)$ — импульсные характеристики линейных частей системы.

Подставляя (1.60) в (1.61), получим одно нелинейное интегральное уравнение относительно $x(t)$:

$$x(t) = f(t) - \int_0^t h'_2(t - \lambda_2) \Phi_2 \left\{ \int_0^t h'_1(t - \lambda_1) \Phi_1[x(\lambda_1)] d\lambda_1 \right\} d\lambda_2. \quad (1.62)$$

Рассматривая (1.62) при $t \rightarrow \infty$, получим нелинейное интегральное уравнение, характеризующее вынужденные движения $x^0(t)$ (если последние существуют):

$$x^0(t) = f(t) - \int_0^\infty h'_2(t - \lambda_2) \Phi_2 \left\{ \int_0^\infty h'_1(t - \lambda_1) \Phi_1[x(\lambda_1)] d\lambda_1 \right\} d\lambda_2. \quad (1.63)$$

§ 5. Классификация нелинейных систем

В основу классификации нелинейных систем автоматического управления можно положить различные принципы:

1. По виду линейной части системы.
2. По виду нелинейного элемента.
3. По виду действующего на систему внешнего воздействия.

Эти принципы могут быть использованы для классификации как систем с одним нелинейным элементом, так и систем с несколькими нелинейными элементами.

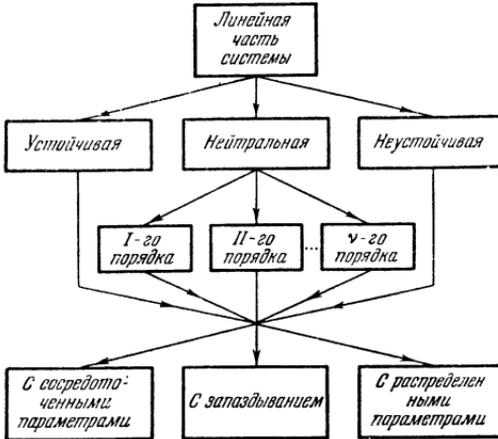


Рис. 1.46.

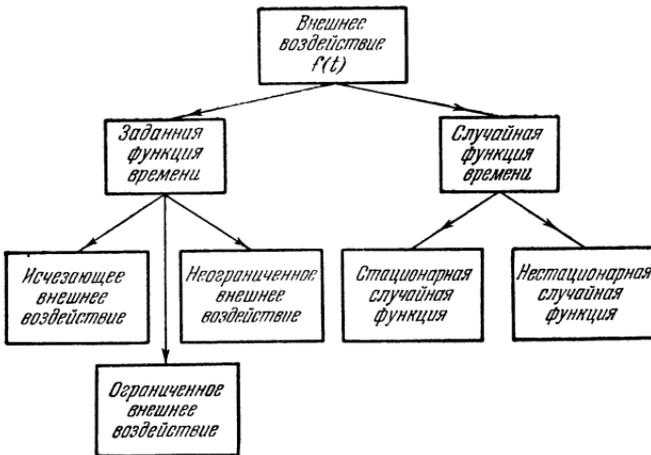


Рис. 1.47.

На рис. 1.46 приведена классификация нелинейных систем по виду линейной части системы, а на рис. 1.47

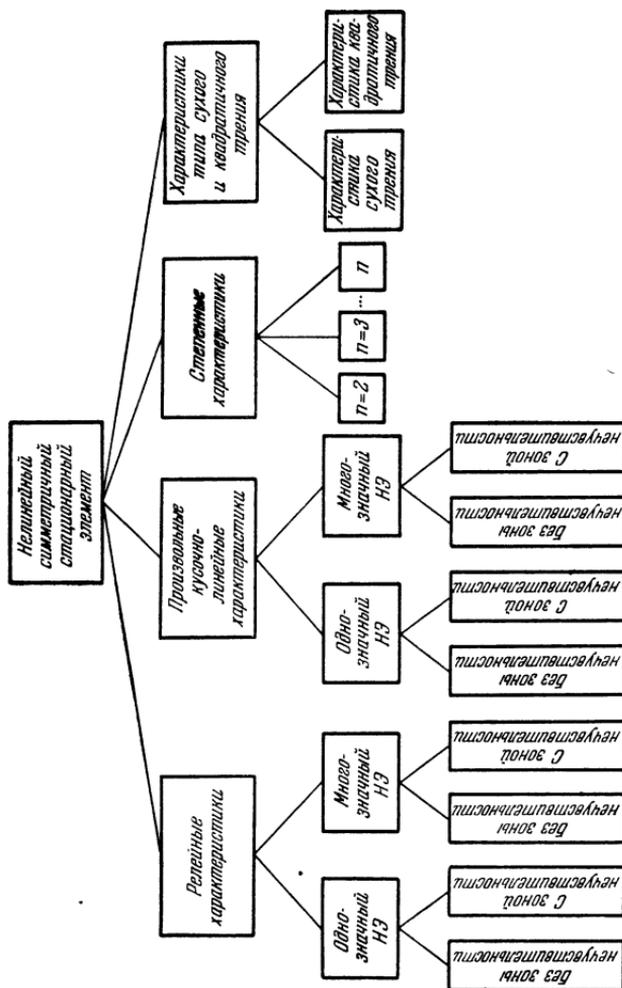


Рис. 1.48.

и 1.48 — соответственно по виду внешних воздействий, действующих на систему, и по виду нелинейного элемента (для случая симметричного стационарного нелинейного элемента).

§ 6. Примеры составления интегральных уравнений нелинейных систем автоматического управления

В качестве примеров составления интегральных уравнений рассмотрим три нелинейные системы автоматического управления:

1. Систему автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока.
2. Позиционную следящую систему.
3. Систему автоматического регулирования процесса измельчения.

1. Система автоматического регулирования скорости двигателя. Динамика системы автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока при учете

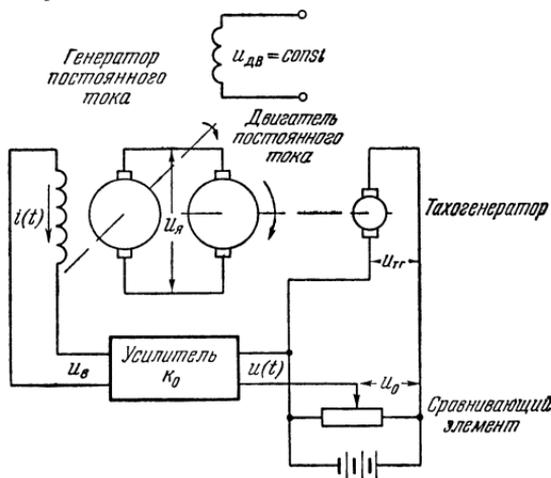


Рис. 1.49.

нелинейных характеристик в цепи возбуждения генератора и усилителя (рис. 1.49) описывается следующей системой уравнений:

Уравнение сравнивающего элемента

$$u(t) = u_0(t) - u_{\text{ТГ}}(t). \quad (1.64)$$

Уравнение усилителя

$$u_{\text{В}}(t) = \Phi[u(t)]. \quad (1.65)$$

Уравнение генератора

$$\frac{d\psi(i_{\text{В}})}{dt} + R_{\text{В}}i = u_{\text{В}}(t), \quad (1.66)$$

$$u_{\text{Я}}(t) = k_{\text{Г}}\psi(i_{\text{В}}), \quad (1.67)$$

$$i_{\text{В}}(0) = i_{\text{В}0}.$$

Уравнение двигателя

$$T_{\text{М}}T_{\text{Я}} \frac{d^2\omega}{dt^2} + T_{\text{М}} \frac{d\omega}{dt} + \omega = k_{\text{Д}\omega}u_{\text{Я}}(t), \quad (1.68)$$

$$\omega(0) = \omega_0, \quad \dot{\omega}(0) = \dot{\omega}_0.$$

Уравнение тахогенератора

$$u_{\text{ТГ}}(t) = k_{\text{ТГ}}\omega(t), \quad (1.69)$$

где $u(t)$ — напряжение ошибки; $u_0(t)$ — задающее напряжение; $u_{\text{ТГ}}(t)$ — напряжение на выходе тахогенератора; $u_{\text{В}}(t)$ — напряжение на выходе усилителя; $\Phi(u)$ —

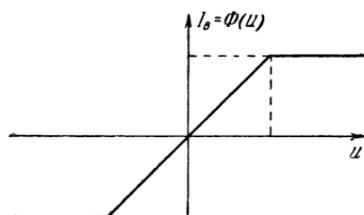


Рис. 1.50.

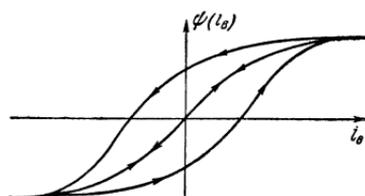


Рис. 1.51.

нелинейная характеристика усилителя (рис. 1.50); $\omega(t)$ — угловая скорость вращения вала двигателя; $i_{\text{В}}(t)$ — ток в цепи возбуждения; $u_{\text{Я}}(t)$ — напряжение на якоре генератора; $\Psi(i_{\text{В}})$ — нелинейная характеристика генератора (рис. 1.51); $T_{\text{В}}$ — постоянная времени цепи возбуждения генератора; $k_{\text{Г}}$ — коэффициент усиления генератора; $T_{\text{М}}$ — электромеханическая постоянная двигателя;

$T_{\text{я}}$ — электрическая постоянная двигателя; $k_{\text{д}\omega}$ — коэффициент усиления двигателя относительно скорости; $k_{\text{тг}}$ — коэффициент усиления тахогенератора.

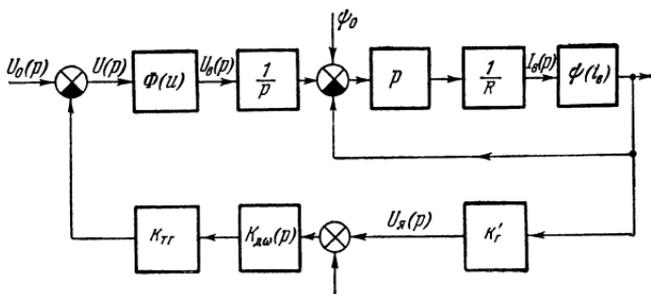


Рис. 1.52.

Приведенные выше уравнения можно записать относительно изображений по Лапласу с учетом ненулевых начальных условий

$$U(p) = U_0(p) - U_{\text{тг}}(p), \quad (1.70)$$

$$I_{\text{в}}(p) = \mathcal{L}\{\Phi[u(t)]\}, \quad (1.71)$$

$$p\mathcal{L}\{\psi(i_{\text{в}})\} + I_{\text{в}}(p)R_{\text{в}} = U_{\text{в}}(p) + \psi_0, \quad (1.72)$$

$$U_{\text{я}}(p) = k_{\text{г}}\mathcal{L}\{\Psi(i_{\text{в}})\}, \quad (1.73)$$

$$\Omega(p) = K_{\text{д}\omega}(p)U_{\text{я}}(p) + \frac{T_{\text{м}}\omega_0(T_{\text{я}}p + 1) + T_{\text{м}}T_{\text{я}}\omega_0}{k_{\text{д}\omega}} \quad (1.74)$$

$$U_{\text{тг}}(p) = k_{\text{тг}}\Omega(p), \quad (1.75)$$

где $U(p)$, $U_0(p)$, $I_{\text{в}}(p)$, $U_{\text{тг}}(p)$, $U_{\text{я}}(p)$, $U_{\text{в}}(p)$, $\Omega(p)$ — изображения по Лапласу $u(t)$, $u_0(t)$, $i_{\text{в}}(t)$, $u_{\text{тг}}(t)$, $u_{\text{я}}(t)$, $u_{\text{в}}(t)$, $\omega(t)$,

$$K_{\text{д}\omega}(p) = \frac{\Omega(p)}{U_{\text{я}}(p)} = \frac{k_{\text{д}\omega}}{T_{\text{м}}T_{\text{я}}p^2 + T_{\text{м}}p + 1} \quad (1.76)$$

— передаточная функция двигателя относительно угловой скорости.

Структурная схема системы автоматического регулирования при учете ненулевых начальных условий приведена на рис. 1.52.

Если учесть только нелинейность усилителя, то структурная схема системы будет иметь более простой вид.

На рис. 1.53

$$K_{\Gamma}(p) = \frac{U_{\Gamma}(p)}{U_{\text{в}}(p)} = \frac{k_{\Gamma}}{T_{\text{в}}p + 1} \quad (1.77)$$

— передаточная функция генератора.

Передаточная функция линейной части системы в этом случае, полученная в результате преобразования

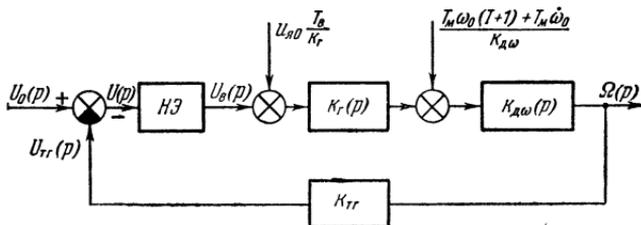


Рис. 1.53.

структурной схемы, приведенной на рис. 1.53, имеет вид:

$$K_{\text{л. ч}}(p) = \frac{U_{\Gamma}(p)}{U_{\text{в}}(p)} = \frac{k_{\text{л. ч}}}{(T_{\text{в}}p + 1)(T_{\text{м}}T_{\text{я}}p^2 + T_{\text{м}}p + 1)}, \quad (1.78)$$

где $k_{\text{л. ч}} = k_{\Gamma}k_{\text{д}\omega}k_{\Gamma\Gamma}$ — коэффициент усиления линейной части системы.

Изображение по Лапласу эквивалентного воздействия, приведенного ко входу нелинейного элемента и являющегося следствием ненулевых начальных условий, имеет следующий вид:

$$U_{\text{он}}(p) = u_{\text{я0}} \frac{T_{\text{в}}}{T_{\Gamma}} K_{\text{л. ч}}(p) + \left[\frac{T_{\text{м}}\omega_0(T_{\text{я}}p + 1) + T_{\text{м}}T_{\text{я}}\dot{\omega}_0}{k_{\text{д}\omega}} \right] K_{\text{д}\omega}(p) k_{\Gamma\Gamma}. \quad (1.79)$$

Обозначим

$$F(p) = U_0(p) + U_{\text{он}}(p). \quad (1.80)$$

Тогда уравнение системы относительно изображений по Лапласу для напряжения ошибки $U(p)$ можно записать в виде

$$U(p) = F(p) - K_{\text{л. ч}}(p) \mathcal{L}\{\Phi[u(t)]\}. \quad (1.81)$$

Переходя от уравнения (1.81) относительно изображений к уравнению относительно оригиналов, получим нелинейное интегральное уравнение системы автоматического регулирования двигателя:

$$u(t) = f(t) - \int_0^t h'_{л.ч}(t-\lambda) \Phi[u(\lambda)] d\lambda, \quad (1.82)$$

где

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{U_0(p) + U_{он}(p)\},$$

$$h'_{л.ч}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k_{л.ч}}{(T_{эп}p + 1)(T_{м}T_{я}p^2 + T_{мп} + 1)} \right\}.$$

2. Позиционная следящая система. Динамика позиционной следящей системы (рис. 1.54) описывается следующей системой уравнений:

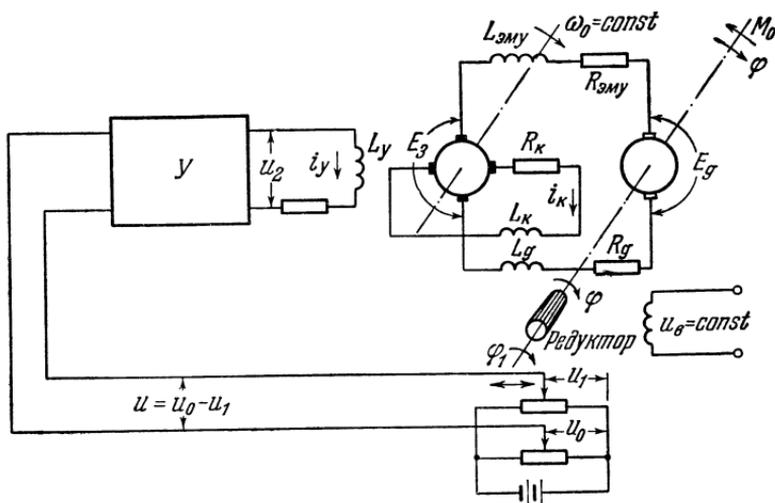


Рис. 1.54.

Уравнение сравнивающего элемента

$$u(t) = u_0(t) - u_1(t). \quad (1.83)$$

Уравнение усилителя

$$u_2(t) = \mathcal{L} \{ \Phi_1 [u(t)] \}. \quad (1.84)$$

Уравнение электромашиного усилителя

$$T_y T_k \frac{d^2 e_3}{dt^2} + (T_y + T_k) \frac{de_3}{dt} + e_3 = k_{\text{ЭМУ}} u_2(t). \quad (1.85)$$

Уравнение двигателя

$$T_m T_{\text{я}} \frac{d^3 \varphi}{dt^3} + T_m \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt} = k_{\text{д}\omega} e_3(t) - (T_{\text{я}} p + 1) k_{\text{д}, M_c} M_c(t), \quad (1.86)$$

при

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0, \quad \ddot{\varphi}(0) = \ddot{\varphi}_0, \quad M_c(0) = M_{c0}.$$

Уравнение редуктора при наличии люфта (рис. 1.55)

$$\varphi_1(t) = \Phi_2[\varphi, \dot{\varphi}] \quad (1.87)$$

и при отсутствии люфта в редукторе

$$\varphi_1(t) = k_p \varphi(t), \quad (1.88)$$

$$u_1(t) = k_{\text{пр}} \varphi(t), \quad (1.89)$$

где $u(t)$ — напряжение ошибки; $u_0(t)$ — задающее напряжение; $u_1(t)$ — напряжение, пропорциональное углу поворота вала на выходе редуктора; $u_2(t)$ — напряжение на выходе электронного усилителя; $e_3(t)$ — э. д. с. электромашиного усилителя (ЭМУ); $\varphi(t)$ — угол поворота на входе редуктора $\varphi_1(t)$ — угол поворота на выходе редуктора; $M_c(t)$ — момент сопротивления на валу двигателя; T_y — постоянная времени обмотки возбуждения ЭМУ; T_k — постоянная времени короткозамкнутой обмотки ЭМУ; $k_{\text{ЭМУ}}$ — коэффициент усиления ЭМУ; T_m — электро механическая постоянная двигателя;

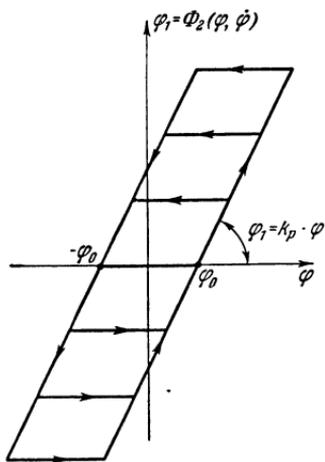


Рис. 1.55.

$T_{\text{я}}$ — электрическая постоянная цепи якоря двигателя; $k_{\text{д}\varphi}$ — коэффициент передачи двигателя относительно угла поворота вала двигателя; $k_{\text{д}, M_c}$ — коэффициент усиления двигателя относительно момента сопротивления; k_p —

коэффициент усиления редуктора; $k_{\text{пр}}$ — коэффициент усиления преобразующего элемента.

Используя преобразование Лапласа с учетом ненулевых начальных условий, можем записать следующую систему уравнений относительно изображений:

$$U(p) = U_0(p) - U_1(p), \quad (1.90)$$

$$U_2(p) = \mathcal{L}\{\Phi_1[u(t)]\}, \quad (1.91)$$

$$E_3(p) = K_{\text{эму}}(p) U_2(p) - K_{\text{эму}}(p) \frac{E_{30}(p)}{k_{\text{эму}}}, \quad (1.92)$$

$$\begin{aligned} \varphi(p) = K_{\text{дф}}(p) E_3(p) - \frac{k_{\text{дМс}}}{k_{\text{дф}}} (T_{\text{я}}p + 1) K_{\text{дф}}(p) M_{\text{с}}(p) + \\ + \frac{\tilde{M}_{\text{с0}} - \varphi_0(p)}{k_{\text{дф}}} K_{\text{дф}}(p), \end{aligned} \quad (1.93)$$

$$\varphi_1(p) = \mathcal{L}\{\Phi_2[\varphi(t)]\}, \quad (1.94)$$

или

$$\varphi_1(p) = k_{\text{р}}\varphi(p), \quad (1.95)$$

$$U_1(p) = k_{\text{пр}}\varphi_1(p), \quad (1.96)$$

где

$$\begin{aligned} U(p), U_0(p), U_1(p), U_2(p), \\ E_3(p), M_{\text{с}}(p), \varphi(p), \varphi_1(p) \end{aligned}$$

— изображения по Лапласу для $u(t)$, $u_0(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$, $e_3(t)$, $M_{\text{с}}(t)$, $\varphi(t)$, $\varphi_1(t)$,

$$K_{\text{эму}}(p) = \frac{E_3(p)}{U_2(p)} = \frac{k_{\text{эму}}}{(T_{\text{я}}p + 1)(T_{\text{к}}p + 1)} \quad (1.97)$$

— передаточная функция электромашинного усилителя,

$$K_{\text{дф}}(p) = \frac{\varphi(p)}{E_3(p)} = \frac{k_{\text{дф}}}{T_{\text{м}}T_{\text{я}}p^3 + T_{\text{м}}p^2 + p} \quad (1.98)$$

— передаточная функция двигателя относительно угла поворота вала двигателя $\varphi(t)$,

$$E_{30}(p) = e_{30} [T_{\text{я}}T_{\text{к}}p + (T_{\text{я}} + T_{\text{к}})] + \dot{e}_{30}T_{\text{м}}T_{\text{я}}, \quad (1.99)$$

$$\varphi_0(p) = \varphi_0 [T_{\text{м}}T_{\text{я}}p^2 + T_{\text{м}}p] + \dot{\varphi}_0 [T_{\text{м}}T_{\text{я}}p + T_{\text{м}}] + \ddot{\varphi}_0 T_{\text{м}}T_{\text{я}}, \quad (1.100)$$

$$\tilde{M}_{\text{с0}} = k_{\text{дМс}} T_{\text{я}} M_{\text{с0}}. \quad (1.101)$$

При составлении уравнений предполагалось, что имеется два нелинейных элемента: первый с характеристикой типа насыщения, которую имеет усилитель (рис. 1.56):

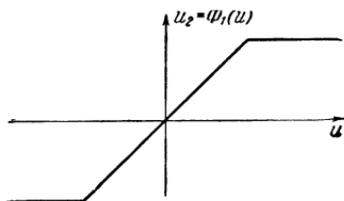


Рис. 1.56.

$$u_2(t) = \Phi_1[u(t)] \quad (1.102)$$

и второй с характеристикой типа люфта, которую имеет редуктор (рис. 1.55):

$$\varphi_1(t) = \Phi_2[\varphi(t)]. \quad (1.103)$$

Структурная схема системы, соответствующая полученным выше уравнениям в изображениях для случая,

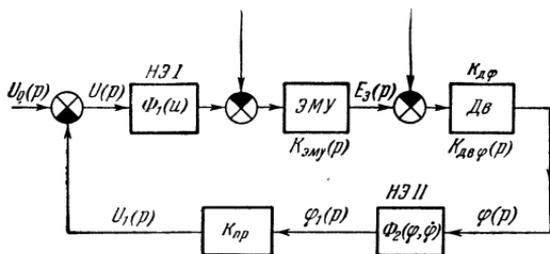


Рис. 1.57.

когда нелинейная модель системы содержит два нелинейных элемента, приведена на рис. 1.57. После элементарных преобразований имеем:

$$K_{л.ч1}(p) = K_{ЭМУ}(p) K_{д}(p), \quad (1.104)$$

$$U_n(p) = K_{д\varphi}(p) \left[K_{ЭМУ}(p) \frac{E_{30}}{k_{ЭМУ}} - \frac{k_{дмс}}{k_{д\varphi}} \times \right. \\ \left. \times (T_я p + 1) M_c(p) + \frac{\tilde{M}_{с0} - \varphi_0(p)}{k_{д\varphi}} \right], \quad (1.105)$$

$$K_{л.ч2}(p) = k_{пр}. \quad (1.106)$$

После принятых выше обозначений систему, структурная схема которой приведена на рис. 1.58, можно

описать следующей системой уравнений в изображениях:

$$\begin{aligned}
 U(p) &= U_0(p) - K_{л. ч2}(p) \mathcal{L}\{\Phi_2(\varphi)\} \varphi(p), \\
 \varphi(p) &= U_n(p) - K_{л. ч1}(p) \mathcal{L}\{\Phi_1(u)\} U(p),
 \end{aligned}
 \quad (1.107)$$

которым соответствует система из двух нелинейных интегральных уравнений

$$u(t) = u_0(t) - \int_0^t h'_2(t - \lambda_2) \Phi_2[\varphi(\lambda_2)] d\lambda_2, \quad (1.108)$$

$$\varphi(t) = u_n(t) - \int_0^t h'_1(t - \lambda_1) \Phi_1[u(\lambda_1)] d\lambda_1. \quad (1.109)$$

Из полученных интегральных уравнений нетрудно получить соответствующие нелинейные интегральные уравнения, характеризующие установившиеся движения в

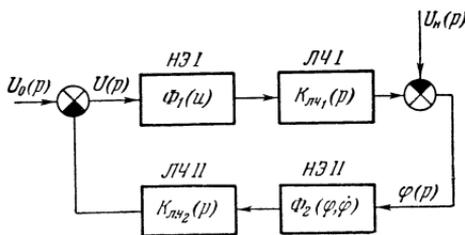


Рис. 1.58.

рассматриваемой системе с двумя нелинейными элементами:

$$u^0(t) = u_{0t}^0 - \int_0^\infty h'_2(t - \lambda_2) \Phi_2[\varphi^0(\lambda_2)] d\lambda_2, \quad (1.110)$$

$$\varphi^0(t) = u_n(t) - \int_0^\infty h'_1(t - \lambda_1) \Phi_1[u^0(\lambda_1)] d\lambda_1. \quad (1.111)$$

Структурная схема системы в том случае, когда люфт в редукторе отсутствует, приведена на рис. 1.59,

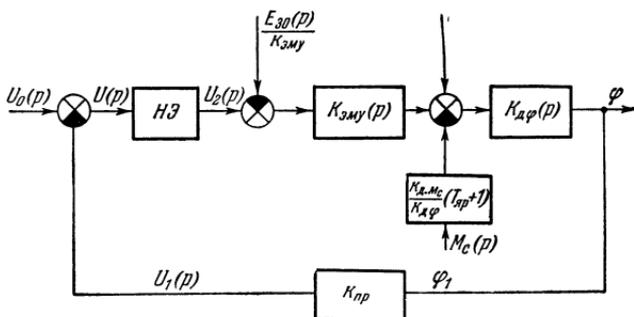


Рис. 1.59.

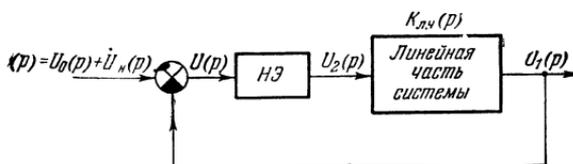


Рис. 1.60.

а после преобразований — на рис. 1.60, где

$$K_{\text{л. ч}}(p) = \frac{U_1(p)}{U_2(p)} = \frac{k_{\text{л. ч}}}{a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p}, \quad (1.112)$$

$$k_{\text{л. ч}} = k_{\text{эму}} k_{\text{дф}} k_{\text{р}} k_{\text{пр}},$$

$$a_0 = T_y T_k T_m T_{\text{я}},$$

$$a_1 = T_m (T_k T_y + T_k T_{\text{я}} + T_d T_{\text{я}}),$$

$$a_2 = T_k (T_y + T_m) + T_m (T_y + T_{\text{я}}),$$

$$a_3 = T_k + T_y + T_m,$$

$$a_4 = 1,$$

а изображение по Лапласу внешнего воздействия $U_n(p)$, являющегося следствием наличия ненулевых

начальных условий, имеет вид

$$U_n(p) = \frac{E_{30}(p)}{k_{\text{эму}}} K_{\text{эму}}(p) K_{\text{дф}}(p) k_p k_{\text{пр}} + \left[\frac{\tilde{M}_{\text{с0}} - \Phi_0(p)}{k_{\text{дф}}} - M_c(p) \frac{k_{\text{дмс}}}{k_{\text{дф}}} (T_{\text{я}} p + 1) \right] K_{\text{дф}}(p) k_p k_{\text{пр}}. \quad (1.113)$$

Тогда уравнение в изображениях по Лапласу для напряжения ошибки $U(p)$ будет иметь следующий вид:

$$U(p) = F(p) - K_{\text{л. ч}}(p) \mathcal{L}\{\Phi[u(t)]\}, \quad (1.114)$$

где

$$F(p) = U_0(p) + U_n(p).$$

Переходя от уравнения относительно изображений к уравнению относительно оригиналов, получим нелинейное интегральное уравнение, полностью характеризующее динамику рассматриваемой системы с одним нелинейным элементом:

$$u(t) = f(t) - \int_0^t h'(t-\lambda) \Phi[u(\lambda)] d\lambda, \quad (1.115)$$

где

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_0(p) + U_n(p)\}.$$

Не представляет труда также получить нелинейное интегральное уравнение, характеризующее установившиеся движения, если такие движения существуют,

$$u^0(t) = u_0^0(t) - \int_0^{\infty} h'(t-\lambda) \Phi[u^0(\lambda)] d\lambda, \quad (1.116)$$

где

$$h'(t) = \mathcal{L}^{-1}\{K_{\text{л. ч}}(p)\}.$$

3. Система автоматического регулирования процесса измельчения (нейтральная система с запаздыванием). В качестве третьего примера — нейтральной системы автоматического регулирования с запаздыванием — рассмотрим систему автоматического регулирования двухстадиального цикла мокрого измельчения (К. А. Бердышев и Б. И. Смирнов [1]).

Руды, поступающие в процесс обогащения, как правило, имеют весьма низкое содержание ценных компонентов, в то время как концентраты обогатительных фабрик, идущие на металлургическую переработку, должны содержать полезные компоненты, в десятки раз превышающие их содержание в исходной руде.

В процессе обогащения происходит концентрация полезных компонентов в десятки раз выше, чем в исходной руде. Полезные компоненты поступают на обогатительную фабрику в виде кусков различной крупности, представляющих собой сростки минералов пустой породы. Превращение полезного ископаемого в смесь свободных зерен или сростков — частично связанных между собой минералов — достигается дроблением и измельчением.

Таким образом, измельчение является окончательной ступенью в процессе уменьшения размеров частиц исходной руды.

В качестве измельчающей аппаратуры применяются шаровые мельницы, имеющие форму барабана, где дробящей средой служат стальные шары. Обычно барабан имеет два отверстия — загрузочное и разгрузочное. Исходная руда, прошедшая предварительное дробление, поступает в загрузочное отверстие вместе с водой. Разгрузочное отверстие служит для выгрузки пульпы. При этом для каждой руды пульпа должна содержать вполне определенный процент твердых частиц и воды. Ни один из аппаратов для тонкого измельчения не дает однородный по крупности продукт на выходе. Поэтому для выделения готового продукта применяются специальные аппараты — классификаторы, работающие в замкнутом цикле с мельницами. Классификаторы устроены так, что более крупные частицы (пески) осаждаются на дно классификатора и возвращаются обратно в мельницу, а тонкие частицы, имеющие требуемую крупность, поступают вместе с водой для следующего процесса — флотации. В тех случаях, когда требуется очень тонкое измельчение продукта, применяется двухстадиальное измельчение. Одна из таких схем приведена на рис. 1.61.

Задача автоматического регулирования двухстадиального цикла мокрого измельчения заключается в том,

чтобы, изменяя количество воды, поступающей в классификатор первой стадии, получить требуемую величину частиц руды, поступающих на флотацию, после второй стадии измельчения (требуемую структуру пульпы).

Таким образом, входной величиной объекта регулирования является расход воды $Q = u_2(t)$, а выходной —

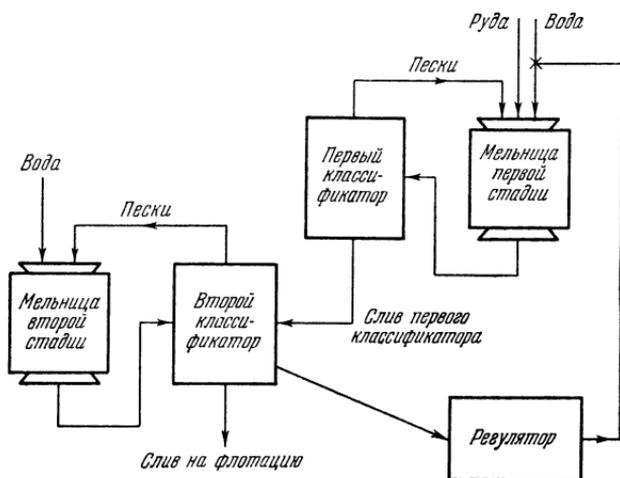


Рис. 1.61.

напряжение на выходе акустического датчика $u_1(t)$, пропорциональное величине частиц руды после второй стадии измельчения. Динамика данной системы при учете нелинейной характеристики регулирующего органа описывается следующими уравнениями:

Уравнение сравнивающего элемента

$$u(t) = u_0(t) - u_3(t), \quad (1.117)$$

где $u_0(t)$ — задающее напряжение, $u(t)$ — напряжение ошибки, $u_3(t)$ — управляющее воздействие.

Уравнение регулирующего органа

$$u_2(t) = \Phi[u(t)], \quad (1.118)$$

где $u_2(t)$ — регулирующее воздействие (расход воды, поступающей в классификатор первой стадии).

Уравнение объекта регулирования

$$a_0 \frac{d^2 u_1}{dt^2} + a_1 \frac{du_1}{dt} + u_1 = k_0 u_2 (t - \tau_0). \quad (1.119)$$

Начальные условия: $u_1(0) = u_{10}$, $\dot{u}_1(0) = \dot{u}_{10}$. Здесь $u_1(t)$ — выходная величина объекта регулирования, (напряжение на выходе акустического датчика), k_0 — коэффициент усиления объекта регулирования τ_0 — время

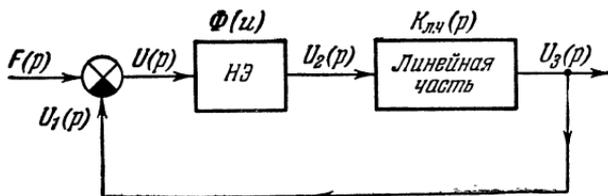


Рис. 1.62.

запаздывания, a_0, a_1 — постоянные, зависящие от параметров объекта.

Уравнение регулятора

$$\frac{du_3}{dt} = k_p \left(u_1 + T_p \frac{du_1}{dt} \right). \quad (1.120)$$

Начальное условие: $u_3(0) = u_{30}$; k_p, T_p — параметры регулятора.

Если каждое из полученных выше уравнений подвергнуть преобразованию Лапласа при ненулевых начальных условиях, то данная нелинейная система будет описываться следующей системой уравнений в изображениях (рис. 1.62):

$$U(p) = U_0(p) - U_3(p), \quad (1.121)$$

$$U_2(p) = \mathcal{L} \{ \Phi [u(t)] \}, \quad (1.122)$$

$$U_1(p) = K_0(p) U_2(p) - F_1(p), \quad (1.123)$$

$$U_3(p) = K_p(p) U_1(p) + F_2(p), \quad (1.124)$$

где $U(p), U_0(p), U_3(p), U_2(p), U_1(p)$ — изображения по Лапласу для $u(t), u_0(t), u_3(t), u_2(t), u_1(t)$,

$$K_0(p) = \frac{U_1(p)}{U_2(p)} = \frac{k_0 e^{-p\tau_0}}{a_0 p^2 + a_1 p + 1} \quad (1.125)$$

— передаточная функция объекта регулирования,

$$K_p(p) = \frac{U_3(p)}{U_1(p)} = \frac{k_p(1 + T_p p)}{p} \quad (1.126)$$

— передаточная функция регулятора,

$$F_1(p) = \frac{(a_0 p + a_1) u_{10} + a_2 \dot{u}_{10}}{a_0 p^2 + a_1 p + 1}, \quad F_2(p) = \frac{u_{30} - k_p T_p u_{10}}{p}$$

— изображения по Лапласу для эквивалентных внешних воздействий, являющихся следствием ненулевых начальных условий.

Структурная схема системы после приведения внешних воздействий ко входу нелинейного элемента приведена на рис. 1.62. Этой системе соответствует следующее уравнение относительно изображения ошибки $U(p)$:

$$U(p) = F(p) - K_{л.ч}(p) \mathcal{L}\{\Phi[u(t)]\}, \quad (1.127)$$

где

$$F(p) = U_0(p) + F_1(p) K_p(p) + F_2(p), \quad (1.128)$$

$$K_{л.ч}(p) = \frac{U_3(p)}{U_2(p)} = \frac{(b_0 + b_1 p) e^{-p\tau_0}}{(a_0 p^2 + a_2 p + 1) p}, \quad (1.129)$$

где $b_0 = k_0 k_p$, $b_1 = k_0 k_p T_p$. Переходя от уравнения относительно изображений к уравнению относительно оригиналов, получим

$$u(t) = \hat{f}(t) - \int_0^t h'(t-\lambda) \Phi[u(\lambda)] d\lambda, \quad (1.130)$$

где

$$\hat{f}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\},$$

$$h'(t) = \mathcal{L}^{-1}\{K_{л.ч}(p)\}.$$

Соответственно нелинейное интегральное уравнение, характеризующее установившееся движение $u^0(t)$, имеет вид

$$u^0(t) = u_0(t) - \int_0^\infty h'(t-\lambda) \Phi[u^0(\lambda)] d\lambda. \quad (1.131)$$

ГЛАВА II

**УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ
АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

**§ 1. Определение понятия устойчивости
нелинейных систем**

На всякую систему автоматического управления во время ее работы действуют различные внешние воздействия, которые можно разделить на следующие две основные группы:

1. *Ограниченное внешнее воздействие* $f_n^0(t)$, которое представляет собой функцию вещественного переменного t , принимающую вполне определенные значения для всякого $t \geq t_0$, если абсолютные значения ее остаются всегда меньше некоторого конечного положительного числа M_f^0 , т. е. при $t \geq t_0$

$$|f_n^0(t)| < M_f^0.$$

Отметим, что аналогичным понятием пользовался в своей работе А. М. Ляпунов [1].

2. *Исчезающее внешнее воздействие* $f_n^H(t)$, которое представляет собой ограниченную функцию вещественного переменного t , имеющую вполне определенные значения для всякого $t \geq t_0$ и, кроме того, при $t \geq t_0$

$$\int_0^{\infty} |f_n^H(t)| dt < M_f^H. \quad (2.1)$$

При этом

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_n^H(t) = 0. \quad (2.2)$$

В результате описанного выше эквивалентного преобразования линейная часть системы, характеризующаяся передаточной функцией $K_{л.ч}^H(p)$, будет устойчивой. В этом случае внешнее воздействие $f_n^H(t)$, являющееся следствием ненулевых начальных условий, будет

удовлетворять условиям (2.1) и (2.2) и, следовательно, будет *исчезающим*.

Как показано выше, динамика преобразованной системы с одним нелинейным элементом (см. рис. 1.43) будет полностью описываться следующим нелинейным интегральным уравнением:

$$x(t) = f_n^0(t) + f_n^H(t) - \int_0^t h_n'(t-\lambda) \Phi_n[x(\lambda)] d\lambda. \quad (2.3)$$

Обычно первым требованием, предъявляемым к любой системе автоматического управления, без выполнения которого она не может нормально функционировать, является требование устойчивой ее работы при действующих на систему воздействиях, т. е. в данном случае — при учете действующих на систему воздействий $f_n^0(t)$ и $f_n^H(t)$.

Существует большое число различных определений понятия устойчивости. Важнейшим является понятие устойчивости по Ляпунову, которое, начиная от цитированной выше работы А. М. Ляпунова, определяется в подавляющем большинстве работ относительно фазовых координат системы.

В случае, когда динамика замкнутых нелинейных систем описывается нелинейными интегральными уравнениями, более удобной формулировкой для дальнейшего изложения является определение устойчивости, аналогичное принятому в теории релейных систем (см. Цыпкин Я. З. [16]).

Будем говорить, что нелинейная система автоматического управления устойчива, если при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число $\eta(\varepsilon) > 0$, что для всех исчезающих внешних воздействий $f_n^H(t)$, удовлетворяющих условию

$$\sup |f_n^H(t)| < \eta, \quad (2.4)$$

отклонение

$$\sup |\xi(t)| = \sup |x(t) - x^0(t)| < \varepsilon \quad (2.5)$$

при любом $t \geq 0$, где $x^0(t)$ — *вынужденное или установившееся движение* *), т. е. нелинейная система будет устойчива тогда и только тогда, когда при любых достаточно малых по абсолютной величине исчезающих внешних воздействиях, приложенных в момент времени $t = 0$, начиная с некоторого момента времени $t > 0$, абсолютная величина отклонения от установившегося (вынужденного) значения ошибки будет также достаточно малой.

Сформулированное выше понятие устойчивости можно заменить более сильным, если потребовать, чтобы с течением времени отклонение в нелинейной системе стремилось к нулю

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0 \quad (2.6)$$

при

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_n^H(t) = 0. \quad (2.7)$$

Системы автоматического управления, удовлетворяющие условиям (2.6) и (2.7), называются *асимптотически устойчивыми*.

Следует различать асимптотическую устойчивость положения равновесия и асимптотическую устойчивость процессов, и, в частности, *вынужденных движений*.

Если на нелинейную систему действуют только исчезающие внешние воздействия $f_n^H(t)$, то установившееся движение $x^0(t)$ в (2.5) удовлетворяет условию

$$x^0(t) = M_x = \text{const} \quad (2.8)$$

или

$$x^0(t) = 0$$

и в этом случае говорят об *асимптотической устойчивости* положения равновесия.

*) Определение понятия вынужденного или установившегося движения в нелинейных системах высокого порядка является довольно сложным и тонким.

В таких системах возможно существование установившихся движений различного вида: непериодических, периодических, почти периодических (последние определяются так называемыми функциями Бэра). В дальнейшем, говоря о вынужденных движениях, будем полагать установленным факт их существования.

Сформулированное выше понятие асимптотической устойчивости положения равновесия не справедливо для систем, имеющих нелинейные характеристики с зоной нечувствительности. Его необходимо определить иначе, что, вообще говоря, является самостоятельной и весьма сложной задачей. Рассмотрением таких задач, возникающих при исследовании систем автоматического управления, занимался А. Х. Гелиг [2, 3]. В этом случае следует считать положение равновесия устойчивым, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x^0(t)| = 0, \quad (2.9)$$

где $x^0(t) = M_x$ — любое значение, принадлежащее зоне нечувствительности (отрезку устойчивости) (рис. 2.1)

$$-x_0 \leq M_x \leq +x_0.$$

Когда на нелинейную систему действуют исчезающее и ограниченное внешние воздействия $f_n^H(t)$ и $f_n^0(t)$, следует говорить об *асимптотической устойчивости процессов*, и, в частности, *вынужденных движений*.

В соответствии с данным выше определением это означает, что если процессы в исследуемой нелинейной системе асимптотически устойчивы, вынужденное движение $x^0(t)$,

вызванное ограниченным внешним воздействием $f_n^0(t)$, существует и ограничено и, кроме того, отклонение $\xi(t)$ от вынужденного движения $x^0(t)$ с течением времени стремится к нулю.

Если условия асимптотической устойчивости выполняются лишь при малых отклонениях от положения равновесия или вынужденного движения, то в этом случае говорят, что система *асимптотически устойчива в малом*.

Для большинства практических случаев этого бывает недостаточно и поэтому важным является обеспечение *асимптотической устойчивости в некоторой области*, т. е. при достаточно большом отклонении от

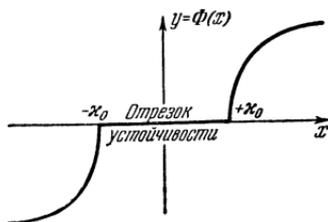


Рис. 2.1.

положения равновесия (вынужденного движения). Принято также говорить, что нелинейная система *асимптотически устойчива в целом* (в большом), если условия асимптотической устойчивости положения равновесия (процессов) выполняются при *любом* исчезающем внешнем воздействии (при любых начальных условиях).

Заметим, что обеспечение для линейных систем асимптотической устойчивости в малом предопределяет асимптотическую устойчивость и в большом, т.е. для линейных систем не имеет смысла вводить отдельно понятие асимптотической устойчивости в малом, в большом или в некоторой области.

Для нелинейных систем может иметь место асимптотическая устойчивость в малом, но условия асимптотической устойчивости в большом или в некоторой области могут не выполняться. В этом проявляется одна из особенностей нелинейных систем.

Возможны два пути решения задачи об устойчивости.

Первый путь связан с решением интегрального (дифференциального) уравнения, характеризующего динамику исследуемой системы. Однако этот путь является в подавляющем большинстве случаев практически неприемлемым, ибо получить точное решение интегрального уравнения для нелинейных систем можно лишь в некоторых частных случаях.

Невозможность получить решения в большинстве практических случаев для систем выше второго порядка и привели к разработке методов нахождения *достаточных* условий устойчивости нелинейных систем без точного решения описывающих их уравнений.

Разработке подобного рода методов также способствовал тот факт, что часто бывает трудно говорить о точном определении нелинейной характеристики при работе системы автоматического управления, поскольку в процессе функционирования она может подвергнуться заметным искажениям (например, под действием приложенной к регулируемому органу нагрузки при колебании уровня энергии, подводимой к исполнительному органу от внешнего источника и т. п.).

В этих случаях, довольно часто встречающихся на практике, можно задать лишь главные, характерные

свойства нелинейной характеристики и найти достаточные условия асимптотической устойчивости в большом или в некоторой области для систем автоматического управления с такими характеристиками. Например, А. М. Летовым [12, 14, 18] введено определение функций (нелинейных характеристик) класса A . Рассматриваемый класс функций охватывает характеристики подавляющего большинства исполнительных органов, используемых в современной технике.

Нелинейные характеристики, характеризуемые функциями, принадлежащими классу A , обладают следующими свойствами:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x) & \text{ — непрерывная функция,} \\ x\Phi(x) & > 0 \text{ при } x \neq 0, \\ \Phi(0) & = 0, \\ \int_0^{\pm \infty} \Phi(x) dx & = \pm \infty. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Как следует из (2.10), график функции $\Phi(x)$ может иметь достаточно произвольную форму. Нелинейная характеристика $\Phi(x)$ может быть задана как графически, так и аналитически. Используя такой подход, можно выделить класс таких нелинейных функций $\Phi(x)$, когда характеристика нелинейного элемента лежит внутри сектора, ограниченного прямыми rx и kx (рис. 2.2), т. е.

$$r < \frac{\Phi(x)}{x} < k. \quad (2.11)$$

Если же в нелинейной системе автоматического управления функция $\Phi(x)$ лежит внутри сектора, ограниченного прямыми rx и kx , и кроме того, выполняются условия принадлежности функций $\Phi(x)$ к классу A , то асимптотическую устойчивость такой системы принято

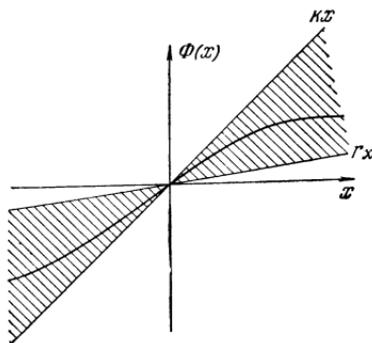


Рис. 2.2.

называть *абсолютной устойчивостью* (А. И. Лурье, В. Н. Постников [1]).

В частности, могут быть случаи, когда $r = 0$, либо $r = 0$ и $k = \infty$. В этих двух последних случаях характеристика нелинейного элемента расположена внутри сектора, ограниченного лучами ox и kx , либо в первом и третьем квадрантах (рис. 2.3, 2.4). Здесь также обычно говорят об *абсолютной устойчивости в большом* либо в *некоторой области* (рис. 2.5).

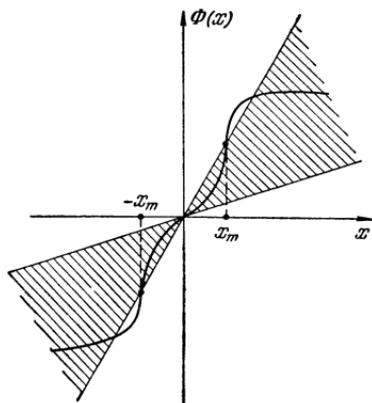


Рис. 2.3.

Наряду с указанными выше понятиями устойчивости известны, например, понятия технической или практической устойчивости на конечном интервале времени (К. А. Карачаров, А. Г. Пилютик [1]), устойчивости по Лагранжу (Ж. П. Ла-Салль, С. Лефшец [1]), гиперустойчивости (В. М. Попов [4, 5]), условной устойчивости

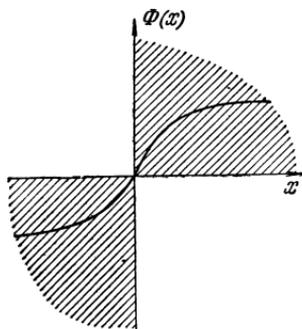


Рис. 2.4.

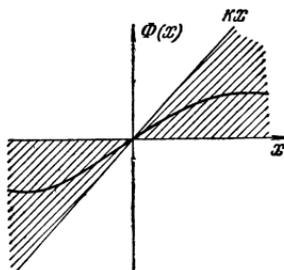


Рис. 2.5.

(Ж. П. Ла-Салль) и т. п. Во всем дальнейшем изложении нами будут рассматриваться, в основном, достаточные частотные критерии абсолютной устойчивости положения равновесия и процессов в нелинейных систе-

мах автоматического управления, в основе которых лежат работы А. И. Лурье и В. Н. Постникова [1], румынского ученого В. М. Попова [1, 2, 3], а также ряда других авторов. Основное внимание будет уделено методам анализа абсолютной устойчивости положения равновесия и процессов в нелинейных системах. Подробный обзор работ, связанных с исследованием абсолютной устойчивости, приведен в конце книги в специальном разделе. В этом разделе приведены работы советских и зарубежных авторов в области теории нелинейных систем автоматического управления.

§ 2. Частотный критерий абсолютной устойчивости положения равновесия (критерий В. М. Попова)

Понятие абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейных систем было впервые введено в теорию регулирования А. И. Лурье и В. Н. Постниковым [1].

До появления работ В. М. Попова [1, 2, 3] абсолютная устойчивость положения равновесия исследовалась на основе второго метода А. М. Ляпунова. Работы В. М. Попова явились основополагающими для нового направления в исследовании абсолютной устойчивости нелинейных систем, связанного с использованием частотных представлений, так хорошо себя зарекомендовавших при анализе и синтезе линейных систем автоматического управления.

1. Частотный критерий абсолютной устойчивости положения равновесия. Рассмотрим нелинейную систему автоматического управления, структурная схема которой, полученная в результате эквивалентного преобразования, приведена на рис. 2.6.

Как уже отмечалось выше, линейная часть преобразованной системы должна быть устойчивой, тогда как линейная часть исходной системы (при $r = 0$) с передаточной функцией $K_{л.ч}(p)$ может быть неустойчивой, либо условно устойчивой. Получение устойчивой линейной части системы достигается за счет введения отрицательной обратной связи с коэффициентом $r > 0$ (рис. 2.6).

В связи с тем, что нас интересует *абсолютная устойчивость положения равновесия* $\dot{f}_n^0(t) = 0$, $f_n(t)$ удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2), а нелинейный элемент,

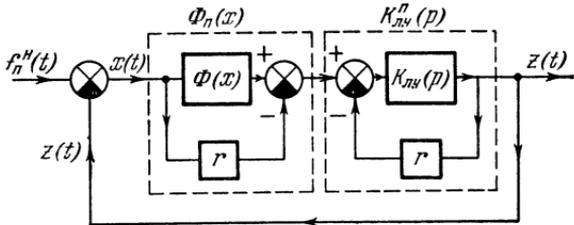


Рис. 2.6.

характеризуемый непрерывной функцией $\Phi_n(x)$, удовлетворяет условиям

$$\left. \begin{aligned} \Phi_n(0) &= 0, \\ \Phi_n(x) x &> 0 \text{ при } x \neq 0, \\ \int_0^{\pm \infty} \Phi_n(x) dx &= \pm \infty, \quad 0 < \frac{\Phi_n(x)}{x} < k. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Передаточная функция $K_{л.ч}^n(p)$ и нелинейная характеристика $\Phi_n(x)$ преобразованной системы связаны с $K_{л.ч}(p)$ и $\Phi(x)$ соотношениями

$$K_{л.ч}^n(p) = \frac{K_{л.ч}(p)}{1 + rK_{л.ч}(p)}, \quad (2.13)$$

$$\Phi_n(x) = \Phi(x) - rx. \quad (2.14)$$

Критерий абсолютной устойчивости положения равновесия В. М. Попова для преобразованной системы, приведенной на рис. 2.6, гласит (В. М. Попов [1—5]):

*Для абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейной системы автоматического управления (рис. 2.6), состоящей из нелинейного элемента с характеристикой $\Phi_n(x)$, удовлетворяющей условиям (2.12), и устойчивой линейной частью с передаточной функцией *) $K_{л.ч}^n(p)$, достаточно, чтобы при $k > 0$ существовало та-*

*) Линейная часть исходной системы может быть при этом нейтральной, условно устойчивой либо неустойчивой.

ков действительное число q , что для всех $\omega \geq 0$ выполнялось неравенство

$$\operatorname{Re} [(1 + jq\omega) K_{л.ч}^n(j\omega)] + \frac{1}{k} > 0, \quad (2.15)$$

где

$$K_{л.ч}^n(j\omega) = [K_{л.ч}^n(p)]_{p=j\omega} = U_{л.ч}^n(\omega) + jV_{л.ч}^n(\omega) \quad (2.16)$$

— частотная характеристика преобразованной линейной части системы.

При $r = 0$ для устойчивой и нейтральной линейной части исходной нелинейной системы (рис. 2.6) с непрерывной нелинейной характеристикой $\Phi(x)$, удовлетворяющей условиям, аналогичным (2.10), неравенство (2.15) приобретает вид

$$\operatorname{Re} [(1 + jq\omega) K_{л.ч}(j\omega)] + \frac{1}{k} > 0, \quad (2.17)$$

где

$$K_{л.ч}(j\omega) = [K_{л.ч}(j\omega)]_{p=j\omega} = U_{л.ч}(\omega) + jV_{л.ч}$$

— частотная характеристика исходной линейной части системы.

2. Некоторые обобщения критерия Попова. После выхода в свет работы В. М. Попова [7] появилась целая серия работ, в которых критерий обобщается на системы

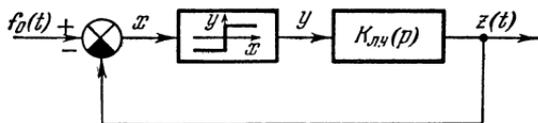


Рис. 2.7.

с линейными частями и нелинейными характеристиками отличного от рассмотренного выше вида, а также на системы, содержащие несколько нелинейных элементов. Приведем без доказательств результаты некоторых из них.

Системы с релейными (разрывными) характеристиками.

Я. З. Цыпкиным [18] и А. Х. Гелигом [2, 3] критерий абсолютной устойчивости положения равновесия был обобщен на нелинейные системы, содержащие одно идеальное реле $y = \Phi(x)$ (рис. 2.7).

При этом нелинейная функция $y = \Phi(x)$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= 0, \\ \Phi(x) x > 0 &\text{ при } x \neq 0, \\ 0 \leq \frac{\Phi(x)}{x} &\leq \infty. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Соотношение между степенью числителя и знаменателя передаточной функции устойчивой линейной части системы $K_{л.ч}(p)$ должно удовлетворять условию

$$n - m \geq 2, \quad (2.19)$$

где n и m — соответственно степени знаменателя и числителя передаточной функции линейной части системы $K_{л.ч}(p)$.

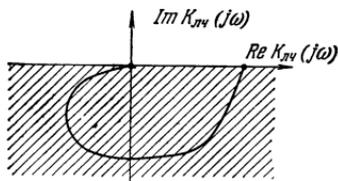


Рис. 2.8.

Достаточное условие абсолютной устойчивости положения

равновесия в такой системе имеет следующий вид:

$$\operatorname{Re} j\omega K_{л.ч}(j\omega) > 0, \quad (2.20)$$

при $q > 0$ для всех $\omega \geq 0$ или

$$\operatorname{Im} K_{л.ч}(j\omega) < 0 \quad (2.21)$$

для всех $\omega \geq 0$.

Геометрически условие (2.21) означает, что частотная характеристика линейной части системы $K_{л.ч}(j\omega)$ для всех $\omega > 0$ должна быть расположена в нижней полуплоскости (рис. 2.8).

А. Х. Гелиг [3] обобщил критерий В. М. Попова на случай, когда нелинейная характеристика $\Phi(x)$ имеет разрывы первого рода и, кроме того, удовлетворяет условиям:

$y = \Phi(x)$ — кусочно-непрерывная функция;

$$0 < \frac{\Phi(x)}{x} < \infty;$$

$$\Phi(x) = \Phi(+0) - kx$$

при $0 < x \leq +\varepsilon$,

$$\Phi(x) = \Phi(-0) - kx$$

при $-\varepsilon \leq x < 0$,

ε — малая положительная величина.

Условия, налагаемые на передаточную функцию линейной части системы, те же самые, что и в случае идеального реле.

Нелинейная характеристика $y = \Phi(x)$, удовлетворяющая сформулированным выше условиям, изображена на рис. 2.9.

Такой вид в ряде случаев имеет характеристика сухого трения. Условие абсолютной устойчивости положения равновесия в такой системе имеет следующий вид:

$$\operatorname{Re} \left[(1 + jq\omega) \frac{K_{л.ч}}{1 + k_{\Phi} K_{л.ч}(p)} \right] \geq 0 \quad (2.22)$$

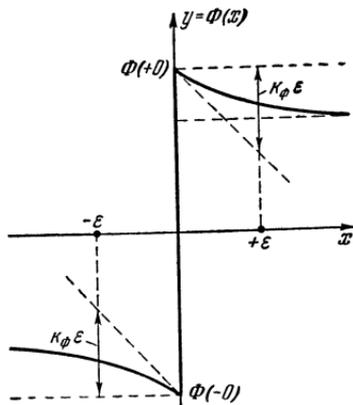


Рис. 2.9.

при $q > 0$ для всех $\omega \geq 0$.

Смысл коэффициента k_{Φ} нетрудно понять из рис. 2.9.

В заключение отметим, что при выполнении условия (2.22) может иметь место бесконечное число возможных точек, определяющих устойчивость положения равновесия в интервале $\Phi(+0) \div \Phi(-0)$, т.е. в данном случае следует говорить об *отрезке покоя*.

3. Нелинейные системы с гистерезисными характеристиками. В. А. Якубович [2, 3, 6] обобщил критерий В. М. Попова для системы с одним нелинейным гистерезисным элементом. В этом случае нелинейная функция $y = \Phi(x, \dot{x})$ удовлетворяет условиям:

$$\Phi(0, 0) = 0,$$

$$\Phi(x, \dot{x}) x > 0 \text{ при } x \neq 0,$$

$$0 \leq \frac{\Phi(x, \dot{x})}{x} \leq k.$$

На рис. 2.10 и 2.11 изображены возможные виды нелинейных гистерезисных характеристик, удовлетворяющие приведенным выше условиям.

На разность степеней передаточной функции линейной части системы, так же как и в предыдущем случае, накладывается условие $n - m \geq 2$.

Кроме того, линейная часть системы должна быть устойчива, либо нейтральна (с одним полюсом в начале координат).

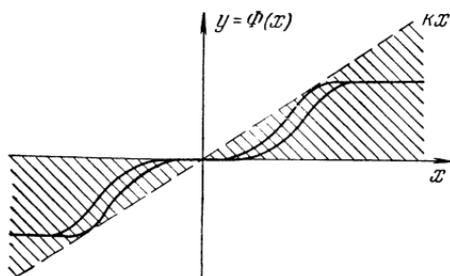


Рис. 2.10.

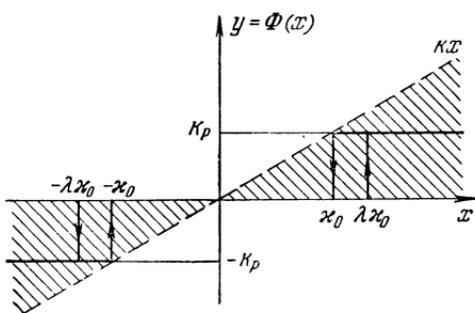


Рис. 2.11.

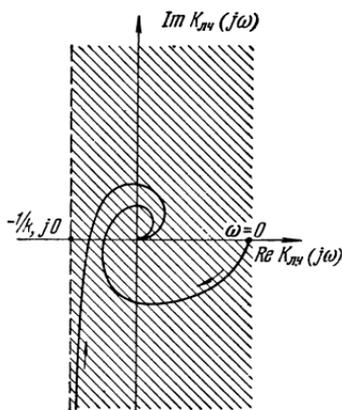


Рис. 2.12.

Условие абсолютной устойчивости положения равновесия в таких системах имеет следующий вид:

$$\operatorname{Re} K_{\text{л.ч}}(j\omega) + \frac{1}{k} > 0 \quad (2.23)$$

для всех $\omega > 0$.

Геометрически это означает, что частотная характеристика линейной части системы $K_{\text{л.ч}}(j\omega)$ должна быть для всех $\omega \geq 0$ расположена правее вертикальной прямой, проходящей через точку $(-\frac{1}{k}, j0)$ (рис. 2.12).

§ 3. Частотный критерий абсолютной устойчивости процессов в нелинейных системах

Рассмотрим нелинейную систему автоматического управления, структурная схема которой, полученная в результате эквивалентного преобразования, приведена на рис. 2.13.

Линейная часть преобразованной системы, характеризуемая передаточной функцией $K_{л.ч}^n(p)$, должна быть

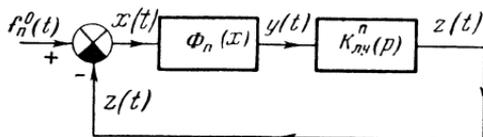


Рис. 2.13.

устойчивой, тогда как линейная часть исходной нелинейной системы может быть неустойчивой, нейтральной либо условно устойчивой.

На входе рассматриваемой системы действует ограниченное внешнее воздействие $f_n^0(t)$, удовлетворяющее условиям (2.1) и (2.2), а нелинейный элемент, характеризуемый непрерывной функцией $y = \Phi(x)$, удовлетворяет приведенным выше условиям (2.10).

Динамика рассматриваемой нелинейной системы (рис. 2.13) полностью характеризуется нелинейным интегральным уравнением

$$x(t) = f_n^0(t) - \int_0^t h'_n(t - \lambda) \Phi_n[x(\lambda)] d\lambda, \quad (2.24)$$

где $h'_n(t) = \mathcal{L}^{-1} \{K_{л.ч}^n(p)\}$ — импульсная характеристика преобразованной устойчивой линейной части системы;

$$K_{л.ч}^n(p) = \frac{K_{л.ч}(p)}{1 + rK_{л.ч}(p)}; \quad (2.25)$$

$$\Phi_n(x) = \Phi(x) - rx; \quad (2.26)$$

$$f_n^0(t) = f^0(t) - r \int_0^t h'_n(t - \lambda) f_n^0(\lambda) d\lambda, \quad (2.27)$$

$f_n^0(t)$ — ограниченное внешнее воздействие.

Следуя приведенному выше определению абсолютной устойчивости, надо доказать, что вынужденное движение $x^0(t)$, удовлетворяющее нелинейному интегральному уравнению (гл. I, § 4)

$$x^0(t) = f_n^0(t) - \int_0^{\infty} h_n'(t-\lambda) \Phi_n[x^0(\lambda)] d\lambda, \quad (2.28)$$

существует и ограничено и, кроме того, отклонение от процесса $\xi(t)$, вызванное любым исчезающим внешним воздействием $f_n^H(t)$ (начальными условиями), примененным в момент $t = 0$, будет асимптотически устойчивым. Нетрудно получить нелинейное интегральное уравнение, характеризующее изменение отклонения $\xi(t)$.

Вследствие действия исчезающего внешнего воздействия $f_n^H(t)$ в момент $t = 0$ $x(t)$ изменится на $\xi(t)$, т. е.

$$x(t) + \xi(t) = f_n^0(t) + f_n^H(t) - \int_0^t h_n'(t-\lambda) \Phi_n\{x(\lambda) + \xi(\lambda)\} d\lambda. \quad (2.29)$$

Вычитая уравнение (2.28) из уравнения (2.29), получим искомое нелинейное интегральное уравнение для отклонения $\xi(t)$:

$$\xi(t) = f_n^H(t) - \int_0^t h_n'(t-\lambda) \Psi[\xi(\lambda), \lambda] d\lambda, \quad (2.30)$$

где

$$\Psi[\xi(t), t] = \Phi_n[x(t) + \xi(t)] - \Phi_n[x(t)] \quad (2.31)$$

— нестационарная нелинейная характеристика.

Нетрудно получить из (2.31), что $\Psi(0, t) \equiv 0$. Структурная схема нелинейной системы, динамика которой описывается интегральным уравнением (2.30), приведена на рис. 2.14. Она отличается от структурной схемы, приведенной на рис. 2.13, тем, что нелинейный элемент с характеристикой $\Phi_n(x)$ заменяется нелинейным элементом с нестационарной характеристикой $\Psi[\xi(t), t]$. Таким

образом, задача об абсолютной устойчивости процессов в нелинейных системах, структурная схема которых может быть приведена к виду, изображенному на рис. 2.13, сводится к установлению факта ограниченности $x(t)$ при наличии ограниченного внешнего воздействия $f_n^0(t)$ и получению условий, при выполнении которых нелинейная система с нестационарной характеристикой

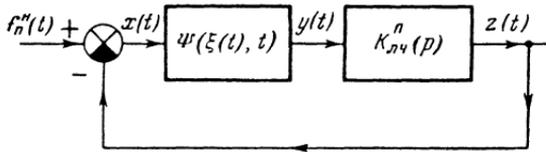


Рис. 2.14.

$\Psi[\xi(t), t]$ (рис. 2.14) имеет абсолютно устойчивое положение равновесия.

В данной работе не приводятся доказательства критерия абсолютной устойчивости процессов, а приведена лишь его формулировка. Доказательство приведено в работах Б. Н. Наумова, Я. З. Цыпкина [1], В. А. Якубовича [5].

Достаточный частотный критерий абсолютной устойчивости процессов в нелинейной системе, структурная схема которой приведена на рис. 2.13, гласит:

Для абсолютной устойчивости процессов в нелинейной системе (рис. 2.13) достаточно, чтобы при заданном $r > 0$ преобразованная линейная часть, характеризуемая передаточной функцией $K_{л.ч}^n(p)$, была устойчивой, частотная характеристика преобразованной линейной части системы $K_{л.ч}^n(j\omega)$ удовлетворяла бы для всех $\omega \geq 0$ условию

$$\operatorname{Re} K_{л.ч}^n(j\omega) + \frac{1}{k} > 0, \quad (2.32)$$

а нестационарная нелинейная характеристика $\Psi[\xi(t), t]$ для любого t удовлетворяла бы условию

$$r < \frac{\Psi[\xi(t), t]}{\xi(t)} < k, \quad (2.33)$$

т. е. принадлежала бы сектору (r, k) (рис. 2.15).

Если вместо $\Psi[\xi(t), t]$ в (2.33) подставить соответствующее выражение через $\Phi(x)$, то вместо (2.33) получим

$$r < \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} < k. \quad (2.34)$$

Таким образом, для обеспечения достаточного условия абсолютной устойчивости процессов должно выполняться неравенство (2.32) и, кроме того, производная от

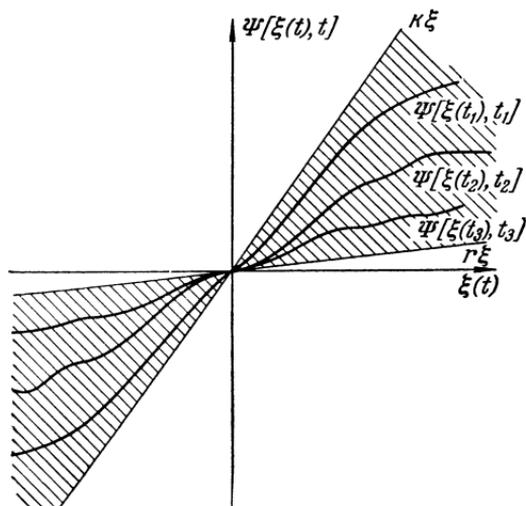


Рис. 2.15.

нелинейной характеристики (2.34) должна принадлежать полосе (r, k) (рис. 2.16).

Кроме того, характеристика $y = \Phi(x)$ должна удовлетворять условиям

$$\left. \begin{aligned} \Phi(0) &= 0, \\ \Phi(x)x &> 0 \text{ при } x \neq 0, \\ \int_0^{\pm\infty} \Phi(x) dx &= \pm \infty. \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

В заключение отметим, что условия абсолютной устойчивости процессов в нелинейных непрерывных си-

стемах более жесткие по сравнению с условиями устойчивости положения равновесия, так как они накладывают дополнительные ограничения на производную от

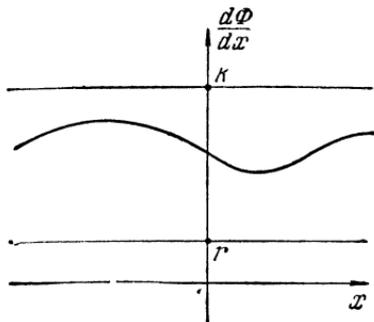


Рис. 2.16.

характеристики нелинейного элемента и соответствуют частному случаю условия В. М. Попова при $q=0$.

§ 4. Абсолютная устойчивость в пространстве параметров

Одной из основной задач теории автоматического регулирования является определение значений параметров системы, гарантирующих устойчивость системы во всех возможных режимах ее работы. Иными словами, необходимо знать, при каких значениях параметров системы обеспечивается устойчивость положения равновесия и устойчивость процессов.

Цель настоящего раздела — дать определение понятия абсолютной устойчивости в пространстве параметров системы, а также охарактеризовать графический и аналитический методы, позволяющие выделить области в пространстве параметров, соответствующие абсолютной устойчивости нелинейной системы в смысле удовлетворения критерию В. М. Попова (С. А. Айсагалиев [1], Д. Д. Шиляк [1]).

Заметим, что такой подход не только часто упрощает исследование нелинейных систем, исходя из условия абсолютной устойчивости, но и тесно связан с оценкой чувствительности систем.

1. Определение областей абсолютной устойчивости положения равновесия. Пусть нелинейная система состоит из линейной части с передаточной функцией $K_{л.ч}(p)$ и нелинейного элемента с характеристикой $\Phi(x)$, а преобразованная система на рис. 2.6 имеет передаточную функцию

$$K_{л.ч}^{\Pi}(p) = \frac{K_{л.ч}(p)}{1 + rK_{л.ч}(p)} \quad (2.36)$$

и нелинейный элемент с характеристикой $\Phi_{\Pi}(x)$ удовлетворяет условиям (2.12).

Рассмотрим передаточную функцию $K_{л.ч}^{\Pi}(p)$ как функцию $p=j\omega$ и l параметров (s_1, s_2, \dots, s_l) , т. е. $K_{л.ч}^{\Pi} = K_{л.ч}^{\Pi}(j\omega, s_1, s_2, \dots, s_l)$. Предположим также, что решение $x(t, s_1, s_2, \dots, s_l)$ существует для всех значений параметров, принадлежащих некоторой области S l -мерного евклидова пространства. Тогда можно дать следующее определение:

нелинейная система имеет абсолютно устойчивое положение равновесия в секторе $(0, k)$ и области S , если для любой характеристики $\Phi_{\Pi}(x) \in (0, k)$ и любой совокупности параметров $(s_1, s_2, \dots, s_l) \in S$ положение равновесия системы асимптотически устойчиво в большом.

Если для исследования абсолютной устойчивости положения равновесия в пространстве параметров воспользоваться критерием В. М. Попова для преобразованной системы (рис. 2.6), где

$$\Pi(\omega) \equiv \operatorname{Re} (1 + j\omega) K_{л.ч}^{\Pi}(j\omega) + \frac{1}{k} > 0 \text{ при } \omega \geq 0, \quad (2.37)$$

то это неравенство нетрудно представить в следующем виде:

$$\Pi(\omega, s_1, \dots, s_l) \equiv \sum_{k=0}^n a_{2k} \omega^{2k} > 0 \text{ при } \omega \geq 0, \quad (2.38)$$

где коэффициенты $a_{2k} = a_{2k}(s_1, s_2, \dots, s_l)$ являются функциями l параметров системы (s_1, \dots, s_l) , а n — степень полинома знаменателя передаточной функции $K_{л.ч}^{\Pi}(p)$. В дальнейшем для удобства будем считать, что передаточная функция $K_{л.ч}^{\Pi}(p)$ преобразованной линей-

ной части системы является функцией $l-2$ параметров (s_1, \dots, s_{l-2}) , а коэффициент $1/k$ и параметр Попова q являются остальными двумя параметрами системы (s_{l-1}, s_l) .

Таким образом, задача исследования абсолютной устойчивости сводится теперь к задаче отыскания условий, накладываемых на коэффициенты a_{2k} или параметры системы s_i , при удовлетворении которых многочлен

$$P(\omega, s_1, \dots, s_l) \equiv \sum_{k=0}^n a_{2k} \omega^{2k} \quad (2.39)$$

не имеет положительных действительных нулей.

Графический критерий абсолютной устойчивости. Рассмотрим случай двух произвольных параметров и тогда неравенство (2.38) примет вид:

$$P(\omega, \alpha, \beta) > 0 \quad \text{при} \quad \omega \geq 0. \quad (2.40)$$

Если в (2.40) знак неравенства заменить на знак равенства, то получим уравнение

$$P(\omega, \alpha, \beta) = 0 \quad \text{при} \quad \omega \geq 0, \quad (2.41)$$

которое при фиксированных значениях ω_i будет определять некоторые кривые C_i в плоскости параметров α и β , разделяющие эту плоскость на области $P > 0$ и $P < 0$. Для того чтобы определить все возможные точки α, β -плоскости, где параметры α и β принадлежат S -области абсолютной устойчивости, обладающей свойством (2.38), необходимо найти огибающую E всех кривых C_i , полученных для различных значений $\omega_i \geq 0$. Известно, что уравнение огибающей к семейству кривых, заданных, например, уравнениями вида

$$P(\omega, \alpha, \beta) = 0 \quad (2.42)$$

в плоскости параметров α и β , может быть определено исключением *) параметра ω из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} P(\omega, \alpha, \beta) &= 0, \\ \frac{\partial P}{\partial \omega} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

*) Если такое исключение возможно.

Таким образом, имея систему уравнений (2.43), можно найти уравнение огибающей $E(\alpha, \beta) = 0$, что позволит найти область абсолютной устойчивости положения равновесия системы в плоскости ее параметров α и β . Здесь необходимо отметить, что, вообще говоря, уравнение (2.43) после исключения параметра ω могут дать еще ряд кривых помимо огибающей $E(\alpha, \beta)$. Эти кривые будут геометрическим местом особых точек и не представляют интереса при анализе абсолютной устойчивости. Чтобы исключить возможные ошибки, необходимо учитывать следующие свойства огибающей E и семейства кривых C_i , описываемых уравнениями $\Pi(\omega_i, \alpha, \beta) = 0$.

1. Каждая точка огибающей E принадлежит одновременно семейству кривых C_i .

2. Огибающая E и полученные кривые C_i для фиксированных значений ω_i имеют общими только изолированные точки.

Графический критерий нетрудно обобщить на случай l параметров (s_1, \dots, s_l) . В этом случае уравнение

$$\Pi(\omega, s_1, \dots, s_l) \equiv \sum_{k=0}^n a_{2k}(s_1, \dots, s_l) \omega^{2k} = 0 \quad (2.44)$$

будет представлять семейство гиперповерхностей в l -мерном евклидовом пространстве, где ω — параметр этого семейства. Тогда уравнения

$$\left. \begin{aligned} \Pi(\omega, s_1, \dots, s_l) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \omega} \Pi(\omega, s_1, \dots, s_l) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

будут характеризовать некоторое граничное состояние. Уравнение $E(s_1, \dots, s_l) = 0$ по аналогии с двумерным случаем назовем огибающей семейства (2.44). При этом огибающая гиперповерхность $E(s_1, \dots, s_l) = 0$ выделит в l -мерном пространстве параметров системы область абсолютной устойчивости.

Отметим, что графический критерий остается простым и наглядным лишь для двумерного случая.

Алгебраические критерии абсолютной устойчивости. Как уже отмечалось, неравенство В. М. Попова может быть представлено в виде

$$\Pi(\omega, s_1, \dots, s_l) \equiv \sum_{k=1}^n a_{2k} \omega^{2k} > 0 \quad \text{при } \omega \geq 0,$$

где $a_{2k} = a_{2k}(s_1, \dots, s_l)$. Таким образом, задача исследования абсолютной устойчивости положения равновесия в пространстве параметров сводится к исследованию неотрицательности многочлена относительно ω^2 , т. е. к нахождению условий, накладываемых на коэффициенты a_{2k} , при которых многочлен $\Pi(\omega, s_1, \dots, s_l)$ не имеет положительных действительных нулей при всех $\omega \geq 0$.

В качестве первого варианта решения задачи абсолютной устойчивости можно рассмотреть достаточные условия выполнения неравенства (2.45), которые выражаются в следующем виде:

$$a_0 > 0, \quad a_{2k} \geq 0 \quad (k = 1, \dots, n). \quad (2.46)$$

Неравенства (2.46), являясь лишь достаточными условиями выполнения критерия Попова, определяют некоторую область абсолютной устойчивости \bar{S} , которая входит в область S ($\bar{S} \subset S$). Однако условия (2.46) позволяют значительно упростить анализ устойчивости в пространстве параметров.

Допустим, что область \bar{S} — выпуклая, и впишем в нее параллелепипед P , стороны которого перпендикулярны координатным осям l -мерного пространства параметров (s_1, \dots, s_l) , причем, центр параллелепипеда находится в точке $\bar{M}(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_l)$, лежащей в области \bar{S} . Теперь максимизируем объем параллелепипеда

$$V = 2^l (s_1 - \bar{s}_1) (s_2 - \bar{s}_2) \dots (s_l - \bar{s}_l) \quad (2.47)$$

по отношению к каждому параметру, рассматривая вместо неравенств (2.46) выражение

$$a_{2k}(s_1, \dots, s_l) = 0, \quad (2.48)$$

которое может быть представлено в виде

$$s_1 = s_1(s_2, s_3, \dots, s_l). \quad (2.49)$$

Подставив (2.49) в (2.47), можно найти значения параметров $(s_2^0, s_3^0, \dots, s_l^0)$, максимизирующие объем V из условия

$$\frac{\partial V}{\partial s_i} = 0, \quad \text{где } i = 2, 3, \dots, l. \quad (2.50)$$

Так как точка $\bar{M}(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_l)$ принадлежала области абсолютной устойчивости \bar{S} и максимизация объема V осуществлялась с учетом ограничений (2.46) на параметры системы, то параллелепипед P при значениях параметров $(s_2^0, s_3^0, \dots, s_l^0)$ полностью лежит в области \bar{S} , т. е. $\bar{P} \subset \bar{S}$.

Теперь рассмотрим необходимые и достаточные условия того, чтобы удовлетворялось неравенство Попова в виде (2.40) и тем самым в виде (2.39). Эти условия абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейных систем могут быть получены на основе применения хорошо известного критерия Рауса.

Отметим еще раз, что неравенство В. М. Попова выполняется, если многочлен

$$P(\omega) \equiv \sum_{k=0}^n a_{2k} \omega^{2k} \quad (2.51)$$

не имеет положительных действительных нулей.

Многочлен $P(\omega)$ является четным полиномом с действительными коэффициентами и, следовательно, имеет $2n$ нулей, симметрично расположенных по отношению к мнимой оси плоскости ω . Теперь рассмотрим полином

$$P(\omega) \equiv \sum_{k=0}^n (-1)^k a_{2k} \omega^{2k}, \quad a_0 > 0, \quad (2.52)$$

и заметим, что действительные нули $P(\omega)$ являются парами мнимых нулей $P(j\omega)$. Если же $P(\omega)$ имеет n нулей с действительными положительными частями, то $P(\omega)$ не имеет положительных действительных нулей и неравенство Попова выполняется.

Так как $P(\omega)$ является четным полиномом, то критерий Рауса не может быть непосредственно применен ввиду того, что вторая строка в таблице Рауса тожде-

ственно равна нулю. Однако в этом случае, который известен как особый случай алгоритма Рауса, вторую строку можно сформировать, используя коэффициенты производной от $\Pi(\omega)$. Тогда для полинома (2.52) расположение Рауса будет иметь вид:

$$\begin{array}{l} \omega^{2n} \\ \omega^{2n-1} \\ \vdots \\ \omega^0 \end{array} \left| \begin{array}{l} (-1)^n a_{2n} \quad (-1)^{n-1} a_{2(n-1)} \dots - a_2 a_0 \\ (-1)^n 2n a_{2n} \quad (-1)^{n-1} 2(n-1) a_{2(n-1)} \dots - 2a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_0 \end{array} \right. \quad (2.53)$$

Теперь можно сформулировать необходимые и достаточные условия выполнения критерия Попова в виде неравенства (2.39):

$$\Pi(\omega) = \operatorname{Re} (1 + jq\omega) K_{л. ч.}^n(j\omega) + \frac{1}{k} > 0 \quad \text{при } \omega \geq 0.$$

Для того чтобы неравенство (2.39) выполнялось при всех $\omega \geq 0$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты a_{2k} полинома

$$\Pi(\omega) \equiv \sum_{k=0}^n a_{2k} \omega^{2k}$$

давали первую колонку

$$(-1)^n a_{2n}, (-1)^n 2n a_{2n}, \dots, a_0$$

в расположении Рауса (2.53), в которой имеет место n перемен знака и $a_0 > 0$.

2. Определение областей абсолютной устойчивости процессов. Во многих случаях для обеспечения нормальной работы нелинейной системы автоматического регулирования требуется обеспечить абсолютную устойчивость процессов. Поэтому встает задача определения областей абсолютной устойчивости процессов.

Рассмотрим преобразованную нелинейную систему на рис. 2.13. Условие абсолютной устойчивости процессов

будет выражаться неравенством (2.32)

$$\Pi(\omega) \equiv \operatorname{Re} K_{л.ч}^n(j\omega) + \frac{1}{k} > 0 \quad \text{при } \omega \geq 0.$$

Это неравенство можно представить в виде

$$\Pi(\omega; s_1, s_2, \dots, s_l) \equiv \sum_{k=0}^n a_{2k} \omega^{2k} > 0 \quad \text{при } \omega \geq 0,$$

где обозначения имеют тот же смысл, что и в предыдущем разделе. Однако в данном случае в l параметров системы не входит параметр q .

Используя изложенную выше методику, можно определить области абсолютной устойчивости процессов как на основе графических, так и алгебраических критериев.

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ КРИТЕРИЯ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЦЕССОВ

§ 1. Различные формулировки критерия абсолютной устойчивости процессов

Достаточный частотный критерий абсолютной устойчивости процессов в преобразованной нелинейной системе автоматического управления с одной однозначной нелинейной характеристикой $\Phi_{\Pi}(x)$, принадлежащей классу A , на которую действует ограниченное внешнее воздействие $f_{\Pi}^0(t)$, гласит:

Для абсолютной устойчивости процессов в системе с одним нелинейным элементом достаточно, чтобы при заданном $r > 0$ преобразованная линейная часть системы, характеризующаяся передаточной функцией

$$K_{\text{л.ч}}^{\Pi}(p) = \frac{K_{\text{л.ч}}(p)}{1 + rK_{\text{л.ч}}(p)}, \quad (3.1)$$

была устойчивой, частотная характеристика линейной части системы $K_{\text{л.ч}}(j\omega)$ удовлетворяла бы для всех $\omega \geq 0$ условию

$$\operatorname{Re} \frac{K_{\text{л.ч}}(j\omega)}{1 + rK_{\text{л.ч}}(j\omega)} + \frac{1}{k - r} \geq 0, \quad (3.2)$$

а нестационарная нелинейная характеристика $\Psi(x, t)$ при любом $t > 0$ лежала бы внутри сектора (r, k)

$$r < \frac{\Psi(x, t)}{x} < k, \quad (3.3)$$

где

$$r > 0, \quad k > 0, \quad k > r,$$

либо производная от нелинейной характеристики $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ принадлежала бы полосе (r, k) , т. е.

$$r < \frac{\partial \Phi}{\partial x} < k. \quad (3.4)$$

Практически удобнее пользоваться последним условием.

В случае устойчивой линейной части можно положить $r=0$, тогда вместо (3.2) получим

$$\operatorname{Re} K_{\text{л. ч}}(j\omega) + \frac{1}{k} \geq 0 \quad (3.5)$$

или

$$\operatorname{Re} kK_{\text{л. ч}}(j\omega) + 1 \geq 0. \quad (3.6)$$

Геометрически на плоскости амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой линеаризованной системы, получаемой из исходной нелинейной системы заменой нелинейного элемента линейным усилителем с коэффициентом усиления k , это означает, что частотная характеристика разомкнутой системы $kK_{\text{л. ч}}(j\omega)$ должна быть для всех $\omega \geq 0$ расположена правее прямой $kU_{\text{л. ч}}(\omega) = -1$ (рис. 3.1).

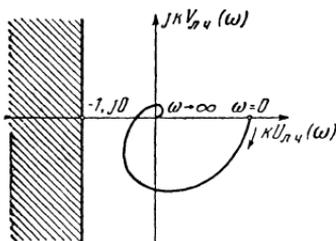


Рис. 3.1.

Для формулировки частотного критерия абсолютной устойчивости процессов при $r \neq 0$ образуем неравенство (3.6), введя параметр $A = \frac{k}{r} > 0$:

$$\operatorname{Re} \frac{kK_{\text{л. ч}}(j\omega)}{A + kK_{\text{л. ч}}(j\omega)} + \frac{1}{A-1} \geq 0, \quad (3.7)$$

где

$$kK_{\text{л. ч}}(j\omega) = kU_{\text{л. ч}}(\omega) + jkV_{\text{л. ч}}(\omega). \quad (3.8)$$

Найдем в плоскости $kU_{\text{л. ч}}$, $jkV_{\text{л. ч}}$ геометрическое место точек, соответствующее $A = \text{const}$, получаемое при замене в (3.6) знака неравенства знаком равенства. Подставляя (3.8) в левую часть (3.6) и находя вещественную часть и приравнивая ее нулю, получим уравнение искомого геометрического места:

$$\left[kU_{\text{л. ч}}(\omega) + \frac{1}{2}(A+1) \right]^2 + kV_{\text{л. ч}}^2(\omega) = \frac{1}{4}(A-1)^2. \quad (3.9)$$

Нетрудно показать, что найденное выражение представляет собой уравнение семейства окружностей, проходящих через точку $(-1, j0)$, имеющих радиус $R = \frac{A-1}{2}$

и расположенных левее прямой $kU_{л.ч}(\omega) = -1$ (рис. 3.2, а). Каждой из окружностей будет соответствовать свое значение $A = \frac{k}{r}$, которое будет всегда больше или равно единице.

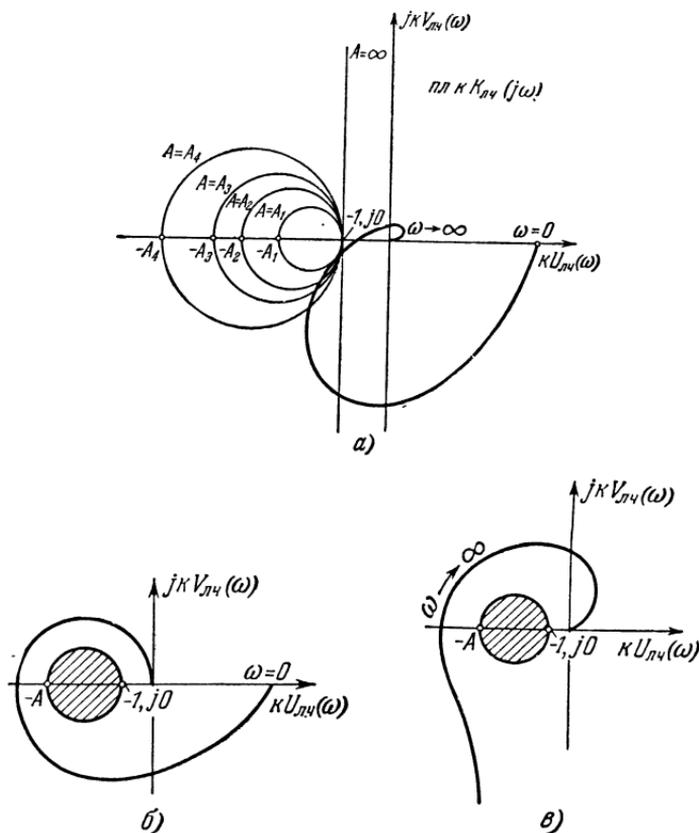


Рис. 3.2.

Неравенство (3.7) будет выполняться вне A -окружностей, что легко установить, полагая $kU_{л.ч} = kV_{л.ч} = 0$ при $k > 0, r > 0$. Условие абсолютной устойчивости процессов будет выполнено при $r \neq 0$, если частотная характеристика $kK_{л.ч}(j\omega)$ будет находиться вне соответствующей A -окружности (см. рис. 3.2, а).

Таким образом, каждой A -окружности соответствует свое значение A , которое может меняться от единицы до бесконечности. При $A = 1$ A -окружность переходит в окружность с нулевым радиусом с центром в точке $(-1, j0)$ и достаточное условие абсолютной устойчивости нелинейной системы переходит в необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости некоторой линейной системы при $k = r$. При $A = \infty$ A -окружность переходит в окружность бесконечного радиуса и из (3.7) получаем условие (3.6).

Теперь можно дать следующую простую формулировку частотного критерия абсолютной устойчивости процессов в нелинейных системах для случая, когда $r \neq 0$:

Для абсолютной устойчивости процессов в системе автоматического управления с одним нелинейным элементом достаточно, чтобы производная от характеристики нелинейного элемента принадлежала полосе (r, k) и чтобы частотная характеристика разомкнутой системы $kK_{л.ч}(j\omega)$, удовлетворяя частотному критерию Найквиста, не пересекала соответствующую A -окружности, где $A = \frac{k}{r}$.

Очевидно, что при выполнении частотного критерия абсолютной устойчивости процессов будут устойчивыми не только возможные в системе процессы, но также и положения равновесия.

Таким образом, частотный критерий абсолютной устойчивости процессов выделяет класс систем, в которых устойчивость положения равновесия обуславливает и устойчивость процессов.

В этом смысле этот класс систем обладает свойством, присущим линейным системам.

В последнее время Р. В. Броккет и Г. Б. Ли [1] обобщили сформулированный выше критерий, получив достаточное условие, при выполнении которого процессы в рассматриваемой нелинейной системе будут неустойчивыми.

Этот критерий может быть сформулирован так:

Для абсолютной неустойчивости процессов в нелинейной системе (рис. 2.13) достаточно, чтобы при заданном $r > 0$ частотная характеристика разомкнутой системы $kK_{л.ч}(j\omega)$ охватывала бы соответствующую A -окруж-

ность, где $A = \frac{k}{r}$. При этом производная от характеристики нелинейного элемента $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ может принадлежать полосе (r, k) .

На рис. 3.2, б, в приведены частотные характеристики разомкнутой системы, соответствующие случаям, когда процессы в замкнутой нелинейной системе неустойчивы.

Нетрудно также сформулировать частотный критерий абсолютной устойчивости процессов в нелинейных системах на языке логарифмических частотных характеристик.

Семейство A -окружностей (рис. 3.2, а) отображается на плоскости логарифмической частотной характеристики разомкнутой линеаризованной системы в декартовой системе координат $L(\omega) = Q[\varphi(\omega)]$ (где $L(\omega) = 20 \lg |kK_{л.ч}(j\omega)|$ — логарифмическая амплитудно-частотная характеристика; $\varphi(\omega)$ — логарифмическая фазо-частотная характеристика) в семейство граничных кривых (см. Б. Н. Наумов, Я. З. Цыпкин [1]) (рис. 3.3, а),

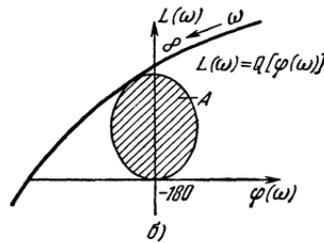
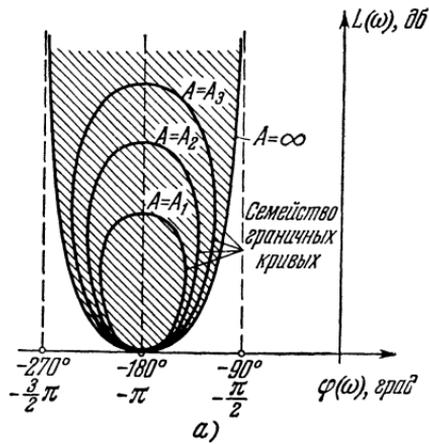


Рис. 3.3.

каждой из которых соответствует свое значение $A = \frac{k}{r} > 0$.

В этом случае частотный критерий абсолютной устойчивости процессов можно сформулировать так:

Для абсолютной устойчивости процессов в системе автоматического управления с одним нелинейным элементом достаточно, чтобы производная от характеристики

нелинейного элемента $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ принадлежала полосе (r, k) и чтобы логарифмическая частотная характеристика разомкнутой системы $L(\omega) = Q[\varphi(\omega)]$, удовлетворяя частотному критерию Найквиста, не пересекала соответствующей граничной A -кривой (рис 3.3, а).

На рис. 3.3, б изображена частотная характеристика разомкнутой системы для случая, когда замкнутая нелинейная система будет неустойчивой.

Отметим, что граничные A -кривые, изображенные на рис. 3.3, а, б, совпадают с так называемыми номограммами Д. Никольса (см. стр. 34), которые используются для определения вещественной частотной характеристики замкнутой линейной системы по логарифмической частотной характеристике разомкнутой системы. В этом случае каждой номограмме Никольса соответствует свое максимальное значение вещественной частотной характеристики B_m .

Нетрудно показать, что максимальные значения вещественных частотных характеристик B_m связаны с соответствующими значениями $A = \frac{k}{r}$ следующим соотношением (рис. 3.4):

$$A - 1 = \frac{1}{|1 - B_m|}. \quad (3.10)$$

Та часть номограммы Никольса, которая соответствует граничным кривым, изображенным на рис. 3.3, соответствует положительным значениям B_m в диапазоне от единицы и до бесконечности. При B_m , равном бесконечности, номограмма Никольса вырождается в точку с координатами $(0, -\pi)$.

Таким образом, по максимуму вещественно частотной характеристики замкнутой линеаризованной системы, получаемой в результате замены нелинейной характеристики линейной с коэффициентом усиления k , можно судить об абсолютной устойчивости процессов в нелинейной системе автоматического управления, т. е. зная B_m , по кри-

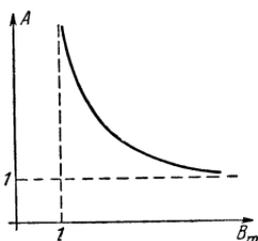


Рис. 3.4.

вой $A = A(B_m)$ легко определить соответствующее значение $A = \frac{k}{r}$. Необходимые нам для этого свойства можно также легко определить по кривой D -разбиения по коэффициенту усиления разомкнутой линеаризованной системы $\bar{k} = k k_{л.ч}$ (см. М. В. Мееров [2]). Сформулируем некоторые из таких свойств, которые могут оказаться полезными, если нами построена кривая D -разбиения по коэффициенту усиления для линеаризованной системы.

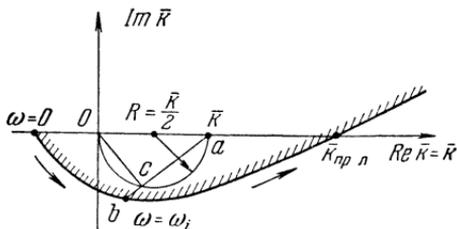


Рис. 3.5.

Свойство 1. Процессы в нелинейной системе автоматического управления будут абсолютно устойчивы при расположении $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ в полосе $(0, \bar{k})$, если окружность радиуса $R = \frac{\bar{k}}{2}$ с центром на положительной части действительной оси, проходящая через начало координат плоскости

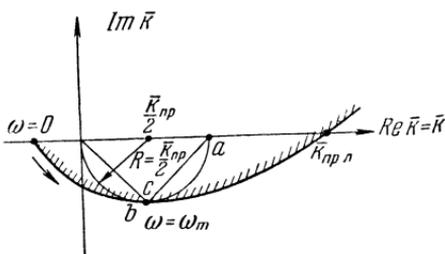


Рис. 3.6.

кривой D -разбиения по коэффициенту усиления \bar{k} и расположенная в области устойчивости, нигде не пересекается с кривой D -разбиения (рис. 3.5).

Известно, что значение $B(\omega_i) = \frac{ac}{ab}$, но так как в данном случае

$ac < ab$, то $B(\omega_i) < 1$, что и доказывает справедливость выполнения свойства 1.

Свойство 2. Максимальное (предельное) значение коэффициента $\bar{k}_{пр}$ полосы $(0, \bar{k}_{пр})$, при котором будут выполняться достаточные условия абсолютной устойчивости процессов в нелинейной системе (рис. 3.6), можно определить из условия касания окружности радиуса $R = \frac{\bar{k}_{пр}}{2}$

с центром на положительной части действительной оси кривой D -разбиения по коэффициенту усиления разомкнутой системы. Это предельное значение $\bar{k} = \bar{k}_{пр}$ равно $2R$, где R — радиус окружности (рис. 3.6). Значения r и k полосы $(r, \bar{k}_{пр})$, при которых процессы в нелинейной системе автоматического управления будут абсолютно устойчивыми, могут быть определены, если провести окружность радиусом $R = \frac{\bar{k}}{2}$ с центром на положительной части действительной оси (рис. 3.7) и определить величину максимума вещественной частотной характеристики замкнутой линеаризованной системы B_m .

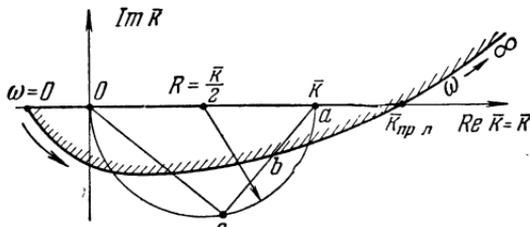


Рис. 3.7.

При этом, по максимуму вещественной частотной характеристики B_m , легко определяемому по кривой D -разбиения по коэффициенту усиления, можно определить значения

$$A = \frac{\bar{k}}{r} = \frac{1}{|1 - B_m|} + 1 \tag{3.11}$$

и

$$r = \frac{\bar{k}}{A}, \quad \text{где } \bar{k} = 0a.$$

Доказательство свойства 2 аналогично доказательству свойства 1.

§ 2. Анализ абсолютной устойчивости процессов

Под задачей анализа абсолютной устойчивости процессов в нелинейных системах будем понимать возможность установления факта выполнения частотного критерия абсолютной устойчивости процессов при заданной структуре и параметрах исследуемой системы, определе-

ние значений k и r и в тех случаях, когда это необходимо, построение границы области абсолютной устойчивости $\bar{k} = \bar{k}(r)$, где $\bar{k} = k k_{л.ч.}$

Таким образом, задача анализа абсолютной устойчивости процессов состоит в проверке выполнения частотного критерия при заданной структуре и параметрах системы.

Если известна частотная характеристика линейной части системы $K_{л.ч}(j\omega)$, то нетрудно определить значения k и r , т. е. ширину полосы (r, k), которым должна принадлежать производная от характеристики нелинейного элемента. Для этой цели удобно использовать сетку A -окружностей (рис. 3.2). Задаваясь значениями k и изображая на этой сетке частотную характеристику разомкнутой линеаризованной системы $kK_{л.ч}(j\omega)$, из условия касания $kK_{л.ч}(j\omega)$ соответствующей A -окружности определяем параметр $A = \frac{k}{r}$. Зная значения k и $A = \frac{k}{r}$, нетрудно определить соответствующие значения r . Таким образом, если это необходимо, можно получить и зависимость $\bar{k} = \bar{k}(r)$.

Для нахождения соответствующих значений k и r или определения зависимости $\bar{k} = \bar{k}(r)$ в случае использования логарифмических частотных характеристик вместо семейства A -окружностей необходимо иметь их отображение (семейство граничных кривых) в декартовой логарифмической системе координат на плоскости $L(\omega), \varphi(\omega)$ (рис. 3.8). В этом случае для нахождения зависимости $\bar{k} = \bar{k}(r)$ необходимо:

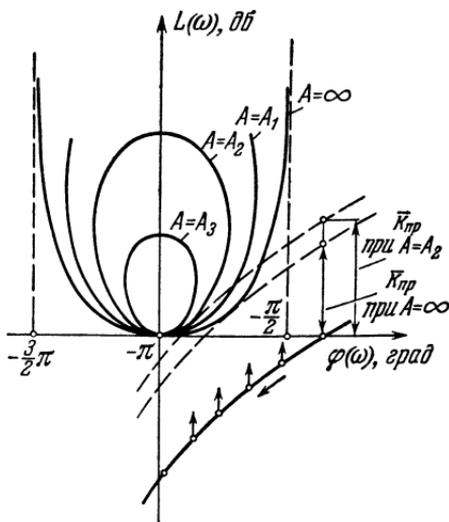


Рис. 3.8.

1. Построить логарифмические амплитудно и фазо-частотные характеристики линейной части системы для $\bar{k} = k k_{л.ч} = 1$, где $k_{л.ч}$ — коэффициент усиления линейной части системы.

2. Перестроить их на плоскость $L(\omega)$, $\varphi(\omega)$ и определить индексы A -кривых, касательных к логарифмическим характеристикам при разных значениях \bar{k} .

3. Зная A , найти значения r , соответствующие различным значениям $\bar{k} = k k_{л.ч}$.

В тех случаях, когда имеется кривая D -разбиения по коэффициенту усиления разомкнутой линеаризованной системы \bar{k} , можно воспользоваться сформулированными выше свойствами для определения зависимости $\bar{k} = \bar{k}(r)$ непосредственно по кривой D -разбиения.

§ 3. Синтез корректирующих устройств нелинейных систем, обеспечивающих абсолютную устойчивость процессов

1. **Общие соображения.** В ряде случаев может оказаться, что при заданных параметрах системы и требуемом значении коэффициента усиления $\bar{k} = k k_{л.ч}$

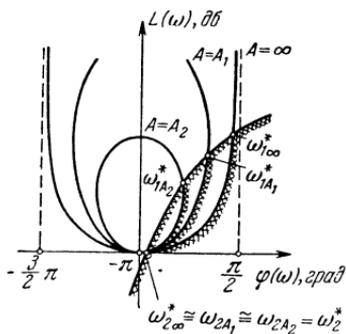


Рис. 3.9.

условия абсолютной устойчивости процессов не выполняются. Тогда логарифмическая частотная характеристика $L(\omega) = Q[\varphi(\omega)]$ может пересекаться с граничными A -кривыми (рис. 3.9).

В этом случае естественно возникает задача — синтезировать корректирующее устройство, при наличии которого условия абсолютной устойчивости выполняются.

Для этого можно использовать различные типы линейных корректирующих устройств. Рассмотрим методику синтеза на примере построения последовательного корректирующего устройства, предварительно показав, как найти желаемую логарифмическую частотную характе-

ристку линейной части системы, при наличии которой выполняется частотный критерий абсолютной устойчивости процессов.

2. Желаемая логарифмическая частотная характеристика. Как уже было отмечено, в том случае, когда частотный критерий абсолютной устойчивости процессов не выполняется, логарифмическая характеристика линейной части системы пересекается с граничными кривыми. Так на рис. 3.9 пересечение происходит в точках

$$\omega_{1\infty}^*, \omega_{2\infty}^*, \omega_{1A_1}^*, \omega_{2A_1}^*, \dots \\ \dots, \omega_{1A_i}^*, \omega_{2A_i}^*.$$

Здесь индексы при ω^* указывают значения индексов соответствующих граничных А-кривых, с которыми пересекается частотная характеристика. В связи с тем, что на рис. 3.9

$$\omega_{2\infty}^* \approx \omega_{2A_1}^* \approx \dots \approx \omega_{2A_i}^*,$$

в дальнейшем у ω_2^* индексы граничных кривых не пишутся. Из рис. 3.9 следует, что если ввести в систему корректирующее устройство таким образом, чтобы надлежащим образом деформировать частотную характеристику линейной части системы, то достаточный частотный критерий абсолютной устойчивости процессов будет выполняться.

Назовем *идеальной желаемой логарифмической частотной характеристикой*, для которой выполняются достаточные условия абсолютной устойчивости процессов при $A=A_i$, логарифмическую характеристику, заштрихованную на рис. 3.9 двойной штриховкой, и будем ее в дальнейшем обозначать $L_{ж. и}(\omega) = Q[\varphi_{ж. и}(\omega)]$.

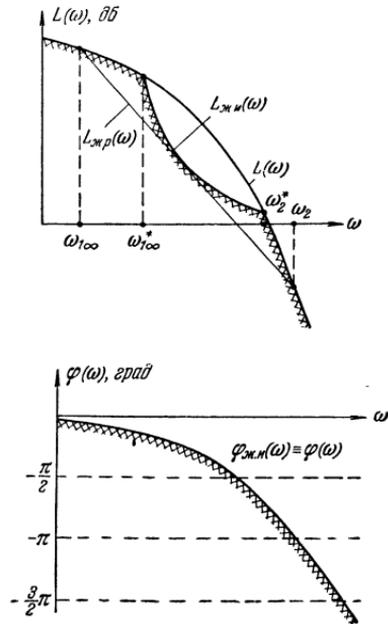


Рис. 3.10.

Задаваясь значениями φ в диапазоне $\omega_{1A_i}^* \div \omega_2^*$, можно на плоскости логарифмической амплитудно-частотной характеристики линейной части системы изобразить характеристику $L_{ж. и}(\omega)$, которая на рис. 3.10 заштрихована двойной штриховкой.

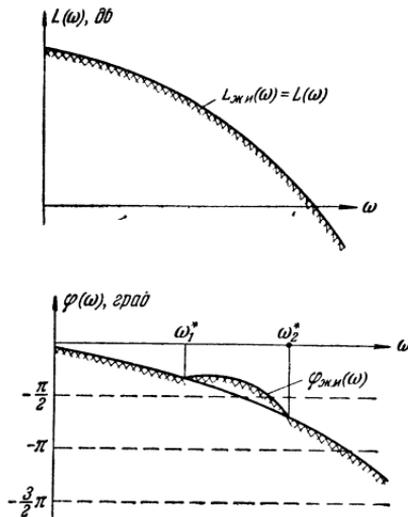


Рис. 3.11.

В этом случае

$$L_{ж. и}(\omega) \neq L(\omega),$$

$$\varphi_{ж. и}(\omega) \equiv \varphi(\omega).$$

Можно, задаваясь значениями L в том же диапазоне $\omega_{1A_i}^* \div \omega_2^*$, на плоскости логарифмической фазочастотной характеристики изобразить $\varphi_{ж. и}(\omega)$. Нетрудно видеть, что в этом случае (рис. 3.11)

$$L_{ж. и}(\omega) \equiv L(\omega),$$

$$\varphi_{ж. и}(\omega) \neq \varphi(\omega).$$

Таким образом, возможен некоторый произвол при получении желаемых логарифмических частотных характеристик $L_{ж. и}(\omega)$ и $\varphi_{ж. и}(\omega)$. Как будет видно из дальнейшего, удобнее пользоваться первым способом, при котором $\varphi_{ж. и}(\omega) \equiv \varphi(\omega)$ (см. рис. 3.10).

3. Синтез последовательных корректирующих устройств. Предположим, что мы хотим обеспечить выполнение достаточного частотного критерия абсолютной устойчивости процессов при помощи введения последовательного корректирующего устройства (рис. 3.12). В этом случае необходимо найти такую передаточную функцию последовательного корректирующего устройства $K_R(p)$, чтобы частотная характеристика $K_{л. ч}(j\omega)K_R(j\omega)$ не пересекалась с соответствующей граничной кривой. Нетрудно определить желаемую логарифмическую амплитудно-частотную характеристику корректирующего устройства в идеальном случае, чтобы

обеспечить выполнение частотного критерия абсолютной устойчивости процессов.

В этом случае

$$L_{к. и}(\omega) = L_{ж. и}(\omega) - L(\omega), \quad \varphi_{к. и}(\omega) \equiv 0.$$

Как известно из линейной теории, такого корректирующего устройства (у которого логарифмические

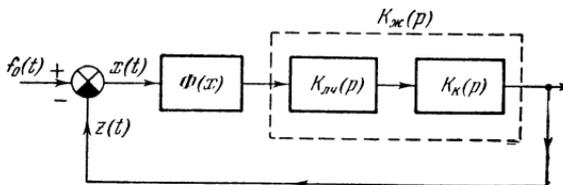


Рис. 3.12.

амплитудно-частотные характеристики меняются, а фазо-частотные не меняются) не существует. Поэтому целесообразно аппроксимировать идеальную желаемую логарифмическую амплитудно-частотную характеристику

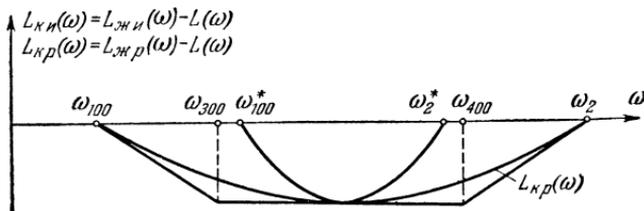


Рис. 3.13.

$L_{ж. и}(\omega)$ физически реализуемой, которая на рис. 3.13 обозначена $L_{ж. п}(\omega)$. Тогда в силу того, что мы синтезируем последовательное корректирующее устройство, его логарифмическую амплитудно-частотную характеристику можно определить так:

$$L_{к. п}(\omega) = L_{ж. п}(\omega) - L(\omega).$$

Аппроксимируя характеристику $L_{ж. п}(\omega)$ ломаными, имеющими наклон нуль или $\pm 20 m$ дБ/дек, где m — целое число, получаем асимптотическую логарифмическую амплитудно-частотную характеристику, имея которую, не

представляет труда записать передаточную функцию корректирующего устройства. В данном случае при $A = \infty$

$$K_k(p) = \frac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)},$$

где

$$T_1 = \frac{1}{\omega_{2\infty}}, \quad T_2 = \frac{1}{\omega_{3\infty}},$$

$$T_3 = \frac{1}{\omega_{1\infty}}, \quad T_4 = \frac{1}{\omega_{4\infty}}.$$

Схема корректирующего устройства, соответствующего передаточной функции $K_k(p)$, приведена на рис. 3.14. При синтезе последовательных корректирующих устройств удобно пользоваться

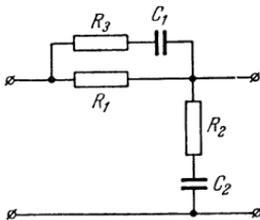


Рис. 3.14.

таблицей, в которой приведены (см. приложение 4) асимптотические логарифмические частотные характеристики и соответствующие им передаточные функции, которые впервые были приведены в книге Г. Р. Честната и Р. В. Майера [1].

Пользоваться для синтеза идеальной желаемой логарифмической фазо-частотной характеристикой неудобно, так как в этом случае значительно сложнее находить передаточную функцию, соответствующую $\varphi_{ж.р}(\omega)$.

В заключение синтеза последовательного корректирующего устройства, построив желаемую логарифмическую частотную характеристику скорректированной линейной части системы в декартовой системе координат, необходимо убедиться, что условия абсолютной устойчивости процессов выполняются и кривая $L_{ж.р}(\omega) = Q[\varphi_{ж.р}(\omega)]$ не пересекает соответствующей граничной кривой.

§ 4. Примеры исследования абсолютной устойчивости процессов в нелинейных системах

1. Система автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока.

В качестве первого примера исследования абсолютной устойчивости процесса рассмотрим нелинейную систему автоматического регу-

лирования скорости двигателя при учете нелинейности усилителя. Для этой системы:

1. Построим амплитудно-фазовую характеристику линейной части системы $kK_{л.ч}(j\omega)$ и по ней определим предельное значение $\bar{k} = \bar{k}_{пр}$. Сравним найденное значение $\bar{k} = \bar{k}_{пр}$ со значением $\bar{k} = \bar{k}_{пр.л}$ линеаризованной системы.

2. Построим кривую D -разбиения по коэффициенту усиления и, пользуясь этой кривой, определим $\bar{k} = \bar{k}_{пр}$.

3. При помощи логарифмических частотных характеристик построим области абсолютной устойчивости процессов в плоскости параметров $\bar{k}_{пр}$ и T_r при $A = \infty; 41; 11; 6; 3$.

4. Синтезируем последовательные корректирующие устройства, обеспечивающие выполнение критерия абсолютной устойчивости процессов при $A = \infty; 11$ и $\bar{k}_{пр} = 100$.

Анализ абсолютной устойчивости процессов по амплитудно-фазовой характеристике линейной части системы.

В соответствии с формулировкой достаточного частотного критерия абсолютной устойчивости процессов для определения предельного значения ко-

эффициента усиления $\bar{k} = \bar{k}_{пр}$ построим нормированную амплитудно-фазовую характеристику линейной части системы $\bar{K}_{л.ч}(j\omega)$ (рис. 3.15):

$$\bar{K}_{л.ч}(j\omega) = \frac{1}{(T_r j\omega + 1)(-T_M T_\alpha \omega^2 + jT_M \omega + 1)} = \bar{U}_{л.ч}(\omega) + j\bar{V}_{л.ч}(\omega),$$

где $T_r = 0,005$ сек, $T_M = 0,1$ сек, $T_\alpha = 0,001$ сек, и определим максимальное значение действительной части, которое в данном случае равно $\bar{U}_{л.ч \max}(\omega) = 0,04$. Тогда нетрудно определить предельное значение $\bar{k} = \bar{k}_{пр}$ из условия

$$\bar{k}_{пр} \bar{U}_{л.ч \max} = 1,$$

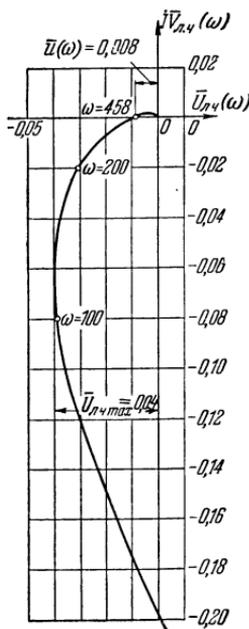


Рис. 3.15.

откуда

$$\bar{k}_{\text{пр}} = \frac{1}{\bar{U}_{\text{л. ч max}}} = \frac{1}{0,04} = 25.$$

Значение предельного коэффициента усиления линеаризованной системы $\bar{k}_{\text{пр. л}} = 125$ значительно больше предельного значения для нелинейной системы $\bar{k}_{\text{пр}} = 25$, при котором выполняется достаточное условие абсолютной устойчивости процессов.

Анализ абсолютной устойчивости процессов по кривой D-разбиения по коэффициенту усиления разомкнутой линеаризованной системы. В соответствии с приведенной

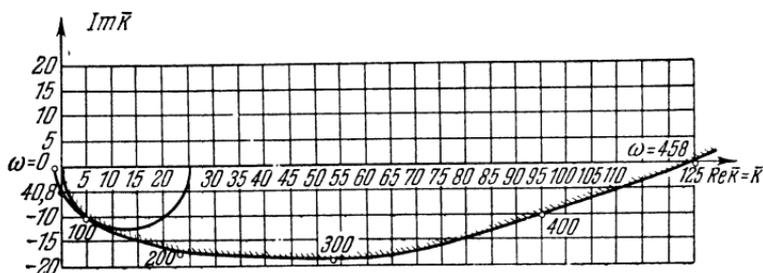


Рис. 3.16.

выше методикой анализа абсолютной устойчивости процессов в нелинейной системе на основе кривой D -разбиения по коэффициенту усиления разомкнутой линеаризованной системы \bar{k} :

а) построим кривую D -разбиения по коэффициенту усиления (рис. 3.16)

$$\bar{k} = -(T_r j\omega + 1)[T_M T_y (j\omega)^2 + T_M j\omega + 1];$$

б) определим диаметр окружности с центром на положительной части действительной оси, проходящей через начало координат и касательную к кривой D -разбиения (рис. 3.16), который и будет равен

$$2R = \bar{k}_{\text{пр}} = 25.$$

Проведенное исследование показывает, что кривой D -разбиения пользоваться удобнее, чем амплитудно-фазовой характеристикой.

Построение области абсолютной устойчивости в плоскости параметров $\bar{k}_{пр}$, T_r . Для построения области абсолютной устойчивости процессов в плоскости параметров $\bar{k}_{пр}$ и T_r необходимо:

а) построить семейство логарифмических амплитудно- и фазо-частотных характеристик при $\bar{k} = 1$ и разных T_r (в интересующем нас диапазоне изменения T_r);

б) перестроить семейство найденных логарифмических частотных характеристик в декартовой системе координат $L = Q[\varphi]$;

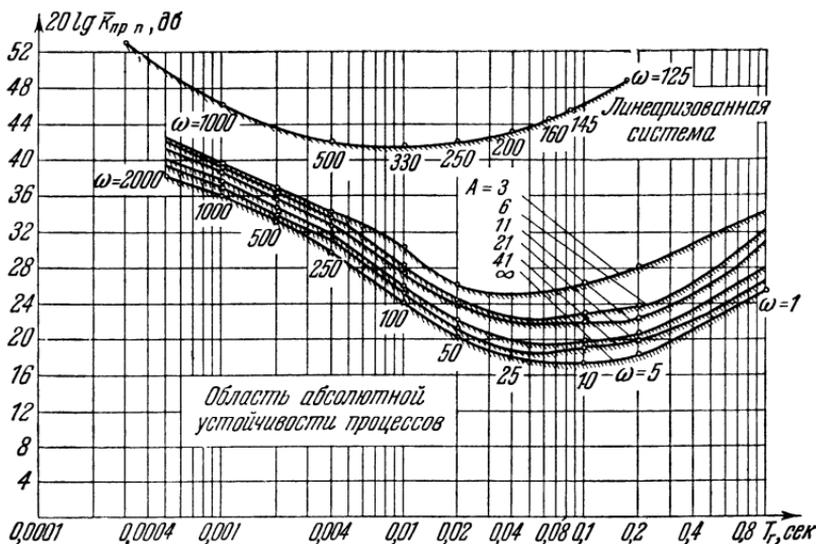


Рис. 3.17.

в) сместить каждую из логарифмических частотных характеристик, построенных в декартовой системе координат, вверх до касания их с граничной кривой, соответствующей $A = \infty$; тогда величина смещения этой характеристики вверх на величину $\Delta \bar{k}$ дБ и будет равна $\bar{k}_{пр}$.

г) зная значения T_r , нетрудно построить искомую зависимость $\bar{k}_{пр} = \bar{k}_{пр}(T_r)$ (рис. 3.17). На этом же графике изображена зависимость $\bar{k}_{пр, л} = \bar{k}_{пр, л}(T_r)$ для линеаризованной системы ($A = 1$).

Совершенно аналогично находятся зависимости $\bar{k}_{пр, л} = \bar{k}_{пр, л}(T_r)$ при $A = 3; 6; 11; 41$ (рис. 3.17). Но в этом

случае вместо граничной кривой при $A = \infty$ надо использовать соответствующую граничную кривую при $A = A_i$.

Синтез последовательного корректирующего устройства, обеспечивающего абсолютную устойчивость процессов. Как следует из приведенного выше анализа, достаточные условия абсолютной устойчивости при $k=100$,

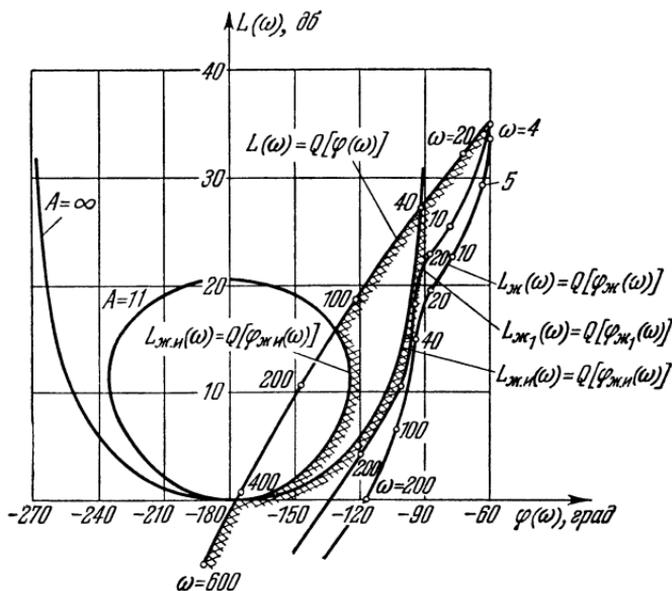


Рис. 3.18.

$r = 0, r = 9,1$ не выполняются, так как логарифмическая частотная характеристика, построенная в декартовой системе координат $L(\omega) = Q[\varphi(\omega)]$ пересекает соответствующие граничные кривые при $A = \infty$ ($r = 0$) и $A = \frac{100}{9,1} \approx 11$ ($r = 9,1$) (рис. 3.18). Поэтому необходимо синтезировать такие корректирующие устройства, при наличии которых эти условия выполняются. Вначале строим логарифмические амплитудно- и фазо-частотные характеристики исходной линейной части системы, а затем соответствующие $A = \infty$ и $A = 11$ идеальные и реальные желаемые амплитудно-частотные характеристики линейной части системы $L_{ж.н}(\omega), L_{ж.п}(\omega)$ (рис. 3.19).

Теперь нетрудно определить логарифмическую амплитудно-частотную характеристику последовательного

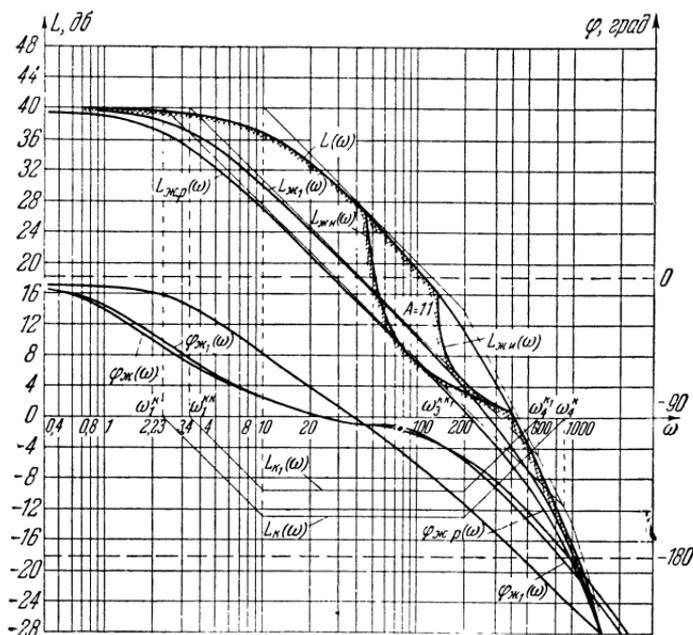


Рис. 3.19.

корректирующего устройства $L_{\text{к}}(\omega)$, которому соответствует передаточная функция

$$K_{\text{к}}(p) = \frac{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_4 p + 1)},$$

где

$$T_1 = \frac{1}{\omega_1}, \quad T_2 = \frac{1}{\omega_2},$$

$$T_3 = \frac{1}{\omega_3}, \quad T_4 = \frac{1}{\omega_4}.$$

При $A = \infty$

$$T_1 = 0,435 \text{ сек}, \quad T_2 = 0,1 \text{ сек},$$

$$T_3 = 0,005 \text{ сек}, \quad T_4 = 0,0016 \text{ сек}.$$

При $A = 11$

$$T_1 = 0,284 \text{ сек}, \quad T_2 = 0,1 \text{ сек}, \\ T_3 = 0,005 \text{ сек}, \quad T_4 = 0,0011 \text{ сек}.$$

Проверим теперь выполнение достаточных условий устойчивости процессов в нелинейной системе при наличии найденного корректирующего устройства с передаточной функцией $K_K(p)$ и параметрами, соответствующими $A = \infty$ и $A = 11$, построив для этого логарифмические частотные характеристики скорректированной линейной части системы в декартовой системе координат (см. рис. 3.18).

Нетрудно видеть, что после введения корректирующего устройства достаточные условия устойчивости процессов при $\bar{k} = 100$ ($A = \infty$ и $A = 11$) выполняются, причем запас по коэффициенту усиления разомкнутой системы при $A = \infty$ равен $\Delta \bar{k} = 3 \text{ дб}$ (при этом $\bar{k} = 141,3$).

2. Позиционная следящая система. Проведем исследование абсолютной устойчивости процессов для позиционной следящей системы.

Для этой системы:

1. Построим нормированную амплитудно-фазовую характеристику линейной части системы $\bar{K}_{л.ч}(j\omega)$, по ней определим $\bar{k} = \bar{k}_{пр}$ для $A = 41$ и найденное значение $\bar{k}_{пр}$ сравним со значением $\bar{k} = \bar{k}_{пр.л}$ для линеаризованной системы.

2. Построим кривую D -разбиения по коэффициенту усиления и, пользуясь этой кривой, определим зависимость $\bar{k}_{пр} = \bar{k}_{пр}(r) = k_{пр}k_{л.ч}$, где $k_{л.ч} = 10$.

3. Построим область устойчивости $\bar{k}_{пр.л} = \bar{k}_{пр.л}(T_r)$ для линеаризованной системы, а также области абсолютной устойчивости процессов в нелинейной системе для $A = 41$; 11.

4. Пользуясь методом логарифмических частотных характеристик, синтезируем последовательное корректирующее устройство, при наличии которого условия абсолютной устойчивости процессов выполняются при $\bar{k}_{пр} = 35 \text{ дб}$ и $A = 41$.

5. Пользуясь методом логарифмических частотных характеристик, синтезируем параллельное корректирующее устройство для $\bar{k}_{пр} = 56,3 \text{ дб}$ и $A = 41$.

Анализ абсолютной устойчивости процессов по амплитудно-фазовой характеристике линейной части системы. В соответствии с формулировкой частотного критерия абсолютной устойчивости процессов, когда $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$

принадлежит полосе (r, k) , амплитудно-фазовая характеристика $kK_{л.ч}(j\omega)$ для всех $\omega \geq 0$ должна находиться правее вертикальной прямой, проходящей через точку $(-1, j0)$. Для выполнения критерия при расположении производной от нелинейной характеристики $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ в полосе (r, k) амплитудно-фазовая характеристика должна находиться вне окружности с индексом $A = \frac{k}{r}$, т. е. для данного случая $A=41$. Если построить нормированную амплитудно-фазовую характеристику линейной части системы (рис. 3.20)

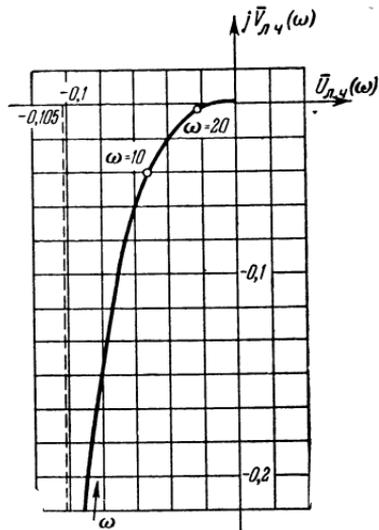


Рис. 3.20.

$$\bar{K}_{л.ч}(j\omega) = \frac{1}{(T_k j\omega + 1)(-T_m \omega^2 + j\omega)},$$

где

$$\bar{K}_{л.ч}(j\omega) = \bar{U}_{л.ч}(\omega) + j\bar{V}_{л.ч}(\omega), \quad T_k = 0,01 \text{ сек}, \\ T_m = 0,069 \text{ сек},$$

и определить максимальное значение $\bar{K}_{пр}$, при котором амплитудно-фазовая характеристика касается A -окружности при $A=41$ (рис. 3.17), то нетрудно получить $k_{пр} = 14,0$. Значение предельного коэффициента усиления для линеаризованной системы $\bar{K}_{пр.л} = 114$ значительно больше значения $\bar{K}_{пр} = 14,0$ при котором выполняется достаточное условие абсолютной устойчивости процессов в нелинейной системе при $A=41$.

Анализ абсолютной устойчивости процессов по кривой D -разбиения по коэффициенту усиления разомкнутой линеаризованной системы. В соответствии с

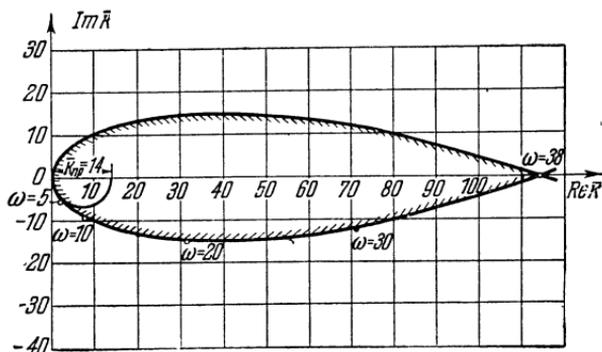


Рис. 3.21.

приведенной выше методикой анализа абсолютной устойчивости процессов в нелинейной системе по кривой D -разбиения по коэффициенту усиления разомкнутой линеаризованной системы:

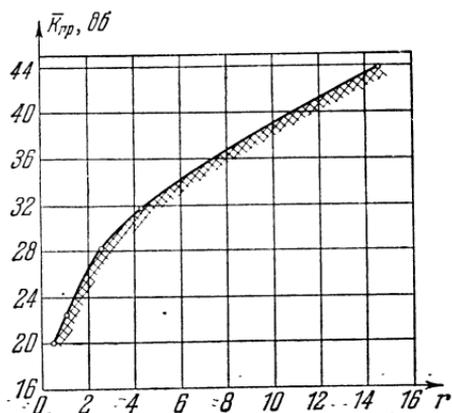


Рис. 3.22.

а) построим кривую D -разбиения по коэффициенту усиления (рис. 3.21)

$$\bar{k} = -(T_k j\omega + 1)(-T_m \omega^2 + j\omega);$$

б) определим диаметр окружности с центром на положительной части действительной оси $\text{Re } \bar{k} = \bar{k}$, проходящей через начало координат и касательной к кривой D -разбиения:

$$2R = \bar{k}_{\text{пр}} = 14.$$

Задаваясь различными $\bar{k}_{\text{пр}i}$, определяем соответствующие значения A_i , а затем из

$$A_i = \frac{\bar{k}_{\text{пр}i}}{r} = \frac{k_{\text{пр}k_{\text{л.ч}}}}{r} = \frac{10k_{\text{пр}}}{r},$$

зная значения $k_{\text{пр}}$ определяем $r = \frac{10k_{\text{пр}}}{A_i}$ и строим искомую кривую $\bar{k}_{\text{пр}} = \bar{k}_{\text{пр}}(r)$ (рис. 3.22).

Построение области абсолютной устойчивости процессов в плоскости параметров $\bar{k}_{\text{пр}}$ и $T_{\text{к}}$. Построив семейство логарифмических частотных характеристик при

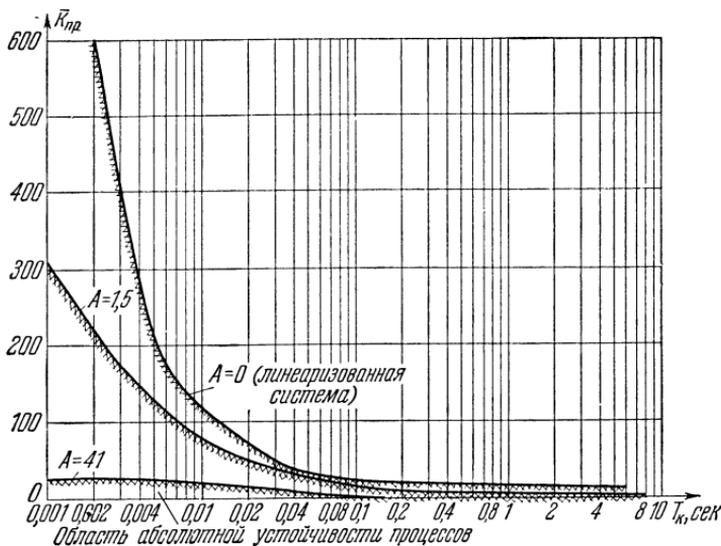


Рис. 3.23.

разных значениях $T_{\text{к}}$, определяем соответствующие значения $\bar{k}_{\text{пр}}$ для различных значений A . После этого нетрудно построить области абсолютной устойчивости в плоскости $\bar{k}_{\text{пр}} = \bar{k}_{\text{пр}}(T_{\text{к}})$, которые приведены на рис. 3.23 и 3.24 для различных значений A и при $A = 0$ (линеаризованная система).

Синтез последовательного корректирующего устройства системы, обеспечивающего абсолютную устойчивость процессов. В связи с тем, что $\bar{k}_{\text{пр.тр}} = 35 \text{ дБ} > \bar{k}_{\text{пр}}$, достаточные условия абсолютной устойчивости процессов

для $A = 41$ не выполняются, так как логарифмическая частотная $L=Q(\varphi)$ характеристика пересекает граничную кривую при $A=41$ (рис. 3.25, кривая 1). Поэтому необходимо синтезировать такое последовательное корректирующее устройство, при наличии которого это условие выполняется.

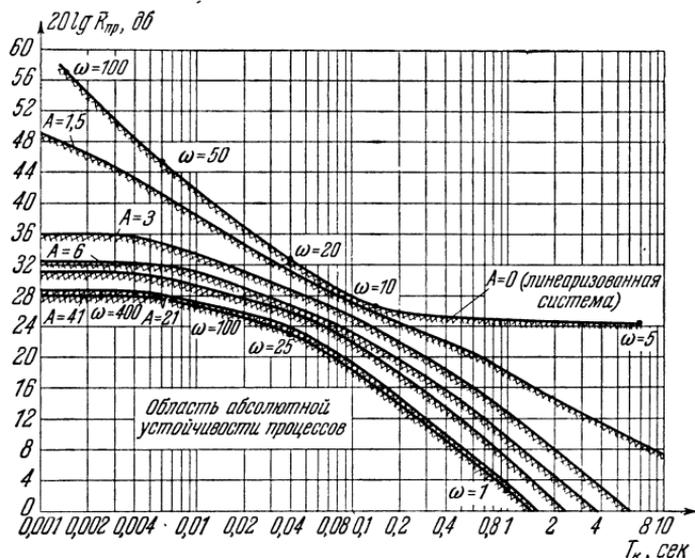


Рис. 3.24.

Логарифмические амплитудно- и фазо-частотная характеристики исходной системы и соответствующая $A=41$ физически реализуемая логарифмическая частотная характеристика скорректированной системы изображены на рис. 3.25. Там же приведены необходимые для определения асимптотической амплитудно-частотной характеристики последовательного корректирующего устройства $L_K(\omega)$ с передаточной функцией

$$K_K(p) = \frac{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_4 p + 1)},$$

$$T_1 = \frac{1}{0,39} = 2,56 \text{ сек}, \quad T_2 = \frac{1}{0,46} = 2,17 \text{ сек},$$

$$T_3 = \frac{1}{56} = 0,018 \text{ сек}, \quad T_4 = \frac{1}{14,6} = 0,069 \text{ сек}.$$

Проверим теперь выполнение достаточных условий устойчивости процессов в нелинейной системе при наличии найденного последовательного корректирующего устройства с передаточной функцией $K_R(p)$, построив для этого логарифмическую частотную характеристику в декартовой системе координат (рис. 3.25, кривая 2).

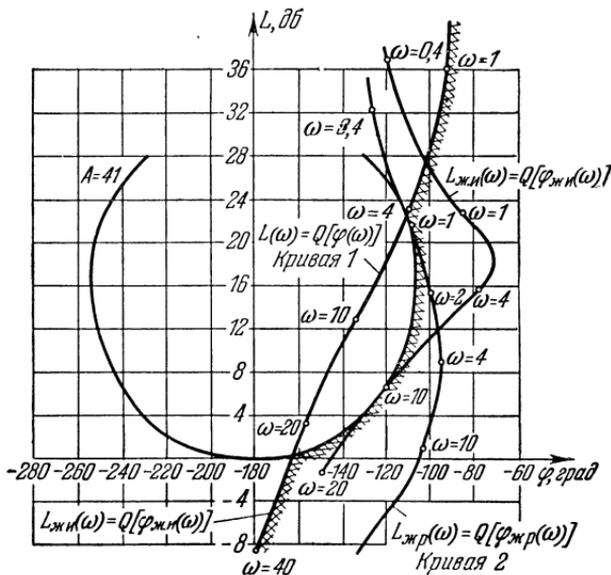


Рис. 3.25.

Нетрудно видеть, что после введения последовательного корректирующего устройства достаточные условия абсолютной устойчивости процессов при $\bar{k} = 35 \text{ дБ}$ и $A = 41$ выполняются.

Синтез параллельного корректирующего устройства, обеспечивающего выполнение условий абсолютной устойчивости процессов при требуемом значении $\bar{k}_{пр}^$ тр.*

После того как определены реальные желаемые логарифмические амплитудно- и фазо-частотные характеристики линейной части системы, можно синтезировать не только последовательное, но также и параллельное корректирующее устройство, используя для этого номограммы, приведенные в гл. I. Не останавливаясь на этом

здесь более подробно, приведем лишь передаточную функцию параллельного устройства, которая обеспечи-

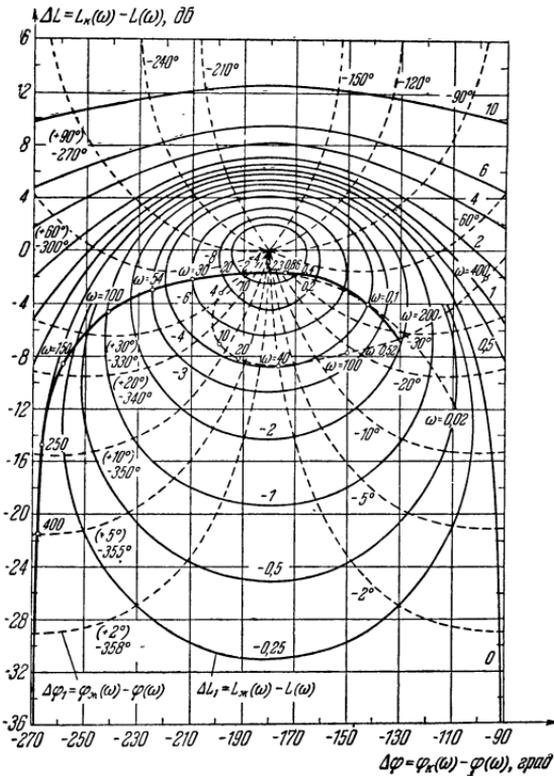


Рис. 3.26.

вает выполнение условий абсолютной устойчивости процессов при $\bar{K}_{др. тр} = 56,3$ и $A = 41$:

$$K_k(p) = \frac{-708}{(13,8p + 1)(0,232p + 1)}.$$

Все необходимые построения приведены на рис. 3.26 и рис. 3.27.

3. Система автоматического регулирования с запаздыванием. Проведем исследования абсолютной устойчивости процессов для системы автоматического регулирования с запаздыванием.

Для этой системы построим зависимость $\bar{k}_{\text{пр}} = \bar{k}_{\text{пр}}(r)$, а также синтезируем последовательное и параллельное

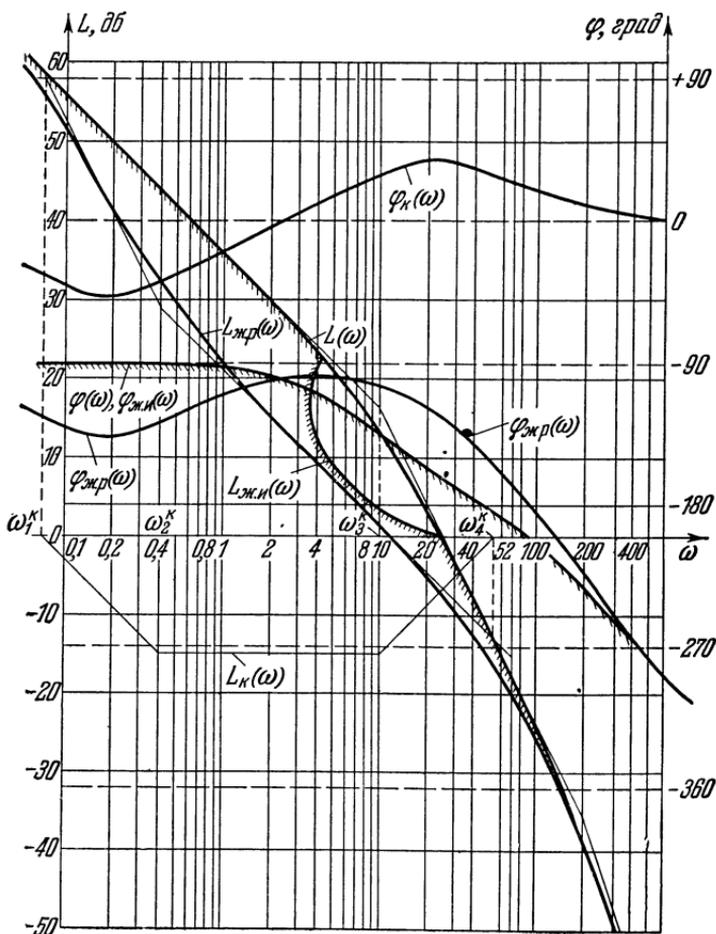


Рис. 3.27.

корректирующие устройства при $\bar{k}_{\text{пр. тр}} = 1$ при $A = 41$, пользуясь изложенным выше методом логарифмических частотных характеристик.

Анализ абсолютной устойчивости процессов в системе с запаздыванием при помощи логарифмических

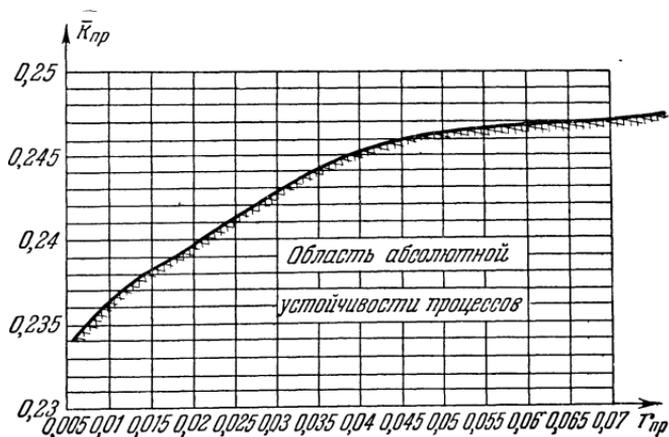


Рис. 3.28.

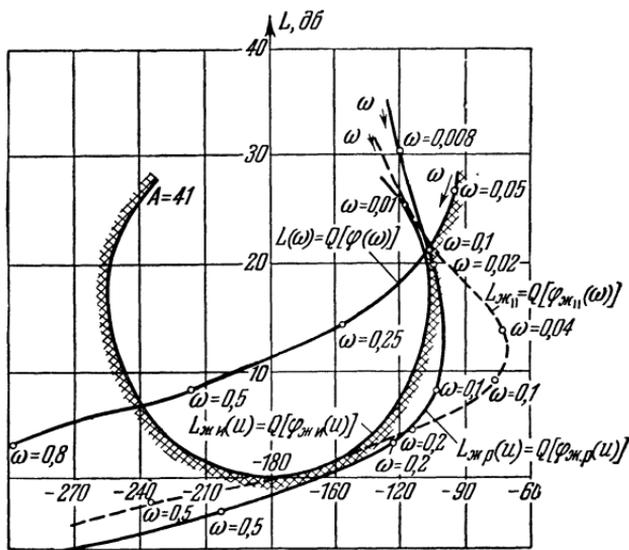


Рис. 3.29.

частотных характеристик. Для построения зависимости $\bar{k}_{\text{пр}} = \bar{k}_{\text{пр}}(r)$ следует поступить точно так же, как это делалось в предыдущих случаях:

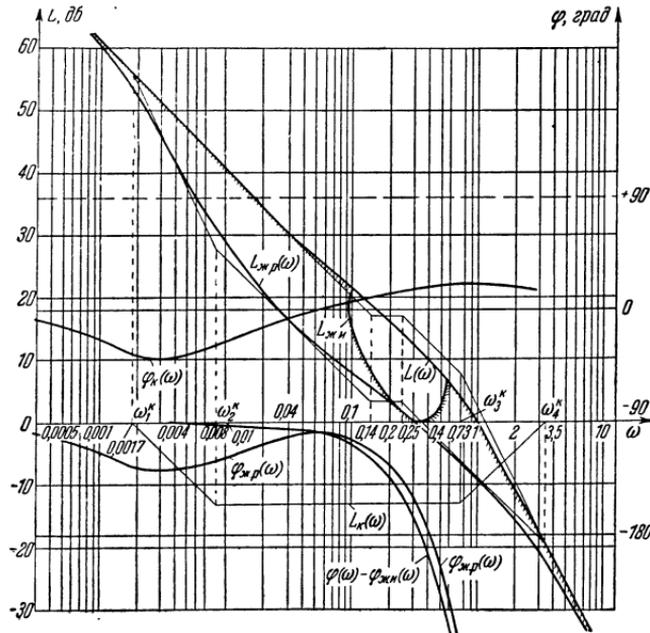


Рис. 3.30.

1. Строим логарифмические амплитудно-частотную $L(\omega)$ и фазо-частотную $\varphi(\omega)$ частотные характеристики, соответствующие линейной части системы

$$K_{\text{л.ч}}(p) = \frac{\bar{k}(1 + bp)e^{-p\tau}}{(a_0 p^2 + a_1 p + 1)p}$$

при $\bar{k} = 1$, перестраиваем их в декартовой системе координат $L(\omega) = Q[\varphi(\omega)]$ и из условия касания граничной кривой, соответствующей $A = 41$, определяем $\bar{k}_{\text{пр} A_i}$, а затем и значения $r_{\text{пр} A_i} = \frac{\bar{k}_{\text{пр} A_i}}{A_i}$.

2. Зная $\bar{k}_{\text{пр} A_i}$ и $r_{\text{пр} A_i}$, нетрудно построить искомую зависимость $\bar{k}_{\text{пр}} = \bar{k}_{\text{пр}}(r_{\text{пр}})$ (рис. 3.28).

Все необходимые построения приведены на рис. 3.30. Зная физически реализуемую логарифмическую частотную характеристику скорректированной линейной части

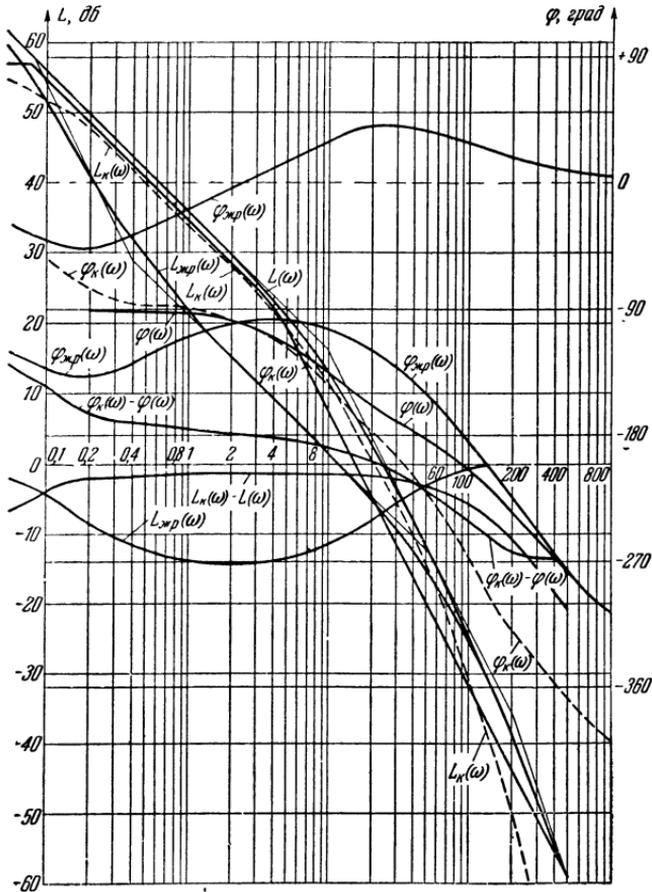


Рис. 3.32.

системы и нанося $L_{ж.п}(\omega) - L(\omega)$ на номограмму (рис. 3.31), определяем асимптотическую логарифмическую амплитудно-частотную характеристику, а затем и передаточную функцию параллельного корректирующего

устройства

$$K_k(p) = \frac{-501,5e^{-4p}}{(624p+1)(p+1)}.$$

Все необходимые в этом случае построения приведены на рис. 3.32.

4. Выделение областей абсолютной устойчивости в системе третьего порядка. Рассмотрим нелинейную систему с передаточной функцией линейной части (Д. Д. Шилияк [1]):

$$K_{л.ч}(p) = \frac{p^2 + s_2 p + s_3}{s_1(p+1)(p+2)(p+3)}$$

и нелинейностью, лежащей в секторе $(0, 1)$. На основе методики, изложенной в четвертом параграфе второй главы, условие абсолютной устойчивости процессов в этой системе принимает следующий вид:

$$\Pi(\omega, s_1, s_2, s_3) \equiv s_1 \omega^6 + (14s_1 - s_2 + 6) \omega^4 + (49s_1 + 11s_2 - 6s_3 - 6) \omega^2 + 36s_1 + 6s_3 > 0 \text{ при } \omega \geq 0. \quad (3.12)$$

Достаточные условия (2.46) выполнения этого неравенства будут:

$$\left. \begin{aligned} 6s_1 + s_3 &> 0, \\ 49s_1 + 11s_2 - 6s_3 - 6 &\geq 0, \\ 14s_1 - s_2 + 6 &\geq 0, \\ s_1 &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Пусть одна из точек, принадлежащих области \bar{S} абсолютной устойчивости процессов в заданной системе, будет $\bar{M}(0,2; 0; 0)$. Тогда объем параллелепипеда, вписанного в эту область со сторонами, перпендикулярными координатным осям s_1, s_2, s_3 , будет равен

$$V = 8(s_1 - 0,2)s_2s_3. \quad (3.14)$$

Максимизируя V с учетом ограничений (3.13), получаем:

$$s_1^0 = 0,178, \quad s_2^0 = -0,123, \quad s_3^0 = 0,226.$$

Следовательно, параллелепипед P , характеризующий область \bar{S} , будет определяться неравенствами:

$$|s_1 - 0,2| < 0,022, |s_2| < 0,123, |s_3| < 0,226.$$

Нетрудно убедиться, что при выполнении этих неравенств условия абсолютной устойчивости процессов (3.13) также выполняются.

Теперь проверим абсолютную устойчивость рассматриваемой системы при значениях параметров $s_1=0,2$, $s_2=s_3=0$ с использованием критерия Рауса.

Условие абсолютной устойчивости процессов (2.32) в этом случае можно выразить так:

$$П(\omega) = 0,2\omega^6 + 8,8\omega^4 + 3,8\omega^2 + 72 \text{ при } \omega \geq 0.$$

Первый столбец в разложении Рауса (2.53) будет

$$-0,2; -1,2; 3; 34,15; -2,14; 101,38; 7,2.$$

Так как в рассматриваемой системе $n=3$ и имеют место три перемены знака, то процессы в системе абсолютно устойчивы.

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ КРИТЕРИЯ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

§ 1. Различные формулировки критерия абсолютной устойчивости положения равновесия (критерия В. М. Попова)

Частотный критерий абсолютной устойчивости положения равновесия В. М. Попова для нелинейных систем автоматического управления с одной однозначной нелинейной характеристикой, принадлежащей к классу А, гласит:

Для абсолютной устойчивости положения равновесия преобразованной системы автоматического управления с одной нелинейной характеристикой $\Phi_{\Pi}(x)$, расположенной внутри сектора, ограниченного лучами kx и $0x$, и устойчивой линейной частью с передаточной функцией $K_{л.ч}^{\Pi}(p)$ достаточно, чтобы существовало такое действительное число q , при котором для всех $\omega > 0$ выполнялось неравенство

$$\operatorname{Re}(1 + jq\omega) K_{л.ч}^{\Pi}(j\omega) + \frac{1}{k} > 0, \quad (4.1)$$

где $K_{л.ч}^{\Pi}(j\omega) = \frac{K_{л.ч}(j\omega)}{1 + rK_{л.ч}(j\omega)}$ — частотная характеристика преобразованной линейной части системы ($r > 0$).

Условию (4.1) можно дать простую геометрическую трактовку, которая оказывается очень удобной при практическом использовании критерия абсолютной устойчивости для нелинейных систем, получаемых в результате эквивалентного преобразования (см. стр. 58—60) (А. Р. Берген, М. А. Шапиро [1]). Введем видоизмененную частотную характеристику $W^*(\omega)$ (называемую далее также кривой Попова), у которой

$$\operatorname{Im} W^*(\omega) = Y(\omega) = \omega V_{л.ч}(\omega), \quad (4.2)$$

$$\operatorname{Re} W^*(\omega) = X(\omega) = U_{л.ч}(\omega), \quad (4.3)$$

где

$$V_{л.ч}(\omega) = \text{Im}[K_{л.ч}(j\omega)], \quad U_{л.ч}(\omega) = \text{Re}[K_{л.ч}(j\omega)]$$

— мнимая и действительная части частотной характеристики линейной части исходной системы $K_{л.ч}(j\omega)$, а также

$$V_{л.ч}^{\text{п}}(\omega) = \text{Im}[K_{л.ч}^{\text{п}}(j\omega)], \quad U_{л.ч}^{\text{п}}(\omega) = \text{Re}[K_{л.ч}^{\text{п}}(j\omega)].$$

— мнимая и действительная части частотной характеристики линейной части преобразованной системы $K_{л.ч}^{\text{п}}(j\omega)$.

С учетом введенных обозначений условие абсолютной устойчивости положения равновесия (4.1) мы можем записать как

$$V_{л.ч}^{\text{п}}(\omega) - \omega q V_{л.ч}^{\text{п}}(\omega) + \frac{1}{k} \geq 0 \quad (4.4)$$

для всех $\omega \geq 0$.

Действительная и мнимая части $U_{л.ч}^{\text{п}}(\omega)$ и $V_{л.ч}^{\text{п}}(\omega)$ связаны с $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ следующими соотношениями:

$$K_{л.ч}^{\text{п}}(j\omega) = U_{л.ч}^{\text{п}}(\omega) + jV_{л.ч}^{\text{п}}(\omega) = \frac{K_{л.ч}(j\omega)}{1 + rK_{л.ч}(j\omega)} \quad (4.5)$$

или

$$\begin{aligned} K_{л.ч}^{\text{п}}(j\omega) &= \frac{U_{л.ч}(\omega) + jV_{л.ч}(\omega)}{1 + rU_{л.ч}(\omega) + jrV_{л.ч}(\omega)} = \\ &= \frac{U_{л.ч}(\omega)(1 + rV_{л.ч}(\omega)) + rV_{л.ч}^2(\omega) + jV_{л.ч}(\omega)}{(1 + rU_{л.ч}(\omega))^2 + (rV_{л.ч}(\omega))^2}, \quad (4.6) \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} U_{л.ч}^{\text{п}}(\omega) &= \frac{U_{л.ч}(\omega)(1 + rV_{л.ч}(\omega)) + rV_{л.ч}^2(\omega)}{(1 + rU_{л.ч}(\omega))^2 + (rV_{л.ч}(\omega))^2}, \\ V_{л.ч}^{\text{п}}(\omega) &= \frac{V_{л.ч}(\omega)}{(1 + rU_{л.ч}(\omega))^2 + (rV_{л.ч}(\omega))^2}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные выражения для $U_{л.ч}^{\text{п}}$ и $V_{л.ч}^{\text{п}}$

в неравенство (4.4), получим

$$\frac{U_{л.ч}(\omega)(1+rU_{л.ч}(\omega))+rV_{л.ч}^2(\omega)}{(1+rU_{л.ч}(\omega))^2+(rV_{л.ч}(\omega))^2} - \frac{\omega q V_{л.ч}}{(1+rU_{л.ч}(\omega))^2+(rV_{л.ч}(\omega))^2} + \frac{1}{k} \geq 0 \quad (4.7)$$

для всех $\omega \geq 0$.

Умножив левую часть последнего неравенства на положительную величину $(1+rU_{л.ч})^2+(rV_{л.ч})^2$, в результате преобразований получим

$$\begin{aligned} & r(r+k)U_{л.ч}^2(\omega) + \\ & + (k+2r)U_{л.ч}(\omega) + \\ & + r(r+k)V_{л.ч}(\omega) - k\omega q V_{л.ч}(\omega) + \\ & + 1 \geq 0 \quad (4.8) \end{aligned}$$

для всех $\omega > 0$.

Используя последнее неравенство и переходя к координатам $X(\omega)$ и $Y(\omega)$, можно показать, что условие (4.7)

означает, что так называемая *видоизмененная характеристика линейной части системы* $W^*(\omega)$ с координатами X и Y должна лежать вне параболы (рис. 4.1):

$$X^2 + \frac{k+2r}{r(r+k)}X - \frac{kq}{r(r+k)}Y + \frac{1}{r(r+k)} = 0. \quad (4.9)$$

Условие абсолютной устойчивости положения равновесия (4.8) может быть записано так:

$$X^2(\omega) + \frac{k+2r}{r(r+k)}X(\omega) - \frac{kq}{r(r+k)}Y(\omega) + \frac{1}{r(r+k)} > 0$$

для всех $\omega \geq 0$.

Теперь критерий абсолютной устойчивости положения равновесия можно сформулировать так:

Для абсолютной устойчивости положения равновесия системы автоматического управления с нелинейной характеристикой $\Phi(x)$, лежащей внутри сектора $(r, r+k)$, и линейной частью системы с частотной характеристикой

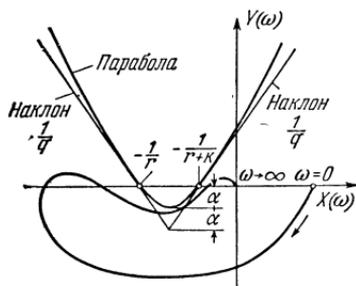


Рис. 4.1.

$K_{л.ч}(j\omega)$ достаточно, чтобы видоизмененная характеристика линейной части системы $W^*(\omega)$ для всех $\omega > 0$ лежала вне параболы (4.9) (рис. 4.1).

При этом линейная часть преобразованной системы с передаточной функцией $K_{л.ч}^n(p) = \frac{K_{л.ч}(p)}{1 + rK_{л.ч}(p)}$ должна быть устойчива.

Нетрудно показать, что при $r \rightarrow 0$ уравнение параболы вырождается на плоскости видоизмененной характеристики в уравнение прямой (ряд авторов называют эту прямую прямой Попова):

$$X - qY + \frac{1}{k} = 0, \quad (4.10)$$

проходящей через точку $(-\frac{1}{k}; 0)$ и имеющей угловой коэффициент $1/q$ (рис. 4.2).

В этом случае условие абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейной системы с устойчивой

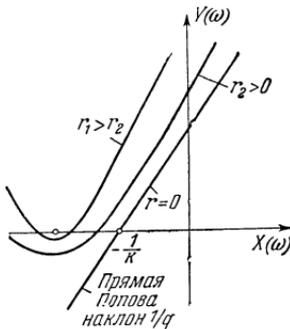


Рис. 4.2.

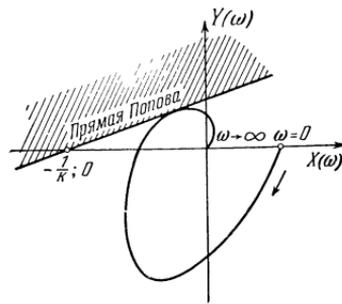


Рис. 4.3.

либо нейтральной линейной частью и имеющей одну нелинейную характеристику $y = \Phi(x)$, принадлежащую классу A , заключается в том, чтобы видоизмененная характеристика линейной части системы находилась при всех $\omega \geq 0$ справа от прямой Попова (рис. 4.3).

Если в (4.9) при $r=0$ левую часть неравенства умножить на $k > 0$ и вместо видоизмененной характеристики $W^*(\omega)$ рассматривать $kW^*(\omega)$, то прямая Попова будет проходить через точку $(-1; 0)$. Для выполнения

достаточного условия абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейной системы видоизмененная характеристика $kW^*(\omega)$ должна находиться правее прямой, проходящей через точку $(-1; 0)$ и имеющей наклон

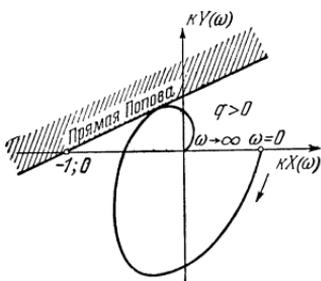


Рис. 4.4.

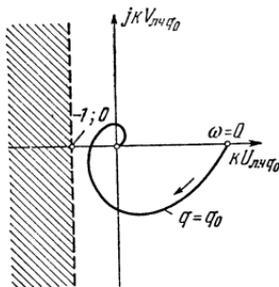


Рис. 4.5.

$1/q$ (рис. 4.4 и 4.5). Из сказанного понятен смысл коэффициента q , который может быть, например, как положительным, так и отрицательным (М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер [11]).

Условие абсолютной устойчивости (4.8) в случае $r=0$ и $k \rightarrow \infty$ принимает вид

$$\operatorname{Re} (1 + jq\omega) K_{л.ч} (j\omega) > 0 \quad (4.11)$$

для всех $\omega > 0$. Этот ответ на постановку задачи, сформулированную А. И. Лурье и В. Н. Постниковым [1].

В связи с тем, что критерий В. М. Попова допускает выбор действительного параметра q , то его следует выбирать таким, чтобы условие устойчивости выполнялось при максимально возможном значении коэффициента k .

Определить это максимальное значение k можно, построив, например, семейство амплитудно-фазовых характеристик:

$$K_{q_0} (j\omega, q_0) = (1 + jq_0\omega) K_{л.ч} (j\omega) \quad (4.12)$$

или

$$kK_{q_0} (j\omega, q_0) = kU_{q_0} (\omega, q_0) + jkV_{q_0} (\omega, q_0) \quad (4.13)$$

при различных значениях $q=q_0$. Если воспользоваться обозначением (4.12), то неравенство (4.11) можно

записать в следующем виде:

$$\operatorname{Re} K_{q_0}(j\omega, q_0) + \frac{1}{k} > 0 \quad (4.14)$$

при $\omega \geq 0$

или

$$\operatorname{Re} kK_{q_0}(j\omega, q_0) + 1 > 0 \quad (4.15)$$

при $\omega \geq 0$.

Теперь можно дать следующую формулировку критерия Попова. Для абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейной системы автоматического управления с одним нелинейным элементом с характеристикой $y = \Phi(x)$, расположенной внутри сектора, ограниченного лучами kx и $0x$, достаточно, чтобы существовало такое действительное число q (положительное либо отрицательное), при котором для всех $\omega \geq 0$ частотная характеристика $kK_{q_0}(j\omega; q_0)$ была расположена правее вертикальной прямой, проходящей через точку $(-1; 0)$ (рис. 4.5).

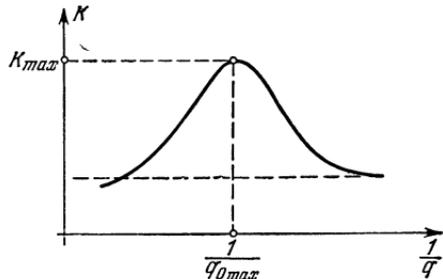


Рис. 4.6.

В тех случаях, когда требуется определить максимальное значение k , при котором выполняется достаточное условие абсолютной устойчивости (4.15), необходимо построить семейство характеристик $kK_{q_0}(j\omega, q_0)$ при различных значениях $q = q_0$.

Тогда каждому значению $q = q_0$ будет соответствовать свое максимальное значение k , определяемое из условия касания характеристики $kK_{q_0}(j\omega, q_0)$ вертикальной прямой, проходящей через точку $(-1; 0)$.

Построив кривую $k = f\left(\frac{1}{q}\right)$ (рис. 4.6), нетрудно определить искомое максимально возможное значение $k = k_{\max}$ и соответствующее ему значение $q = q_{0\max}$.

Заметим, что численное значение $q = q_{0\max}$, соответствующее максимально возможному значению k_{\max} , нас практически не интересует, так как согласно критерию

Попова нам важно лишь знать, что это значение $q = q_{0 \max}$ — действительное.

Для построения семейства характеристик $kK_{q_0}(j\omega, q_0)$ можно построить частотную характеристику линейной части системы и затем каждый из ее векторов для $\omega = \omega_i$ умножить на $\sqrt{1 + q_0^2 \omega_i^2}$ и повернуть против часовой стрелки на угол, равный $\text{arctg } q_0 \omega_i$. Если же обозначить через $q_\omega = q_0 \omega_i$ и заранее построить кривые $\sqrt{1 + q_\omega^2}$ и $\text{arctg } q_\omega$ (либо записать в виде таблицы), то это может несколько упростить нахождение характеристики $kK_{q_0}(j\omega, q_0)$ при различных $q = q_0$.

Следует отметить, что приведенная форма использования критерия В. М. Попова несколько неудобна, ибо она требует построения семейства характеристик $kK_{q_0}(j\omega, q_0)$.

Можно также сформулировать критерий В. М. Попова на языке логарифмических частотных характеристик. Для этого представим выражение для $kK_{q_0}(j\omega, q_0)$ в следующем виде:

$$kK_{q_0}(j\omega, q_0) = |kK_{q_0}(j\omega, q_0)| e^{j\varphi_{q_0}(\omega, q_0)}.$$

Тогда после логарифмирования получим

$$L_{q_0}(\omega, q_0) = 20 \lg |kK_{q_0}(j\omega, q_0)| = \\ = 20 \lg k + 20 \lg |K_{\text{л.ч}}(j\omega)| + 20 \lg \sqrt{1 + q_0^2 \omega^2}, \quad (4.16)$$

$$\varphi_{q_0}(\omega, q_0) = \varphi_{\text{л.ч}}(\omega) + \text{arctg } q_0 \omega, \quad (4.17)$$

где

$$K_{\text{л.ч}}(j\omega) = |K_{\text{л.ч}}(j\omega)| e^{j\varphi_{\text{л.ч}}(\omega)}. \quad (4.18)$$

Как следует из полученных выражений, логарифмическая амплитудно-частотная характеристика L_{q_0} отличается от обычной логарифмической амплитудно-частотной характеристики линейной части системы наличием слагаемого $20 \lg \sqrt{1 + q_0^2 \omega^2}$, а фазовая $\varphi_q(\omega, q_0)$ — наличием слагаемого $\text{arctg } q_0 \omega$.

Нетрудно сформулировать критерий В. М. Попова при использовании логарифмической частотной характеристики в декартовой системе координат L_{q_0}, φ_{q_0} .

Как показано выше, прямая на плоскости $K_{q_0}(j\omega, q_0)$, параллельная мнимой оси и проходящая через точку

(-1; 0), отображается на плоскость L_{q_0}, φ_{q_0} в так называемую *границную кривую* (рис. 4.7), проходящую через точку $\varphi_{q_0} = -\pi, L_{q_0} = 0$, асимптотами которой являются прямые $\varphi_{q_0}(\omega) = -\frac{\pi}{2}$ и $\varphi_{q_0}(\omega) = -\frac{3}{2}\pi$. Теперь критерий В. М. Попова для нелинейных систем автоматического управления с однозначными характеристиками $\Phi(x)$, принадлежащими сектору $(0, k)$, можно сформулировать так:

Для абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейной системы достаточно, чтобы существовало такое число q (положительное либо отрицательное), при котором для всех $\omega \geq 0$ логарифмическая частотная характеристика линейной части системы $L_{q_0}(\omega, q_0)$ и $\varphi_{q_0}(\omega, q_0)$ находилась вне граничной кривой (рис. 4.7).

Для определения максимального значения $k = k_{\max}$ необходимо построить семейство логарифмических амплитудно- и фазо-частотных характеристик $L_{q_0}(\omega, q_0)$ и $\varphi_{q_0}(\omega, q_0)$ при разных значениях $q = q_0$, затем логарифмическую частотную характеристику в декартовой системе координат $L_{q_0} = Q[\varphi_{q_0}]$. По кривой $k = f(1/q)$ нетрудно определить максимальное значение k_{\max} и соответствующее ему значение $q = q_0$.

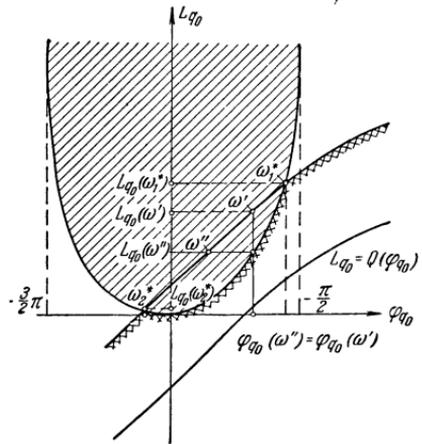


Рис. 4.7.

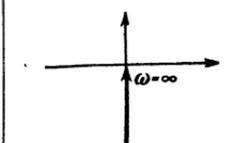
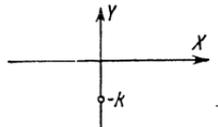
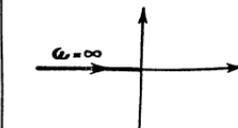
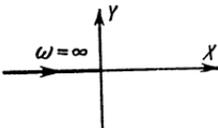
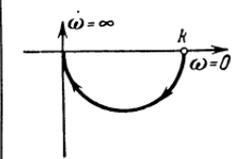
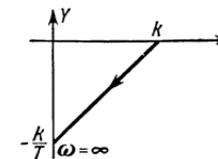
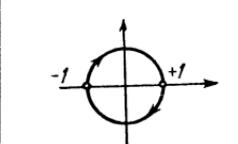
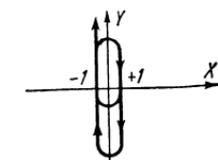
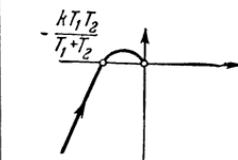
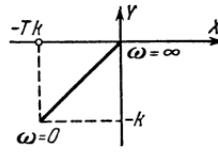
§ 2. Кривые Попова для некоторых типовых линейных частей системы

В ряде случаев для упрощения построения кривых Попова представляет интерес выяснить, какой они имеют вид для некоторых типовых линейных частей системы.

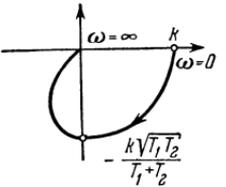
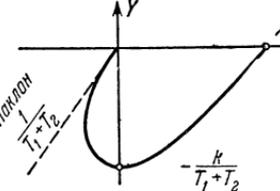
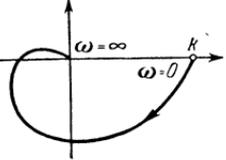
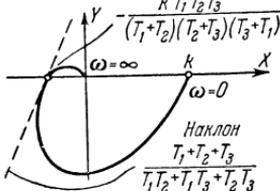
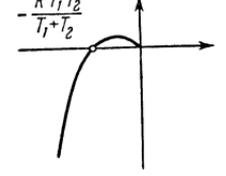
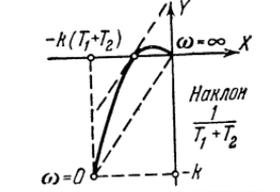
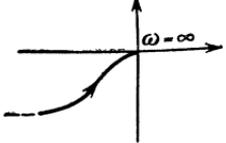
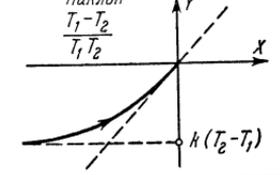
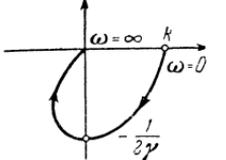
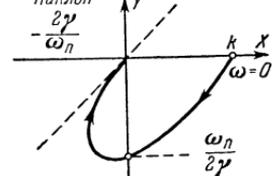
В табл. 2 приведены кривые Найквиста для некоторых типовых линейных частей системы и соответствующие

Таблица 2

Кривые Попова для некоторых типовых линейных частей системы

№	Передачная функция	Вид кривой Найквиста	Вид кривой Попова
1	$\frac{k}{p}$		
2	$\frac{k}{p^2}$		
3	$\frac{k}{Tp + 1}$		
4	$e^{-\tau p}$		
5	$\frac{k}{p(Tp + 1)}$		

Продолжение табл. 2

№	Передаточная функция	Вид кривой Найквиста	Вид кривой Попова
6	$\frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$		
7	$\frac{k}{(T_1 p + 1) \times (T_2 p + 1) \times (T_3 p + 1)}$		
8	$\frac{k}{p(T_1 p + 1) \times (T_2 p + 1)}$		
9	$\frac{k(T_1 p + 1)}{p^2(T_2 p + 1)}$		
10	$\frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\gamma\omega_n p + \omega_n^2}$		

им кривые В. М. Попова (К. Фуйджи, К. Шоджи [1]). Обозначено: $X = \operatorname{Re} K_{\text{л.ч}}(j\omega)$, $Y = \omega \operatorname{Im} K_{\text{л.ч}}(j\omega)$.

Если передаточную функцию линейной части системы представить в виде алгебраической суммы элементарных передаточных функций, то знание кривых Попова для них может упростить построение кривой Попова в более сложном случае.

При этом для нахождения кривой Попова можно воспользоваться графическим способом. Поясним это на примере.

Допустим, что линейная часть системы характеризуется передаточной функцией

$$K_{\text{л.ч}}(p) = \frac{0,1p + 1}{p(p + 1)(0,5p + 1)}.$$

Представим выражение для $K_{\text{л.ч}}(p)$ в виде элементарных передаточных функций:

$$K_{\text{л.ч}}(p) = K_1(p) - K_2(p) + K_3(p), \quad (4.19)$$

где

$$K_1(p) = \frac{1}{p},$$

$$K_2(p) = \frac{1,8}{p + 1},$$

$$K_3(p) = \frac{0,4}{0,5p + 1}.$$

Из (4.2), (4.3) нетрудно получить выражение для кривой Попова:

$$W^*(\omega) = W_1^*(\omega) - W_2^*(\omega) + W_3^*(\omega), \quad (4.20)$$

где $W_1^*(\omega)$, $W_2^*(\omega)$ и $W_3^*(\omega)$ — уравнения кривых Попова, соответствующие элементарным передаточным функциям $K_1(p)$, $K_2(p)$ и $K_3(p)$.

Из (4.20) следует, что кривая Попова, соответствующая линейной части системы $K_{\text{л.ч}}(p)$, представляет собой алгебраическую сумму кривых $W_1^*(\omega)$, $W_2^*(\omega)$ и $W_3^*(\omega)$, вид которых нам известен (см. табл. 2). Строя каждую из элементарных кривых и складывая их, например, геометрически, нетрудно найти и искомую кривую.

§ 3. Анализ абсолютной устойчивости положения равновесия

Под задачей анализа абсолютной устойчивости будем понимать возможность установления факта выполнения критерия В. М. Попова при заданной структуре и параметрах исследуемой нелинейной системы и определение максимального значения $k = k_{\text{пр}}$, при котором эти условия выполняются.

Критерий В. М. Попова позволяет решить задачу анализа абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейных систем автоматического управления с одним нелинейным элементом, характеризуемым непрерывной однозначной нелинейной характеристикой $y = \Phi(x)$.

Использование видоизмененной частотной характеристики $W^*(\omega)$ позволяет в большинстве случаев довольно легко определять максимально возможное (будем далее говорить — предельное) значение коэффициента усиления разомкнутой линеаризованной системы $\bar{k} = \bar{k}_{\text{пр}}$

$$\bar{k}_{\text{пр}} = k k_{\text{л.ч}},$$

где k — угловой коэффициент наклона луча сектора, $k_{\text{л.ч}}$ — коэффициент усиления линейной части системы.

В этом случае для определения $\bar{k} = \bar{k}_{\text{пр}}$ неравенство (4.1) следует заменить равенством и потребовать его выполнения для всех $\omega \geq 0$, т. е.

$$\operatorname{Re} (1 + jq\omega) \bar{k}_{\text{пр}} \bar{K}_{\text{л.ч}}(j\omega) + 1 = 0, \quad (4.21)$$

где $K_{\text{л.ч}}(j\omega) = \bar{k}_{\text{пр}} \bar{K}_{\text{л.ч}}(j\omega)$ — частотная характеристика линеаризованной системы; $\bar{K}_{\text{л.ч}}(j\omega)$ — нормированная частотная характеристика линейной части системы.

Геометрически на языке видоизмененной частотной характеристики это означает, что найдено такое предельное значение $k_{\text{пр}}$, при котором видоизмененная частотная характеристика $W^*(\omega)$ касается прямой Попова и при всех других $\omega \geq 0$, за исключением точки (точек) касания, находится правее этой прямой.

Если видоизмененная частотная характеристика имеет «гладкий характер» (рис. 4.8 и 4.9), то она касается прямой Попова в одной точке a , причем в этом случае прямая Попова является касательной к видоизмененной

частотной характеристике, проходящей через точку с координатами $(-1; 0)$. Поэтому в этих случаях как при $q > 0$ (рис. 4.8), так и при $q < 0$ (рис. 4.9) предельное

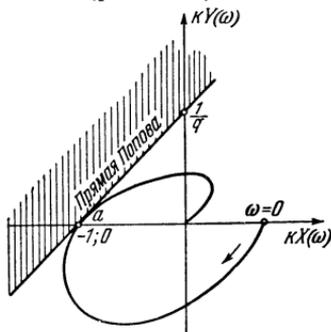


Рис. 4.8.

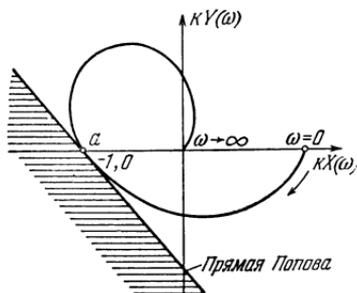


Рис. 4.9.

значение коэффициента усиления разомкнутой линеаризованной системы $\bar{k}_{\text{пр}}$ может быть определено на основе анализа характеристического уравнения замкнутой линеаризованной системы, получаемой в результате замены нелинейного элемента $\Phi(x)$ линейным kx :

$$G_{\text{л}}(p) = \bar{k}_{\text{пр}} \bar{K}_{\text{л.ч}}(p) + 1 = 0. \quad (4.22)$$

Поэтому в таких случаях для исследования абсолютной устойчивости положения равновесия и, в частности, для определения $\bar{k}_{\text{пр}}$ можно воспользоваться любым из критериев устойчивости линейных систем.

Если же видоизмененная частотная характеристика имеет две точки касания с прямой Попова (рис. 4.10), то в этом случае значение $\bar{k}_{\text{пр}}$, определяемое на основе критерия Попова, будет меньше значения $\bar{k}_{\text{пр.л}}$ для линеаризованной системы.

В этом случае нельзя пользоваться линеаризованной системой и необходимо нелинейную систему исследовать при помощи критерия В. М. Попова.

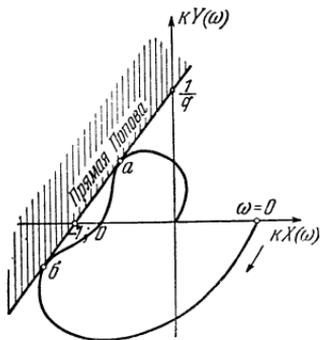


Рис. 4.10.

Для этого надо, задаваясь различными значениями $q = q_0$, определить значения $\bar{k}_{\text{пр}}$, при которых частотные характеристики $kK_{q_0}(j\omega, q_0)$ касаются вертикальной прямой, проходящей через точку $(-1; j0)$, построить кривую $\bar{k}_{\text{пр}} = f(1/q)$ и выбрать максимальное значение $\bar{k}_{\text{пр max}}$. Для нахождения кривой $\bar{k}_{\text{пр}} = f(1/q)$, а затем и $\bar{k}_{\text{пр max}}$ удобно пользоваться логарифмическими частотными характеристиками. Как было показано, значение $\bar{k} = \bar{k}_{\text{пр}}$ определяется из условия касания логарифмической частотной характеристики граничной кривой.

§ 4. Синтез корректирующих устройств, обеспечивающих абсолютную устойчивость положения равновесия

Под синтезом абсолютной устойчивости положения равновесия будем понимать синтез корректирующих устройств, обеспечивающих выполнение критерия абсолютной устойчивости положения равновесия при требуемом значении $\bar{k} = \bar{k}_{\text{тр}}$ и заданных параметрах системы.

Критерий В. М. Попова в исходном виде не позволяет решать задачу синтеза. Наиболее для этого пригоден метод логарифмических частотных характеристик, изложенный в предыдущем разделе. Его можно использовать не только для анализа,

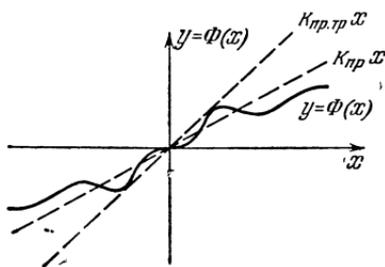


Рис. 4.11.

но также и для синтеза корректирующих устройств, обеспечивающих абсолютную устойчивость положения равновесия при требуемом значении $\bar{k}_{\text{тр}}$ (Б. Н. Наумов [10]).

Допустим, что, используя метод логарифмических частотных характеристик, мы определили максимальное значение $\bar{k} = \bar{k}_{\text{пр max}}$ и знаем соответствующее ему значение $q = q_{0\text{max}}$. Предположим, что найденное значение $\bar{k}_{\text{пр}}$ меньше некоторого требуемого значения $\bar{k}_{\text{тр}}$, т. е. при найденном значении $\bar{k}_{\text{пр}}$ нелинейная характеристика выходит за пределы сектора, определяемого осью абсцисс и прямой kx (рис. 4.11).

Для того чтобы нелинейная характеристика $y = \Phi(x)$ не выходила за пределы сектора, ограниченного осью абсцисс и прямой $y = kx$, необходимо обеспечить выполнение критерия Попова при $\bar{k} = \bar{k}_{пр.тр}$ (рис. 4.11). При $\bar{k}_{пр.тр}$ логарифмическая частотная характеристика, построенная в декартовой системе координат $L_{q_0} = Q[\varphi_{q_0}]$

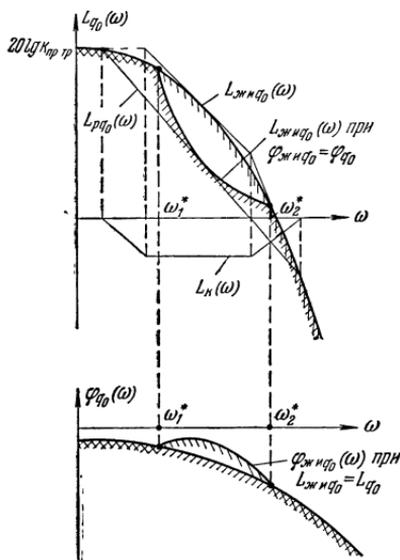


Рис. 4.12.

при $q = q_0$, пересекает граничную кривую в точках ω_1^* и ω_2^* (рис. 4.7), и поэтому требуется синтезировать такое корректирующее устройство, чтобы при данном $q = q_0$ кривая $L_{q_0} = Q[\varphi_{q_0}]$ не пересекала бы граничную кривую. В идеальном случае введенное корректирующее устройство должно так деформировать характеристику $L_{q_0} = Q[\varphi_{q_0}]$, чтобы она совпала с характеристикой, дважды заштрихованной на рис. 4.7. После построения логарифмической характеристики $L_{q_0} = Q[\varphi_{q_0}]$ при $q = q_0$ и $\bar{k} = \bar{k}_{пр.тр}$ методика синтеза, например,

последовательного корректирующего устройства сводится к следующему:

1. Задаваясь значениями L_{q_0} в диапазоне $L_{q_0}(\omega_1^*) \div L_{q_0}(\omega_2^*)$, либо $\varphi_{q_0}(\omega_1^*) \div \varphi_{q_0}(\omega_2^*)$, строим идеальную желаемую логарифмическую фазо-частотную характеристику $\varphi_{ж.и. q_0}(\omega)$ (в этом случае $L_{ж.и. q_0}(\omega) = L_{q_0}(\omega)$), либо идеальную желаемую логарифмическую амплитудно-частотную характеристику $L_{ж.и. q_0}(\omega)$ (в этом случае $\varphi_{ж.и. q_0}(\omega) = \varphi_{q_0}(\omega)$), которые представляют собой отображение заштрихованной кривой на рис. 4.7 на плоскости характеристик $L_{q_0}(\omega)$ и $\varphi_{q_0}(\omega)$ (рис. 4.12). Практически для синтеза удобнее использовать идеальную желаемую

мую логарифмическую характеристику $L_{ж.и q_0}(\omega)$, когда $\Phi_{ж.и q_0}(\omega) = \Phi_{q_0}(\omega)$.

2. Строим физически реализуемую асимптотическую амплитудно-частотную характеристику $L_{p q_0}(\omega)$ (рис. 4.12).

3. Используя соотношение

$$L_k(\omega) = L_{p q_0}(\omega) - L_{q_0}(\omega),$$

строим искомую асимптотическую логарифмическую амплитудно-частотную характеристику последовательного корректирующего устройства (рис. 4.12).

4. Строим физически реализуемую логарифмическую фазо-частотную характеристику системы с найденным корректирующим устройством при $q = q_0$, соответствующую $L_{p q_0}(\omega)$, а затем $L_{p q_0}(\omega) = Q[\Phi_{p q_0}(\omega)]$, и, убеждаемся, что при ранее выбранном $q = q_0$ условие абсолютной устойчивости положения равновесия выполняется.

5. По найденной асимптотической логарифмической амплитудно-частотной характеристике находим соответствующую ей передаточную функцию корректирующего устройства. Таким образом находится последовательное корректирующее устройство, при наличии которого выполняются достаточные условия абсолютной устойчивости положения равновесия исследуемой нелинейной системы при $\bar{k} = \bar{k}_{пр. тр}$ и $q = q_0$.

Найденное значение $\bar{k} = \bar{k}_{пр. тр}$, вообще говоря, может быть меньше максимального.

Если из каких-либо соображений требуется также найти максимальное значение $\bar{k}_{пр max}$ в исследуемой нелинейной системе с корректирующим устройством, то для этого надо, задаваясь несколькими значениями $q = q_0$ вблизи значения $q_{0 max}$, построить кривую $\bar{k} = f(1/q)$, как это было указано выше, и определить максимальное значение $\bar{k}_{пр max}$, которое больше $\bar{k}_{пр. тр}$.

§ 5. Примеры исследования абсолютной устойчивости положения равновесия систем автоматического управления

1. Система автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока. Проведем исследование абсолютной устойчивости положения равновесия системы автоматического регулирования скорости двигателя,

передаточная функция линейной части которой имеет следующий вид:

$$K_{\text{л.ч}}(p) = \frac{k_{\text{л.ч}}}{(T_{\Gamma}p + 1)(T_{\text{м}}T_{\text{я}}p^2 + T_{\text{м}}p + 1)},$$

где

$$T_{\Gamma} = 0,005 \text{ сек}, \quad T_{\text{м}} = 0,1 \text{ сек}, \quad T_{\text{я}} = 0,001 \text{ сек.},$$

а нелинейная характеристика $y = \Phi(x)$ приведена на рис. 4.13.

Для этой системы:

1. Построим нормированную видоизмененную частотную характеристику линейной части системы $\bar{W}^*(\omega)$ и определим максимальное значение $q_{0\text{max}}$, при котором выполняется условие абсолютной устойчивости положения равновесия, и найдем соответствующее значение $\bar{k}_{\text{пр max}}$. Сравним значение $\bar{k}_{\text{пр max}}$ со значением, вычисленным на основе критериев устойчивости для линейных систем.

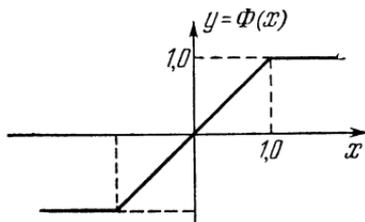


Рис. 4.13.

2. Построим логарифмические амплитудно- и фазочастотные характеристики для линейной части системы при разных значениях $q = q_0$, найдем зависимость $\bar{k}_{\text{пр}} = f(1/q)$ и определим по ней $\bar{k}_{\text{пр max}}$ и соответствующее значение $q_{0\text{max}}$.

3. На основе методики, изложенной выше, синтезируем последовательное корректирующее устройство, при котором условия абсолютной устойчивости положения равновесия выполняются для $\bar{k}_{\text{пр. тр}} = 45 \text{ дб}$, а также найдем максимальное значение $\bar{k}_{\text{пр max}}$ для скорректированной системы и соответствующее ему значение $q_{0\text{max}}$.

Анализ системы с помощью видоизмененной частотной характеристики $\bar{W}^(\omega)$.* В соответствии с формулировкой критерия Попова для построения модифицированной частотной характеристики необходимо определить

$$X(\omega) = \bar{k}\bar{U}(\omega) = U(\omega)$$

и

$$Y(\omega) = \bar{k}\omega\bar{V}(\omega) = \omega V(\omega),$$

где $\bar{U}(\omega)$ и $\bar{V}(\omega)$ — соответственно действительная и мнимая части $\bar{K}_{л.ч}(j\omega)$ нормированной амплитудно-фазовой характеристики линейной части системы. Для рассматриваемого случая:

$$X(\omega) = \frac{[1 - T_M(T_{я} + T_r)\omega^2] \bar{k}}{[1 - (T_M T_{я} + T_r T_M)\omega^2]^2 + T_r^2 T_M^2 T_{я}^2 \omega^6},$$

$$Y(\omega) = \frac{-\bar{k} T_M T_{я} T_r \omega^4}{[1 - T_M(T_{я} + T_r)\omega^2]^2 + T_r^2 T_M^2 T_{я}^2 \omega^6}.$$

Полагая $\bar{k} = 1$ и задаваясь значениями ω от нуля до ∞ , строим нормированную видоизмененную частотную характеристику $\bar{W}^*(\omega)$ (рис. 4.14). Нетрудно теперь построить видоизмененную частотную характеристику при некотором $\bar{k} > 1$ и, в частности, при $\bar{k}_{пр. макс}$, когда $W^*(\omega)$ проходит через точку $(-1; 0)$.

Как следует из рассмотрения видоизмененной частотной характеристики, она имеет довольно вытянутый вдоль оси ординат вид, довольно гладкий, и поэтому точка касания прямой Попова, проходящей через точку $(-1; 0)$ и касательной к кривой $W^*(\omega)$, лежит на отрицательной части действительной оси. Поэтому значение $\bar{k}_{пр макс} = 125$ при $q_{0 макс} \approx 0,005$ совпадает со значением $\bar{k}_{пр. л}$, определяемого с помощью критерия Гурвитца для исследуемой линеаризованной системы

$$\bar{k}_{пр. л} = \frac{(T_r + T_M)(T_{я} + T_r)}{T_{я} T_r} - 1 = 125.$$

Анализ абсолютной устойчивости положения равновесия системы с помощью логарифмических частотных характеристик линейной части системы. Для анализа

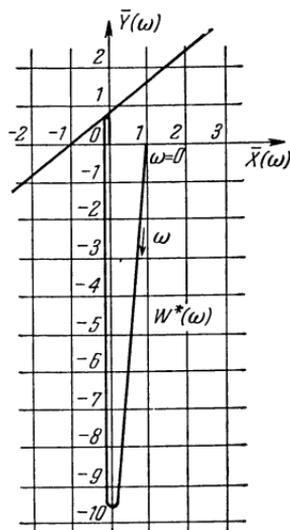


Рис. 4.14.

абсолютной устойчивости положения равновесия системы строим логарифмические амплитудно-частотные $L(\omega)$ и фазо-частотные $\varphi(\omega)$ характеристики, соответствующие линейной части системы при $\bar{k} = 1$, а затем в силу монотонности этих характеристик задаемся только различными положительными значениями $q_{01} = 0,1$; $q_{02} = 0,02$;

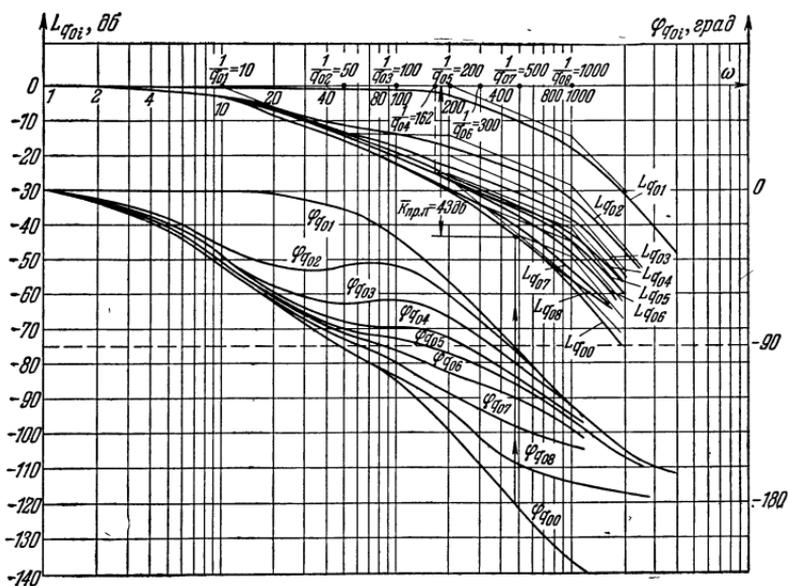


Рис. 4.15.

$q_{03} = 0,01$; $q_{04} = 1/162$; $q_{05} = 0,005$; $q_{06} = 1/300$; $q_{07} = 0,002$; $q_{08} = 0,001$ и соответственно находим $L_{q_{0i}}$ и $\varphi_{q_{0i}}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, 8$) (рис. 4.15)*).

Перестраивая затем найденные при $\bar{k} = 1$ $L_{q_{0i}}$ и $\varphi_{q_{0i}}$ в декартовой системе координат и смещая кривые (рис. 4.16) $L_{q_{0i}} = Q[\varphi_{q_{0i}}]$ до касания их с граничной кривой на величину $\Delta \bar{k}$ дБ, определяем соответствующие значения $\bar{k}_{кр}$ и строим кривую $\bar{k}_{кр} = f(1/q)$ (рис. 4.17, кривая 1).

*) На рис. 4.15 и далее индекс q_{00} соответствует значению $q = 0$.

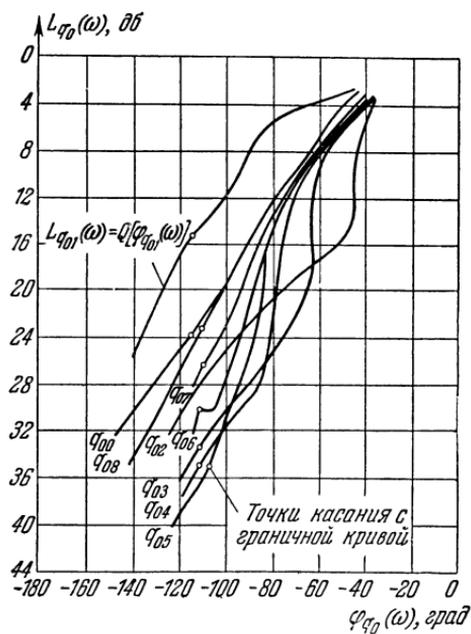


Рис. 4.16.

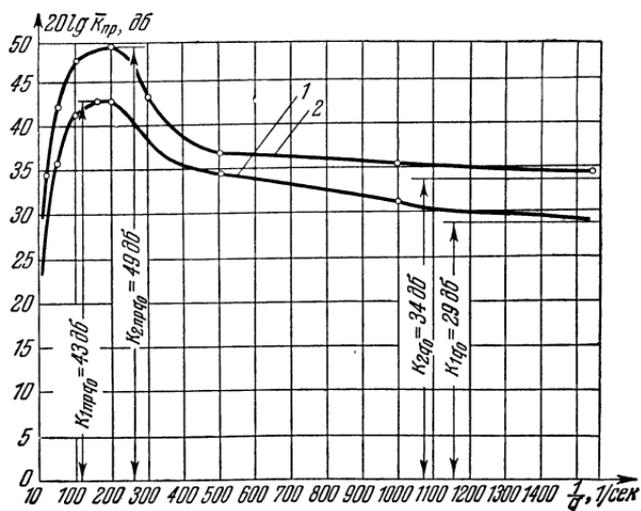


Рис. 4.17.

Из полученной кривой 1 нетрудно определить максимальное значение $\bar{k}_{\text{пр max}} = 43 \text{ дб}$, совпадающее в данном случае с предельным значением коэффициента усиления рассматриваемой линеаризованной системы.

Синтез последовательного корректирующего устройства, обеспечивающего абсолютную устойчивость положения равновесия системы при $\bar{k}_{\text{пр. тр}}$ при помощи логарифмических частотных характеристик.

Из только что проведенного анализа абсолютной устойчивости положения равновесия системы следует, что при $\bar{k}_{\text{пр. тр}} = 45 \text{ дб}$ достаточные условия абсолютной устойчивости положения равновесия не выполняются, так как логарифмическая частотная характеристика $L_{q_{oi}} = Q[\varphi_{q_{oi}}]$ при $\bar{k}_{\text{пр. тр.}} = 45 \text{ дб}$ (рис. 4.18, кривая 1) пересекается с граничной кривой в точках, соответствующих $\omega_1 = 130$ и $\omega_2 = 950$. Синтезируем та-

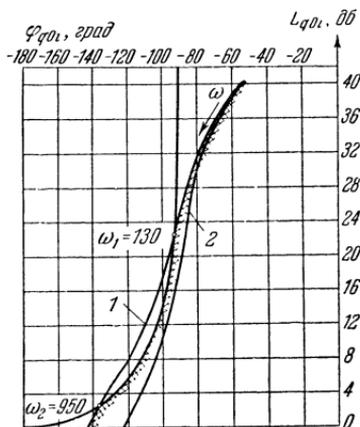


Рис. 4.18.

кое последовательное корректирующее устройство, при наличии которого эти условия будут выполняться.

Желаемая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика $L_{q_{oi}} = Q[\varphi_{q_{oi}}]$, построенная при $q_{0 \text{ max}} \approx \approx 0,005$, отмечена на рис. 4.18 двойной штриховкой.

Построив сначала идеальную, а затем и физически реализуемую логарифмическую амплитудно-частотную характеристику скорректированной линейной части системы при $q_{0 \text{ max}} = 0,005$ (рис. 4.19), нетрудно получить асимптотическую логарифмическую амплитудно-частотную характеристику последовательного корректирующего устройства $L_{\text{к}}(\omega)$, которая также изображена на рис. 4.19.

Передаточная функция последовательного корректирующего устройства в данном случае имеет следующий вид:

$$K_{\text{к}}(p) = \frac{(T_{1\text{к}}p + 1)(T_{2\text{к}}p + 1)}{(T_{3\text{к}}p + 1)(T_{4\text{к}}p + 1)},$$

где

$$T_{1к} = \frac{1}{\omega_1^*} = 0,1 \text{ сек}, \quad T_{2к} = \frac{1}{\omega_2^*} = 10^{-3} \text{ сек},$$

$$T_{3к} = \frac{1}{\omega_3^*} = \frac{1}{6,2} \text{ сек}, \quad T_{4к} = \frac{1}{\omega_4^*} = \frac{1}{1550} \text{ сек}.$$

Логарифмическая частотная характеристика $L_{q_{oi}} = Q[\varphi_{q_{oi}}]$ системы с последовательным корректирующим устройством изображена на рис. 4.18 (кривая 2). Как

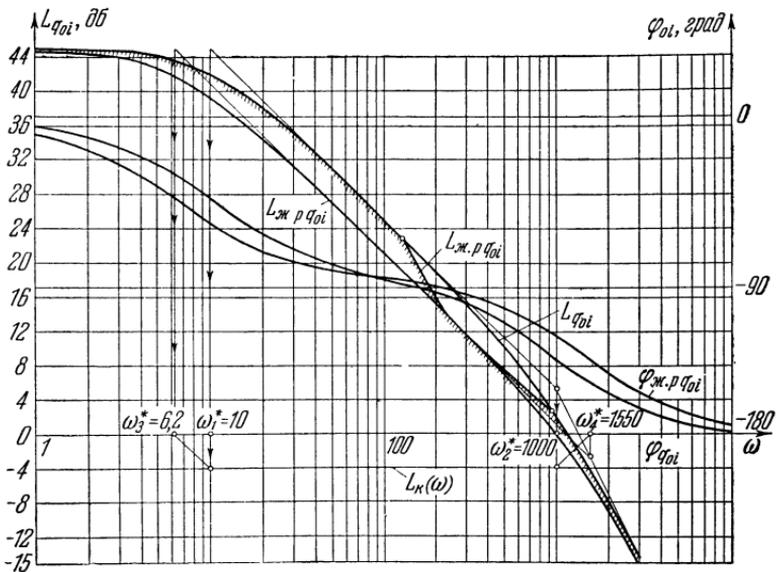


Рис. 4.19.

видно, она не пересекается с граничной кривой, и поэтому достаточные условия абсолютной устойчивости положения равновесия при $\bar{k}_{пр.тр} = 45$ дБ выполняются.

Для определения максимального значения $\bar{k}_{пр.тр}$ в системе с корректирующим устройством строим логарифмические амплитудно- и фазо-частотные характеристики при $\bar{k} = 1$ и разных положительных значениях $q = q_{oi}$, затем кривые $L_{q_{oi}} = Q[\varphi_{q_{oi}}]$, находим искомую кривую $\bar{k}_{пр} = f(1/q)$ и определяем максимальное

значение $\bar{k}_{\text{пр max}} \approx 49 \text{ дб}$ при $q_{0i} = 0,005$ (см. рис. 4.17, кривая 2).

2. Позиционная следящая система. В качестве второго примера проведем исследование абсолютной устойчивости положения равновесия в позиционной следящей системе, передаточная функция линейной части которой имеет следующий вид:

$$K_{\text{л.ч}}(p) = \frac{k_{\text{л.ч}}}{(T_k p + 1)(T_m p^2 + p)},$$

где

$$T_k = 0,01 \text{ сек}, T_m = 0,069 \text{ сек}.$$

Для этой системы:

1. Построим нормированную видоизмененную частотную характеристику линейной части системы $W^*(\omega)$ и определим максимальное значение $\bar{k}_{\text{пр max}}$, при котором выполняется условие абсолютной устойчивости положения равновесия, найдем соответствующее значение $q_{0 \text{ max}}$ и сравним значение $\bar{k}_{\text{пр max}}$ со значением, вычисленным на основе критериев устойчивости для линейных систем.

2. При помощи изложенного выше метода логарифмических частотных характеристик найдем зависимость $\bar{k}_{\text{пр}} = f(1/q)$ при $A = \text{const} = 41$, определим по ней и $\bar{k}_{\text{пр max}}$ и соответствующее значение $q_{0 \text{ max}}$.

3. При помощи метода логарифмических частотных характеристик синтезируем последовательное корректирующее устройство, при котором условия устойчивости положения равновесия выполняются для $\bar{k}_{\text{пр. тр}} = 50 \text{ дб}$ и $A = 41,0$.

Анализ абсолютной устойчивости положения равновесия при помощи видоизмененной частотной характеристики $W^(\omega)$.* В соответствии с формулировкой частотного критерия В. М. Попова для построения видоизмененной частотной характеристики $W^*(\omega)$ необходимо определить

$$X(\omega) = \bar{k} \bar{U}(\omega),$$

и

$$Y(\omega) = \bar{k} \omega \bar{V}(\omega),$$

которые в данном случае имеют следующий вид:

$$X(\omega) = \frac{\bar{k}(T_M + T_K)\omega^2}{(T_M + T_K)^2\omega^4 + \omega^2(1 - T_M T_K \omega^2)^2},$$

$$Y(\omega) = \frac{-\bar{k}\omega(1 - T_M T_K \omega^2)}{(T_M + T_K)^2\omega^4 + \omega^2(1 - T_M T_K \omega^2)^2}.$$

Полагая в выражениях для $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ $\bar{k} = 1$, получим соответствующие выражения $\bar{X}(\omega)$ и $\bar{Y}(\omega)$ для нормированной видоизменной частотной характеристики $\bar{W}^*(\omega)$. Задавая значениями ω от нуля до ∞ , строим нормированную видоизмененную частотную характеристику $\bar{W}^*(\omega)$ (рис. 4.20, а).

В данном случае нормированная модифицированная частотная характеристика имеет довольно гладкий характер и поэтому прямая Попова имеет с модифицированной частотной характеристикой, проходящей через точку $(-1; 0)$, одну точку касания, а потому предельные значения $\bar{k}_{\text{пр}}$, полученные на основе критериев Попова и Гурвица, совпадают:

$$\bar{k}_{\text{пр max}} = \bar{k}_{\text{пр.л}} = \frac{1}{T_M} + \frac{1}{T_K} = 114,5.$$

При этом $q_{0 \text{ max}} = \frac{1}{14,6}$.

Анализ абсолютной устойчивости положения равновесия системы при помощи логарифмических частотных характеристик. Для анализа абсолютной устойчивости положения равновесия системы строим логарифмические амплитудно- и фазо-частотные характеристики линейной части системы (рис. 4.20, б) при $\bar{k} = 1$

$$L(\omega) = -20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{T_M^2 \omega^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{T_K^2 \omega^2 + 1},$$

$$\varphi(\omega) = \text{arctg } T_M \omega - \text{arctg } T_K \omega - \frac{\pi}{2}.$$

Затем, задавая различными значениями $q_0 = q_{0i}$ ($q_{01} = 2,0$; $q_{02} = 1,0$; $q_{03} = 0,5$; $q_{04} = 0,2$; $q_{05} = 0,1$; $q_{06} = 0,069$; $q_{07} = 0,05$; $q_{08} = 0,033$; $q_{09} = 0,02$; $q_{010} = 0,01$) соответственно находим $L_{q_{0i}}$ и $\varphi_{q_{0i}}$ (рис. 4.20, б). Перебирая найденные $L_{q_{0i}}$ и $\varphi_{q_{0i}}$ в декартовой системе координат (рис. 4.21) и смещая граничную кривую вниз

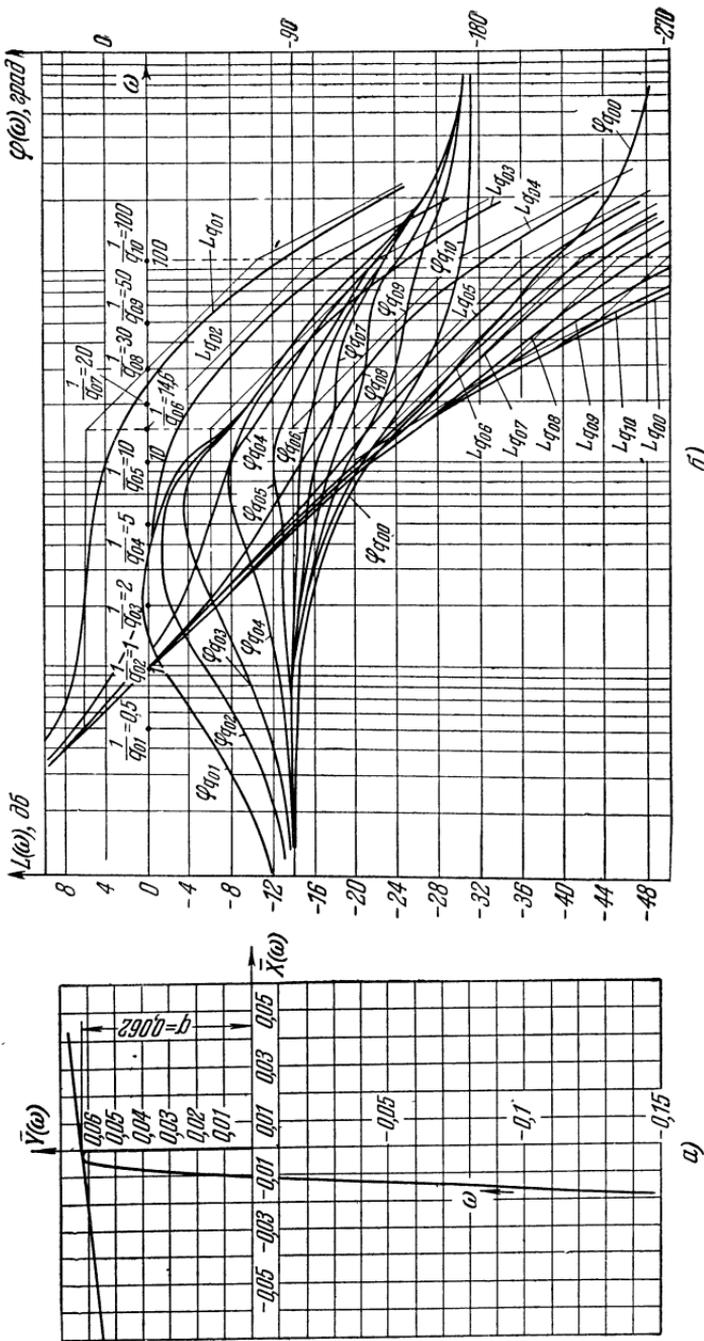


Рис. 4.20.

либо смещая найденные кривые до их касания с граничной кривой, соответствующей $A=41$, на величину $\Delta \bar{k} \text{ дб}$, определяем соответствующие значения $\bar{k}_{\text{пр}}$ и строим кривую $\bar{k}_{\text{пр}} = f(1/q)$ (рис. 4.22, кривая 1). Из полученной кривой нетрудно определить максимальное значение

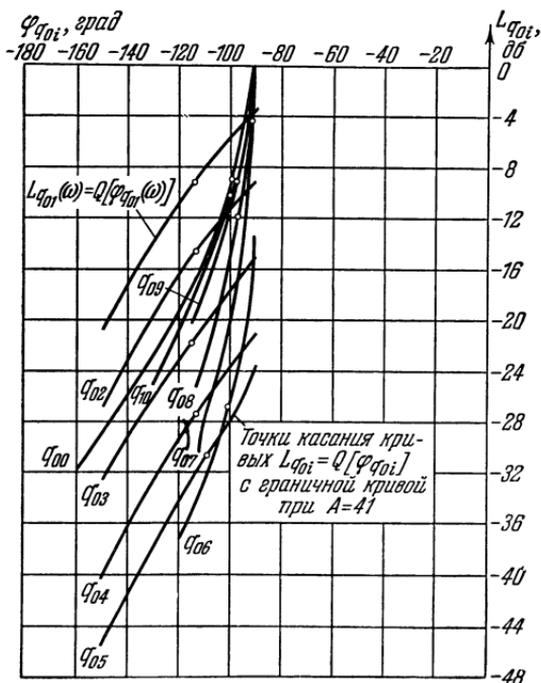


Рис. 4.21.

$\bar{k}_{\text{пр max}} = 114,5$ (41 дб), совпадающее в данном случае с предельным значением $\bar{k}_{\text{пр. л}}$ коэффициента усиления разомкнутой линеаризованной системы.

Синтез корректирующего устройства системы с помощью логарифмических частотных характеристик. Из только что проведенного анализа системы следует, что при $\bar{k}_{\text{пр. тр}} = 50$ дб достаточные условия абсолютной устойчивости положения равновесия не выполняются, так как логарифмическая частотная характеристика $L_{q_0 \text{ max}} = Q[\varphi_{q_0 \text{ max}}]$ при $\bar{k}_{\text{пр. тр}} = 50$ дб (рис. 4.23, кривая 1)

пересекается с граничной кривой при $A = 41$ в точках ω_1 и ω_2 .

Синтезируем последовательное корректирующее устройство, при наличии которого эти условия будут выполняться.

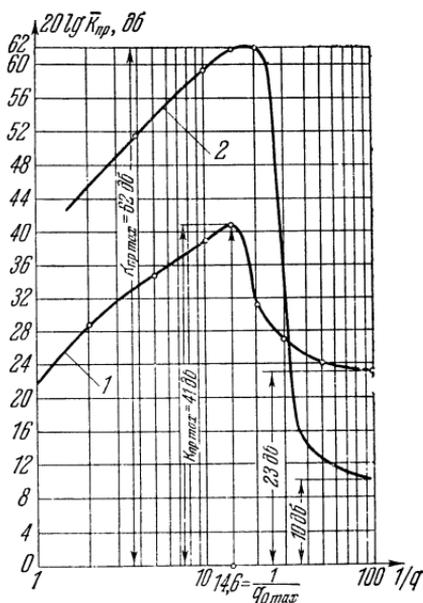


Рис. 4.22.

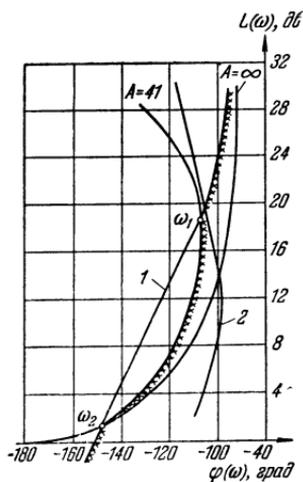


Рис. 4.23.

Идеальная желаемая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика при $q_{0 \max} = 14,6$ отмечена на рис. 4.23 двойной штриховкой. Дальнейшие построения соответствуют данному значению $q_{0 \max}$ и для простоты индекс $q_{0 \max}$ опускается.

Нетрудно получить асимптотическую логарифмическую амплитудно-частотную характеристику последовательного корректирующего устройства $L_K(\omega)$, которая изображена на рис. 4.24. Передаточная функция последовательного корректирующего устройства имеет следующий вид:

$$K_K(p) = \frac{(T_{2K}p + 1)(T_{3K}p + 1)}{(T_{1K}p + 1)(T_{4K}p + 1)},$$

где

$$T_{1к} = \frac{1}{\omega_1^*} = \frac{1}{1,8} = 0,556 \text{ сек}, \quad T_{2к} = \frac{1}{\omega_2^*} = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ сек},$$

$$T_{3к} = \frac{1}{\omega_3^*} = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ сек}, \quad T_{4к} = \frac{1}{\omega_4^*} = \frac{1}{260} = 0,0038 \text{ сек}.$$

Логарифмическая частотная характеристика $L_{q_0 \max} = Q[\varphi_{q_0 \max}]$ системы с корректирующим устройством изображена на рис. 4.23, кривая 2. Как видно, она не пересекается с граничной кривой, соответствующей $A = 41$,

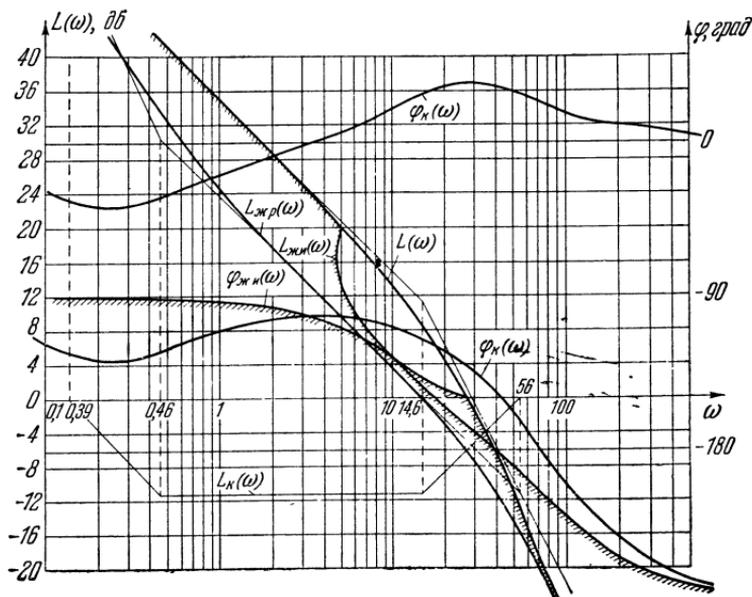


Рис. 4.24.

и поэтому достаточные условия абсолютной устойчивости положения равновесия при $\bar{K}_{пр. тр} = 50 \text{ дБ}$ выполняются.

3. Система автоматического управления с запаздыванием. Проведем исследование абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейной системы автоматического управления с запаздыванием, линейная часть которой характеризуется передаточной функцией

$$K_{л. ч}(p) = \frac{k(1 + \rho p)e^{-p\tau}}{(a_0 p^2 + a_1 p + 1)p},$$

где

$$a_0 = 6; a_1 = 5,5; \rho = 7,$$

а нелинейная характеристика имеет вид кривой насыщения.

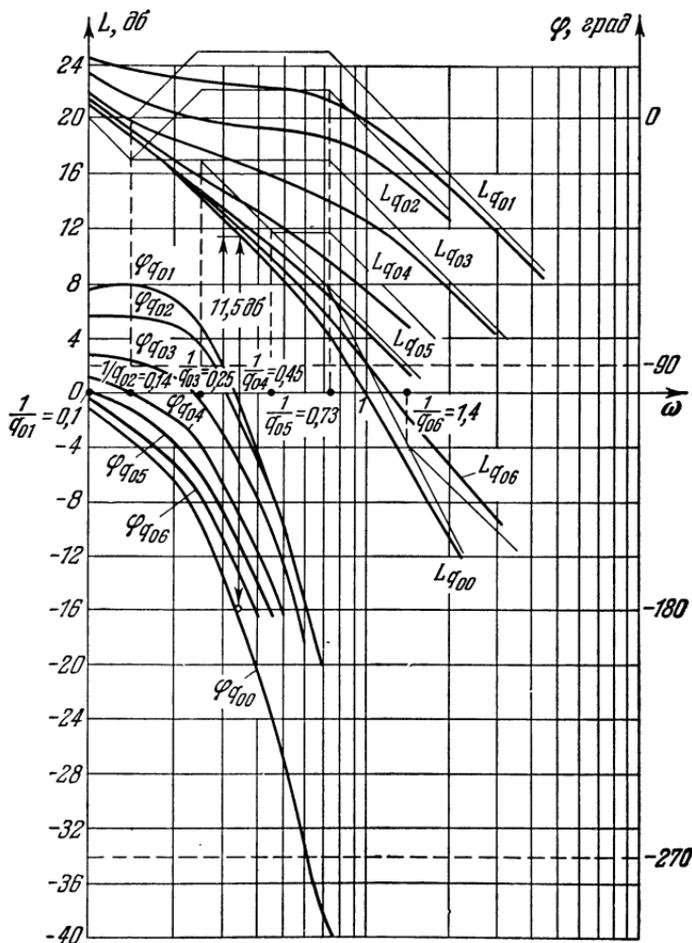


Рис. 4.25.

Для этой системы, построив логарифмические частотные характеристики, определим предельное значение $\bar{k}_{пр.л}$ для линеаризованной системы, а затем $\bar{k}_{пр.мах}$, оп-

ределяющее абсолютную устойчивость положения равновесия рассматриваемой нелинейной системы с запаздыванием при $A = 41$, и сравним найденные значения $\bar{k}_{\text{пр. л}}$ и $\bar{k}_{\text{пр. нл}}$.

Анализ абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейной системы с запаздыванием при помощи логарифмических частотных характеристик. На рис. 4.25 изображены логарифмические частотные характеристики, соответствующие линейной части исследуемой нелинейной системы с запаздыванием при различных значениях $q_0 = q_{0i}$;

$$\begin{aligned} q_{00} &= 0; \quad q_{01} = 0,1; \quad q_{02} = 0,14; \\ q_{03} &= 0,25; \quad q_{04} = 0,45; \\ q_{05} &= 0,73; \quad q_{06} = 1,4. \end{aligned}$$

Значение $\bar{k}_{\text{пр. л}}$ для линейной системы равно 11,5 дБ или $\bar{k}_{\text{пр. л}} = 0,266$ (рис. 4.25).

Построив семейство кривых $L_{q_{0i}} = Q[\varphi_{q_{0i}}]$ при $i = 0, 1, \dots, 6$ (рис. 4.26), нетрудно найти кривую $\bar{k}_{\text{пр}} = f(1/q)$ (рис. 4.27), пользуясь которой определяем $\bar{k}_{\text{пр. нл}}$, при котором выполняются условия абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейной системы. Это значение $\bar{k}_{\text{пр. нл}}$ в данном случае совпадает с $\bar{k}_{\text{пр. л}}$, т. е.

$$\bar{k}_{\text{пр. нл}} = \bar{k}_{\text{пр. л}} = 11,5 \text{ дБ.}$$

4. Система автоматического управления В. А. Плисса. В рассмотренных выше примерах исследования абсолютной устойчивости положения равновесия предельные значения коэффициентов $k_{\text{пр}}$ системы совпадали со значениями, определяемыми из рассмотрения линеаризованных моделей, т. е. «ляпуново» и «гурвитцево» значения коэффициентов совпадали:

$$k_{\text{ляп}} = k_{\text{гур}}.$$

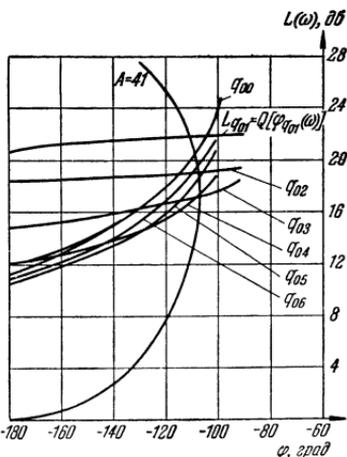


Рис. 4.26.

Проведем исследование абсолютной устойчивости положения равновесия в нелинейной системе, впервые рассмотренной В. А. Плиссом [2], а затем М. А. Айзерманом, Ф. Р. Гантмахером [11], где $k_{\text{лнч}} \neq k_{\text{гур}}$.

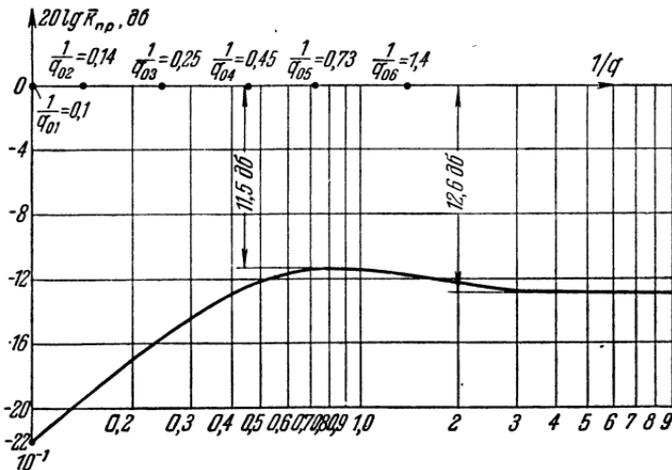


Рис. 4.27.

Линейная часть исследуемой системы характеризуется следующей передаточной функцией:

$$K_{\text{л.ч}}(p) = \frac{k(p^2 - 0,5)}{(p^2 + 1)(p + 1)}.$$

Нетрудно показать, что линеаризованная система, имеющая характеристическое уравнение

$$G(p) = p^3 + (1 + k)p^2 + p + (1 - 0,5k) = 0,$$

устойчива при изменении k от нуля до двух.

Исследуем абсолютную устойчивость положения равновесия данной системы при помощи критерия Попова.

Анализ системы при помощи кривой Попова. Для анализа данной системы при помощи критерия Попова построим видоизмененную частотную характеристику. Для этого найдем выражения для $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ видоизмененной частотной характеристики $W^*(\omega)$:

$$X(\omega) = \operatorname{Re} K_{\text{л.ч}}(j\omega) = \frac{\omega^2 + 0,5}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 - 1)},$$

$$Y(\omega) = \omega \operatorname{Im} K_{\text{л.ч}}(j\omega) = -\frac{\omega^2(\omega^2 + 0,5)}{(\omega^2 - 1)(\omega^2 + 1)}.$$

Если составить выражение

$$X(\omega) - qY(\omega) = \frac{1 + q\omega^2}{\omega^2 - 1} \frac{\omega^2 + 0,5}{\omega^2 + 1},$$

являющееся частью достаточного условия абсолютной устойчивости положения равновесия Попова

$$X(\omega) - qY(\omega) + \frac{1}{k} > 0,$$

то из последнего выражения следует, что выполнение условия Попова возможно лишь, когда оно принимает при

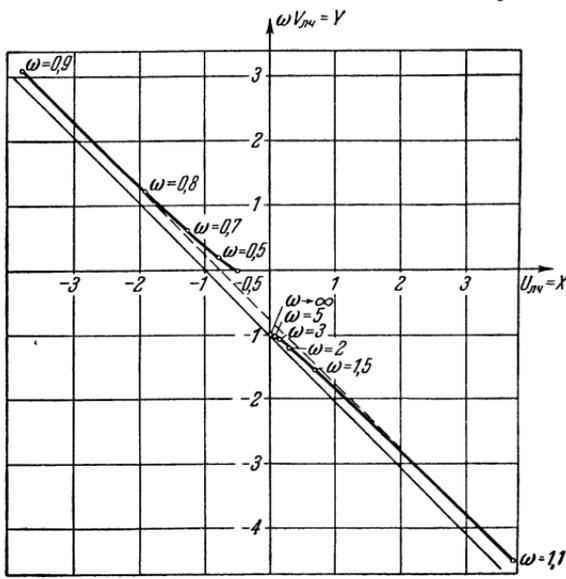


Рис. 4.28.

$\omega > 0$ только положительные значения. Это будет иметь место при $q = -1$.

После подстановки $q = -1$ выражение $X(\omega) - qY(\omega)$ принимает вид

$$X(\omega) - qY(\omega) = -1 + \frac{0,5}{\omega^2 + 1}.$$

Соответственно условие абсолютной устойчивости положения равновесия будет иметь следующий вид:

$$-1 + \frac{0,5}{\omega^2 + 1} + \frac{1}{k} > 0,$$

Так как второе слагаемое в левой части последнего неравенства всегда положительно, то граничное значение углового коэффициента k луча сектора $(0, k)$, внутри которого должна лежать нелинейная характеристика $\Phi(x)$,

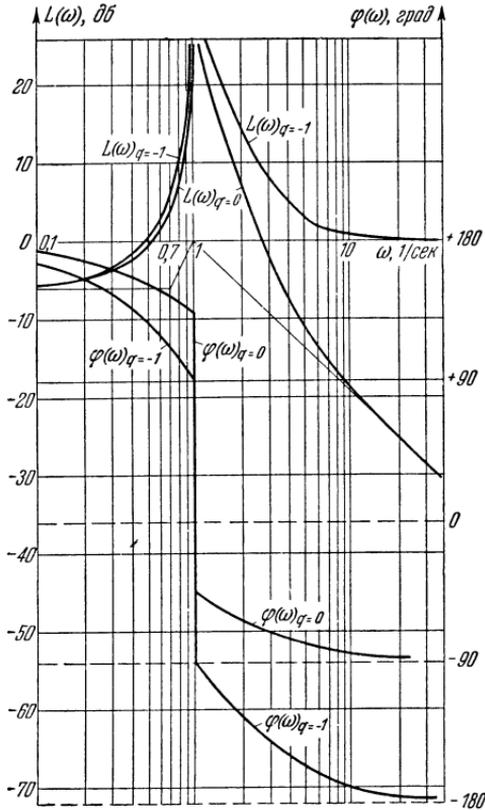


Рис. 4.29.

чтобы система имела абсолютно устойчивое положение равновесия, будет равно $k_{\text{ляп. гр}} = 1$.

Этот же результат можно получить, построив кривую Попова, которая приведена на рис. 4.28. Из рассмотрения рис. 4.28 также следует, что $k_{\text{ляп. гр}} = 1$.

Таким образом, для данной системы угол по Ляпунову составляет лишь часть «гурвитцева» угла, т. е.

$$k_{\text{гур. гр}} = 2 > k_{\text{ляп. гр}} = 1,$$

Анализ системы Плисса при помощи логарифмических частотных характеристик. Исследование абсолютной устойчивости положения равновесия рассматриваемой системы можно также провести при помощи кривой

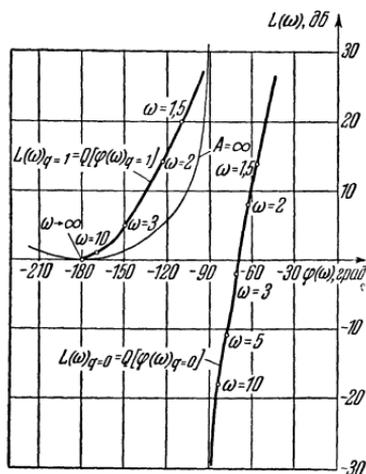


Рис. 4.30.

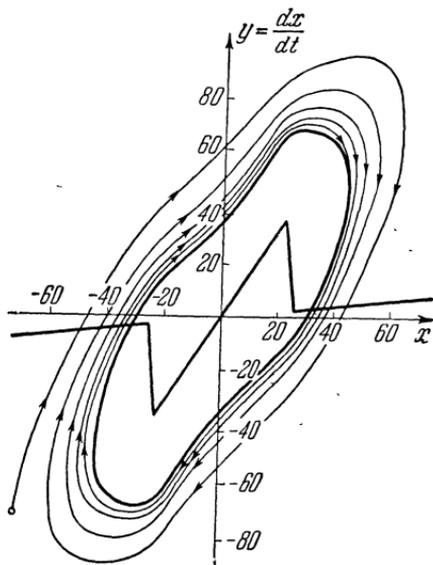


Рис. 4.31.

Попова, изображенной в декартовой системе координат, где по оси ординат откладываются значения

$$L_{q_0}(\omega) = 20 \lg |(1 + q_0 j \omega) K_{л.ч}(j \omega)|,$$

а по оси абсцисс — значения

$$\varphi_{q_0}(\omega) = \arg [(1 + q_0 j \omega) K_{л.ч}(j \omega)].$$

Граничное значение $k_{л.ч.гр}$ определяется из условия касания кривой $L_{q_0} = Q[\varphi_{q_0}]$ граничной кривой.

Построение логарифмических частотных характеристик линейной части системы $L(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, а также и логарифмических характеристик $L_{q_0}(\omega)$ и $\varphi_{q_0}(\omega)$ приведено на рис. 4.29. Кривая $L_{q_0}(\omega) = Q[\varphi_{q_0}(\omega)]$, построенная в декартовой системе координат, приведена на рис. 4.30. Из рис. 4.30 следует, что значение коэффициента

усиления, при котором кривая $L_{q_0} = Q[\Phi_{q_0}]$ при $q_0 = 1$ касается граничной кривой, $k_{\text{ляп. гр}} = 1$.

Экспериментальное исследование системы Плисса. Экспериментальное исследование системы Плисса впервые было проведено А. Г. Деви и Е. И. Джури [1] в 1965 г. на электронной моделирующей установке для случая, когда нелинейная характеристика имеет вид, изображенный на рис. 4.31. Как

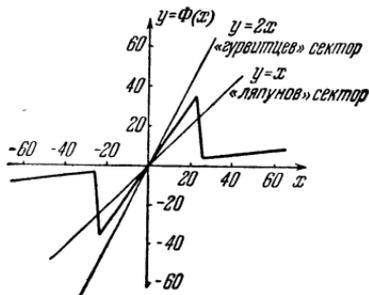


Рис. 4.32.

следует из рис. 4.32, нелинейная характеристика $y = \Phi(x)$ выходит за пределы «ляпунова» сектора и не выходит за пределы «гурвитцева» сектора, т. е. достаточные условия абсолютной устойчивости положения равновесия, даваемые критерием Попова, не выполняются.

Авторы, проведя исследование данной системы на электронной моделирующей установке, показали, что при выбранной нелинейной характеристике (рис. 4.32) в системе возникают устойчивые автоколебания.

На рис. 4.31 на фазовой плоскости $y = dx/dt$, x изображена фазовая траектория для начальных условий y_0, x_0 и $z_0 = [dy/dt] = 0$. Таким образом, в данной системе при расположении нелинейной характеристики внутри «гурвитцева» сектора, но вне сектора по Ляпунову могут существовать устойчивые автоколебания.

Можно показать, что найденный предельный цикл носит полуустойчивый характер, т. е. при достаточно больших начальных возмущениях в системе будут возникать устойчивые автоколебания, а при малых начальных возмущениях, когда, например, мы находимся на линейной части нелинейной характеристики, проходящей через начало координат, рассматриваемая система устойчива.

ГЛАВА V

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ ВО ВРЕМЕНИ ПАРАМЕТРАМИ

При исследовании систем автоматического управления часто встречаются случаи, когда один или несколько параметров системы меняются во времени. Такие системы принято называть *системами с переменными во времени параметрами*. К данному классу относятся и некоторые типы самонастраивающихся и приспособляющихся систем.

В области исследования устойчивости линейных и нелинейных систем с переменными во времени параметрами имеется обширная научная литература, часть из которой упомянута в конце книги.

В данной главе будут рассмотрены лишь методы исследования абсолютной устойчивости нелинейных систем с одним переменным во времени параметром и проведено сравнение с критерием асимптотической устойчивости систем автоматического управления Бонд-жиорно [1, 2].

§ 1. Устойчивость систем с одним переменным во времени параметром

1. Критерий абсолютной устойчивости линейных и нелинейных систем с одним переменным во времени параметром. Рассмотрим нелинейную систему автоматического управления с одним переменным во времени параметром $k(t)$, структурная схема которой приведена на рис. 5.1, $f_H(t)$ — исчезающее внешнее воздействие, действующее на входе системы. При $\Phi(x) = x$ система выродается в линейную (см. рис. 5.2).

Нелинейная система (рис. 5.1) после эквивалентного преобразования приведена на рис. 5.3 и 5.4. Динамика системы, изображенной на рис. 5.4 характеризуется

нелинейным интегральным уравнением:

$$x(t) = f_n^H(t) - \int_0^t \Psi_{\Pi}[x(\lambda), \lambda] h_{\Pi}'(t - \lambda) d\lambda, \quad (5.1)$$

где $x(t)$ — величина, характеризующая ошибку в системе (рис. 5.1); $y = \Psi_{\Pi}(x, t) = \Phi(x)k(t) - rx$ — нестационарная нелинейная характеристика; $k(t)$ — переменный

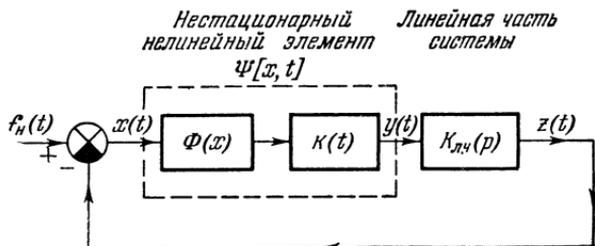


Рис. 5.1.

во времени коэффициент усиления системы; $\Phi(x)$ — стационарная нелинейная характеристика; $h_{\Pi}'(t)$ — импульсная характеристика преобразованной линейной части системы; $K_{л.ч}(p) = \frac{K_{л.ч}(p)}{1 + rK_{л.ч}(p)}$ — передаточная функция преобразованной линейной части системы.



Рис. 5.2.

Сравнивая полученное нелинейное интегральное уравнение (5.1) с уравнением (2.24), использовавшимся нами при исследовании абсолютной устойчивости процессов, видим, что они практически ничем не отличаются. Следовательно, можно говорить об абсолютной ус-

тойчивости положения равновесия в нелинейной системе с переменным во времени коэффициентом усиления $k(t)$, когда нестационарная нелинейная характеристика

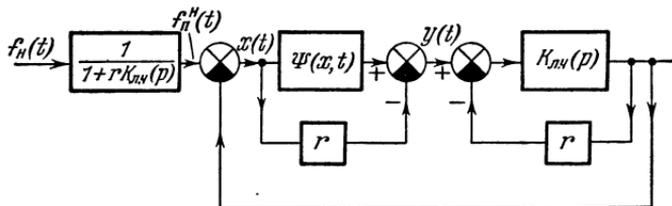


Рис. 5.3.

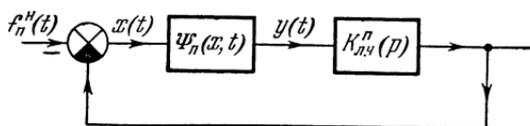


Рис. 5.4.

$\Psi_n(x, t)$ для любого $t > 0$ лежит внутри сектора, ограниченного лучами kx и rx , и если $k > 0$, $r > 0$, $k > r$. В частном случае $r = 0$. Если же коэффициент усиления изменяется, например, по гармоническому закону (рис. 5.5), то характеристика $k(t)$ расположена

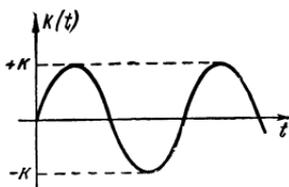


Рис. 5.5.

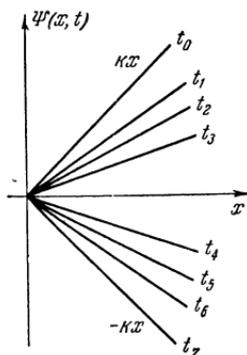


Рис. 5.6.

внутри сектора, ограниченного лучами kx и $-kx$ (рис. 5.6), и пользоваться критерием нельзя.

Доказательство критерия абсолютной устойчивости справедливо для различного вида коэффициентов $k(t)$, таких, что при $r=0$

$$k(t) \geq 0.$$

В частности, критерий справедлив для случаев изменения $k(t)$, приведенных на рис. 5.7, 5.8 и 5.9.

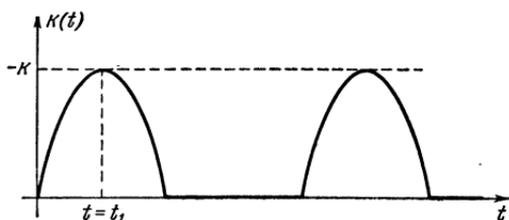


Рис. 5.7.

Таким образом, можно сформулировать достаточный критерий абсолютной устойчивости положения равновесия систем автоматического управления с переменным во времени коэффициентом усиления:

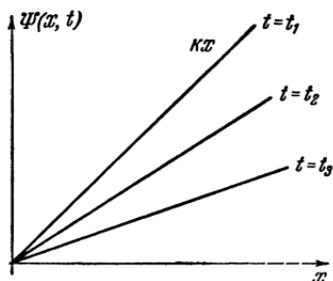


Рис. 5.8.

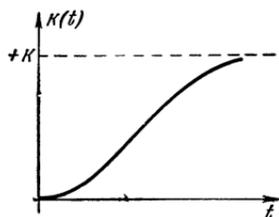


Рис. 5.9.

Для абсолютной устойчивости положения равновесия в нелинейной системе автоматического управления достаточно, чтобы для всех $\omega \geq 0$ выполнялось неравенство

$$\operatorname{Re} \frac{K_{л.ч}(j\omega)}{1 + rK_{л.ч}(j\omega)} + \frac{1}{k_{\max} - r} > 0 \quad (5.2)$$

и нестационарная нелинейная характеристика $\Psi_{\Pi}(x, t)$ для любого момента времени удовлетворяла условию

$$rx < \Phi(x) k(t) < k_{\max} x, \quad (5.3)$$

где

$$k_{\max} > 0, \quad r > 0, \quad k_{\max} > r.$$

В случае линейной системы с переменным коэффициентом усиления условие, аналогичное условию (5.3), должно быть наложено на переменный во времени коэффициент усиления

$$r < k(t) < k_{\max}.$$

При $r=0$ условия (5.2) и (5.3) принимают вид

$$\operatorname{Re} k_{\max} K_{л.ч}(j\omega) + 1 > 0 \quad (5.4)$$

и

$$0 < \Phi(x) k(t) < k_{\max} x \quad (5.5)$$

или в случае линейной системы, когда $y = \Phi(x) = x$, условие (5.5) будет

$$0 < k(t) < k_{\max}.$$

Можно также легко показать, что в том случае, когда на систему действует ограниченное внешнее воздействие $f_0(t)$, то исследование абсолютной устойчивости процессов в такой системе сводится к исследованию устойчивости нелинейного интегрального уравнения, аналогичного (5.1), если исчезающее внешнее воздействие заменить на ограниченное внешнее воздействие. Поэтому сформулированный выше критерий справедлив также и при исследовании абсолютной устойчивости процессов в системе с переменным во времени параметром.

Как следует из формулировки критерия, никаких ограничений на характер изменения коэффициента усиления во времени внутри полосы (r, k) не накладывается. Ограничения накладываются только на его максимальное и минимальное значения, так как сформулированный критерий не учитывает характер изменения коэффициента во времени. Изложенные выше методы анализа и синтеза абсолютной устойчивости процессов в нелинейных системах целиком и полностью справедливы и для рассмотренных здесь нелинейных систем с переменным во времени параметром.

Часто при исследовании систем с медленно изменяющимися во времени параметрами пользуются так называемым методом «замораживания коэффициентов», исследуя устойчивости при помощи критериев устойчивости линейных систем. Само понятие *медленно* изменяющихся коэффициентов довольно неопределенно и поэтому

может привести в ряде случаев к неверным выводам. Если пользоваться методом замороженных коэффициентов, то в рассматриваемом здесь случае (при переменном во времени коэффициенте усиления) амплитудно-фазовая характеристика для систем, устойчивых в разомкнутом состоянии, не должна охватывать точки

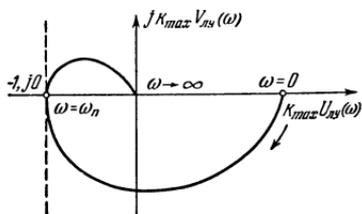


Рис. 5.10.

($-1; j0$). Но как уже было отмечено, критерий Найквиста является лишь необходимым условием выполнения достаточного критерия абсолютной устойчивости процессов.

В частном случае (рис. 5.10), если при $r = 0$ максимум $k_{\max} K_{\text{л. ч}}(j\omega)$ достигается при значении $\omega_{0 \max}$, при котором $\arg k_{\max} K_{\text{л. ч}}(j\omega_{0 \max}) = +\pi$, метод замороженных коэффициентов дает тот же результат, что и сформулированный выше критерий асимптотической устойчивости линейных систем с переменным во времени параметром.

2. Критерий асимптотической устойчивости линейных систем с одним переменным во времени параметром (критерий Бонджиорно). Рассмотрим линейную систему автоматического управления с переменным во времени коэффициентом усиления, структурная схема которой приведена на рис. 5.2.

Обобщение критерия Найквиста на случай, когда коэффициент усиления или один из параметров линейной системы меняется во времени, дано Бонджиорно [1]. Достаточный критерий асимптотической устойчивости Бонджиорно гласит:

Для асимптотической устойчивости системы автоматического управления с одним переменным во времени параметром достаточно, чтобы для всех $\omega \geq 0$ выполнялось неравенство

$$k_{\max} |K_{\text{л. ч}}(j\omega)| < 1, \quad (5.6)$$

где k_{\max} — максимальное значение переменного во времени коэффициента усиления,

Геометрически условие (5.6) означает, что амплитудно-фазовая характеристика $k_{\max} K_{\text{л.ч}}(j\omega)$ при всех $\omega \geq 0$ находится внутри круга радиуса $R=1$ (рис. 5.11). Как следует из работы Я. З. Цыпкина [1], точно так же формулируется критерий устойчивости линейных систем автоматического регулирования, асимптотически устойчивых при любом времени запаздывания.

Критерий Бонджиорно может быть также сформулирован на языке логарифмических частотных характеристик разомкнутой системы. Легко показать, что условие (5.6) равносильно следующему неравенству:

$$20 \lg k_{\max} + 20 \lg |K_{\text{л.ч}}(j\omega)| < 0. \quad (5.7)$$

Геометрически это означает, что логарифмическая амплитудно-частотная характеристика разомкнутой системы

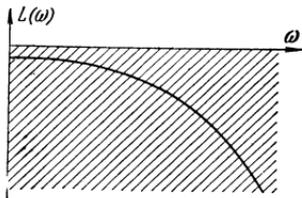


Рис. 5.12.

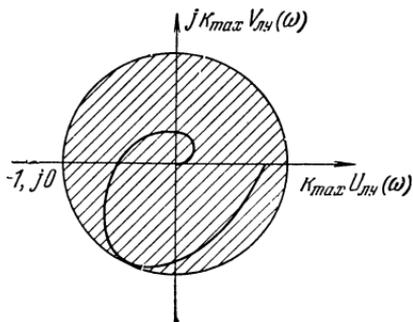


Рис. 5.11.

$$20 \lg k_{\max} + 20 \lg |K_{\text{л.ч}}(j\omega)|$$

при всех $\omega \geq 0$ должна быть расположена в нижней полуплоскости $L(\omega)$ (рис. 5.12).

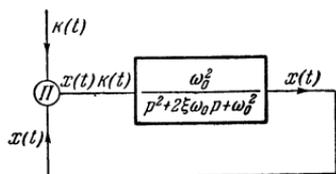
Как следует из (5.6), критерий Бонджиорно, в основе которого лежит только амплитудно-частотная характеристика разомкнутой системы, применим лишь для систем с устойчивой линейной частью системы. Он может дать неверный результат для неминимально-фазовых систем и не может быть использован для систем нейтральных и неустойчивых в разомкнутом состоянии.

Данный критерий обобщается и на системы с несколькими переменными во времени параметрами. Как уже указывалось в предыдущем параграфе, на линейные

системы с переменным коэффициентом усиления распространяются достаточные условия критерия В. М. Попова. В ряде случаев (например, в рассмотренном ниже примере) критерий Попова охватывает и условия Бондзиорно для линейных систем.

§ 2. Пример исследования устойчивости системы с переменным во времени параметром

В качестве примера исследования асимптотической устойчивости рассмотрим систему, описываемую однородным дифференциальным уравнением второго порядка с периодически изменяющимся во времени коэффициентом усиления (Бондзиорно [1, 2]):



$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 [1 - k(t)x] = 0, \quad (5.8)$$

Рис. 5.13.

где γ , ω_0 — постоянные величины; $k(t)$ — периодически изменяющийся во времени коэффициент. Предположим только, что

$$0 < k(t) < k_{\max}. \quad (5.9)$$

Структурная схема системы, соответствующая (5.8), приведена на рис. 5.13.

Пользуясь приведенным выше частотным критерием абсолютной устойчивости, определим предельное значение $k_{\text{пр max}}$, при котором обеспечивается асимптотическая устойчивость системы, характеризуемой дифференциальным уравнением (5.8), а также найдем область асимптотической устойчивости $k_{\text{пр max}} = k_{\max}(\gamma)$.

В связи с тем, что рассматриваемая система (рис. 5.13) — с положительной обратной связью, мы должны в выражении (5.2) перед амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой системы взять знак минус.

Достаточное условие асимптотической устойчивости в данном случае имеет следующий вид:

$$-\operatorname{Re} k_{\max} \frac{\omega_0^2}{(j\omega)^2 + j2\gamma\omega_0\omega + \omega_0^2} + 1 > 0 \quad (5.10)$$

или

$$-\operatorname{Re} k_{\max} \frac{1}{(j\bar{\omega})^2 + j2\gamma\bar{\omega} + 1} + 1 > 0, \quad (5.11)$$

где

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Теперь для нахождения области асимптотической

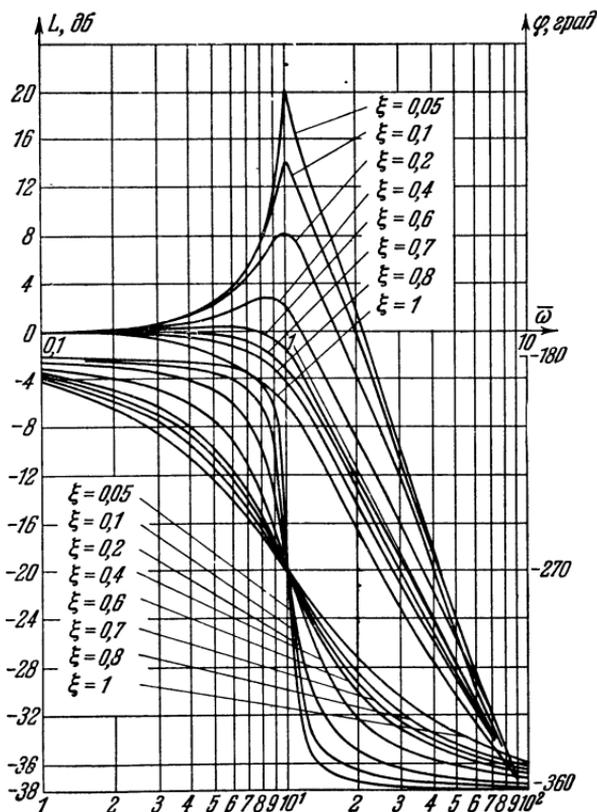


Рис. 5.14.

устойчивости $k_{\text{пр max}} = k_{\text{max}}(\gamma)$ воспользуемся изложенным выше методом логарифмических частотных характеристик. Для этого построим семейство логарифмических амплитудно- и фазо-частотных характеристик при

различных значениях ξ и $k_{\max} = 1$ (рис. 5.14)

$$L(\bar{\omega}) = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{(1 - \bar{\omega}^2)^2 + 4\gamma^2 \bar{\omega}^2}}, \quad (5.12)$$

$$\varphi(\bar{\omega}) = - \operatorname{arctg} \left[\frac{2\gamma \bar{\omega}}{1 - \bar{\omega}^2} \right] - \pi, \quad (5.13)$$

а затем перестроим эти логарифмические характеристики при $k_{\max} = 1$ в декартовой системе координат в виде

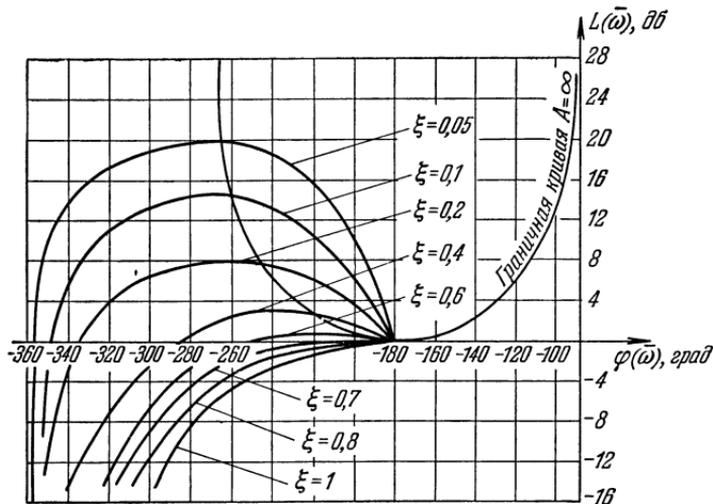


Рис. 5.15.

$L(\bar{\omega}) = Q[\varphi(\bar{\omega})]$ (рис. 5.15) и определим предельные значения $k_{\text{пр max}}$ из условия касания логарифмических частотных характеристик $L(\bar{\omega}) = Q[\varphi(\bar{\omega})]$ с граничной кривой.

Таблица 3

$k_{\text{пр max}} (\text{дБ})$	-14	-8,6	-4	-0,6	0	0	0	0
$k_{\text{пр max}}$	0,199	0,371	0,631	0,933	1	1	1	1
ξ	0,05	0,10	0,20	0,40	0,60	0,70	0,80	1

В результате определяем соответствующие значения $k_{\text{пр max}}$ (см. табл. 3) и можем легко построить искомую кривую $k_{\text{пр max}} = k_{\text{max}}(\xi)$ (кривая 1) (рис. 5.16). Нетрудно показать, что при $\xi \rightarrow 0$ $k_{\text{пр max}} \rightarrow 0$.

Из (5.4) и (5.11) следует, что условия асимптотической устойчивости не зависят от ω_0 в связи с тем, что критерий дает лишь достаточные условия устойчивости и единственное условие, которое наложено на $k(t)$, это ограничение его максимального значения.

Если воспользоваться критерием Бонджиорно применительно к рассмотренному выше примеру, то условия асимптотической устойчивости, записанные в аналитической форме, имеют следующий вид:

$$k_{\text{пр max}} = \begin{cases} 1 & \text{при } \xi \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ 2\xi \sqrt{1 - \xi^2} & \text{при } \xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases} \quad (5.14)$$

Кривая $k_{\text{пр max}} = k_{\text{max}}(\xi)$, построенная на основе (5.11), приведена на рис. 5.16 (кривая 2). Из сравнения областей устойчивости следует, что критерий (5.11) позволяет получить несколько большую область устойчивости по сравнению с критерием Бонджиорно. Это легко усмотреть из сравнения выражений (5.6) и (5.2) при $r=0$.

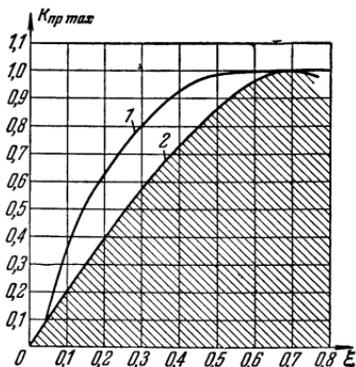


Рис. 5.16.

КОСВЕННЫЕ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В АБСОЛЮТНО УСТОЙЧИВЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

§ 1. Сущность понятия степени устойчивости

Одной из косвенных оценок качества переходных процессов в линейных системах автоматического управления является *степень устойчивости*. Понятие степени устойчивости было введено в теорию автоматического управления Я. З. Цыпкиным и П. В. Бромбергом [1].

В случае линейных систем степень устойчивости — величина, определяющая действительную часть ближайшего к мнимой оси корня. Система автоматического управления будет тем более быстродействующей (при одних и тех же внешних воздействиях), чем большей степенью устойчивости она обладает. Таким образом, степень устойчивости определяет быстроту затухания переходного процесса, а поэтому иногда ее также называют *затуханием* (А. А. Фельдбаум [4]).

Понятие степени устойчивости по аналогии с линейными системами можно распространить и на абсолютно устойчивые нелинейные системы.

Будем говорить далее, что нелинейная система обладает заданной степенью устойчивости, если отклонение от процесса (от положения равновесия) $\xi(t)$ будет удовлетворять условию (см. Б. Н. Наумов и Я. З. Цыпкин [1], В. А. Якубович [5], Б. Н. Наумов [10])

$$|\xi(t)| \leq M_{\delta} e^{-\delta_0 t}, \quad (6.1)$$

где $M_{\delta} = \text{const}$ — постоянная, определяемая параметрами системы и начальными условиями; $\delta = \delta_0$ — степень устойчивости.

Перейдем к выводу условий, при выполнении которых процессы (или положение равновесия) в рассмат-

риваемой нелинейной системе автоматического управления будут абсолютно устойчивы и отклонения от процессов (от положения равновесия) будут обладать заданной степенью устойчивости.

§ 2. Степень устойчивости в нелинейных системах с абсолютно устойчивыми процессами

1. Достаточное условие, при выполнении которого отклонение от процесса в нелинейной системе будет иметь степень устойчивости не менее заданной. В предыдущих главах был сформулирован частотный критерий абсолютной устойчивости процессов в нелинейных системах.

Найдем достаточное условие, при выполнении которого процессы в нелинейной системе будут абсолютно устойчивы и, кроме того, будут иметь степень устойчивости не менее заданной, т. е. $\xi(t)$ будет удовлетворять условию

$$|\xi(t)| \leq M_{\delta} e^{-\delta_0 t}, \quad (6.2)$$

где $\delta = \delta_0$ — заданная степень устойчивости.

Выше было получено следующее нелинейное интегральное уравнение для отклонения от процесса $\xi(t)$:

$$\xi(t) = \bar{f}_n^H(t) - \int_0^t h'_n(t-\lambda) \Psi_n[\xi(\lambda); \lambda] d\lambda. \quad (6.3)$$

Умножая левую и правую части (6.3) на $e^{\delta_0 \lambda}$ и подынтегральное выражение на $e^{-\delta_0 t} \cdot e^{\delta_0 t}$, получим

$$\bar{\xi}(t) = \bar{f}_n^H(t) - \int_0^t \bar{h}'_n(t-\lambda) \bar{\Psi}_n[\xi(\lambda); \lambda] d\lambda, \quad (6.4)$$

где

$$\bar{\xi}(t) = \xi(t) e^{\delta_0 t}, \quad (6.5)$$

$$\bar{f}_n^H(t) = f_n^H(t) e^{\delta_0 t}, \quad (6.6)$$

$$\bar{h}'_n(t) = h'_n(t) e^{-\delta_0 t}, \quad (6.7)$$

$$\bar{\Psi}_n[\xi(t); t] = \Psi_n[\xi(t); t] e^{\delta_0 t}, \quad (6.8)$$

$\delta = \delta_0$ — заданная степень устойчивости. В этом случае

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{f}_n^H(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} f_n^H(t) e^{+\delta_0 t} = 0. \quad (6.9)$$

Если система с нестационарной нелинейной характеристикой, описываемая уравнением (6.4), обладает абсолютно устойчивым положением равновесия, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\xi}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) e^{\delta_0 t} = 0, \quad (6.10)$$

и следовательно, будет выполняться неравенство (6.2). Нетрудно показать, что условие для функции $\bar{\Psi}_n[\xi(t); t]$

$$r < \frac{\bar{\Psi}_n[\xi(t); t]}{\bar{\xi}(t)} < k \quad (6.11)$$

совпадает с ранее полученным условием для функции $\Psi[\xi(t); t]$. Действительно, подставляя в (2.33) соответствующие выражения (6.8) и (6.5), получим

$$r < \frac{\Psi[\xi(t); t]}{\xi(t)} < k. \quad (6.12)$$

Сравнивая интегральное уравнение (6.3) с уравнением (6.4), видим, что единственное отличие их заключается в ядре, спектральная функция которого имеет следующий вид:

$$\int_0^{\infty} \bar{h}'_n(t) e^{-j\omega t} dt = K_{л. ч}^n(j\omega - \delta_0), \quad (6.13)$$

или

$$\int_0^{\infty} h'_n(t) e^{-\delta_0 t} e^{-j\omega t} dt = K_{л. ч}^n(j\omega - \delta_0), \quad (6.14)$$

где

$$K_{л. ч}^n(j\omega - \delta_0) = K_{л. ч \delta_0}^n(j\omega) = \frac{K_{л. ч}(j\omega - \delta_0)}{1 + rK_{л. ч}(j\omega - \delta_0)} \quad (6.15)$$

называется *смещенной частотной характеристикой* преобразованной линейной части системы, а $K_{л. ч}(j\omega - \delta_0)$ — *смещенной частотной характеристикой* линейной части системы.

Поэтому достаточное условие, при выполнении которого процессы в рассматриваемой нелинейной системе

будут абсолютно устойчивы и все отклонения от процесса $\xi(t)$ будут иметь степень устойчивости не менее заданной $\delta = \delta_0$, имеет следующий вид:

$$\operatorname{Re} \frac{K_{л.ч}(j\omega - \delta_0)}{1 + rK_{л.ч}(j\omega - \delta_0)} + \frac{1}{k-r} > 0 \quad \text{для всех } \omega \geq 0. \quad (6.16)$$

При этом нестационарная нелинейная характеристика $\Psi_n[\xi(t); t]$ должна удовлетворять условию (6.12), либо производная нелинейной характеристики $\partial\Phi/\partial x$ должна принадлежать полосе (r, k) , т. е.

$$r < \frac{\partial\Phi(x)}{\partial x} < k. \quad (6.16a)$$

2. Использование логарифмических частотных характеристик для анализа и синтеза корректирующих устройств, при наличии которых отклонение от процесса будет иметь степень устойчивости не менее заданной. В предыдущем разделе были получены достаточные условия, при выполнении которых переходные процессы будут абсолютно устойчивы, а отклонения от процессов $\xi(t)$ будут иметь степень устойчивости не менее заданной $\delta = \delta_0$. Нетрудно видеть, что полученное условие (6.16) отличается от ранее полученного условия при $\delta_0 = 0$ лишь тем, что вместо частотной характеристики линейной части системы $K_{л.ч}(j\omega)$ в (6.16) входит так называемая *смещенная частотная характеристика линейной части системы* $K_{л.ч}(j\omega - \delta_0)$. Исследование системы на основе критерия (6.16) при $\delta_0 \neq 0$ удобнее всего проводить так же, как это делалось при $\delta_0 = 0$, обобщив для этого случая метод логарифмических частотных характеристик — введя понятие смещенных логарифмических амплитудно- и фазо-частотных характеристик, т. е. логарифмических частотных характеристик при $\delta = \delta_0$.

Будем далее обозначать смещенные логарифмические амплитудно- и фазо-частотные характеристики, соответствующие заданной степени устойчивости $\delta = \delta_0$ через $L_{\delta_0}(\omega)$ и $\varphi_{\delta_0}(\omega)$. Нетрудно получить соответствующие выражения для смещенных логарифмических амплитудно- и фазо-частотных характеристик, соответствующих типовым линейным звеньям, и построить их.

Рассмотрим несколько простых примеров нахождения смещенных частотных характеристик для некоторых типовых звеньев.

Пример 1. Смещенная частотная характеристика для интегрирующего звена.

Частотная характеристика интегрирующего звена имеет следующий вид:

$$K(j\omega) = \frac{k}{j\omega},$$

а смещенная частотная характеристика будет иметь тот же вид, как и у неустойчивого звена первого порядка

$$K(j\omega - \delta_0) = \frac{\bar{k}}{T_\delta j\omega - 1},$$

где

$$\bar{k} = \frac{k}{\delta_0}, \quad T_\delta = \frac{1}{\delta_0}.$$

Пример 2. Смещенная частотная характеристика устойчивого звена первого порядка.

Частотная характеристика устойчивого звена первого порядка имеет следующий вид:

$$K(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1},$$

а смещенная частотная характеристика при $T\delta_0 < 1$ равна:

$$K(j\omega - \delta_0) = \frac{\bar{k}}{T_\delta j\omega + 1},$$

где

$$\bar{k} = \frac{k}{1 - T\delta_0} > 0, \quad T_\delta = \frac{T}{1 - T\delta_0}.$$

Следовательно, при $T\delta_0 < 1$ смещенная частотная характеристика по своему виду совпадает с исходной, но с другими численными значениями \bar{k} и T_δ .

При $T\delta_0 = 1$

$$K(j\omega - \delta_0) = \frac{k}{Tj\omega}.$$

Следовательно, в этом случае смещенная частотная характеристика устойчивого звена первого порядка вы-

рождается в интегрирующее звено.

При $T\delta_0 > 1$

$$K(j\omega - \delta_0) = \frac{\bar{k}}{T\delta_0 j\omega - 1},$$

где

$$\bar{k} = \frac{k}{T\delta_0 - 1}, \quad T_\delta = \frac{T}{T\delta_0 - 1}.$$

Не представляет труда для каждого из рассмотренных случаев получить выражения и для логарифмических частотных характеристик.

Пример 3. Смещенная частотная характеристика для звена запаздывания.

Частотная характеристика для звена запаздывания имеет следующий вид:

$$K(j\omega) = e^{-j\omega\tau}.$$

Смещенная частотная характеристика

$$K(j\omega - \delta_0) = k_\tau e^{-j\omega\tau},$$

где

$$k_\tau = e^{\delta_0\tau}.$$

Вид смещенной частотной характеристики остается прежним — изменяется лишь численное значение коэффициента k_τ .

Если в нашем распоряжении имеются логарифмические амплитудно- и фазо-частотные характеристики, то нетрудно также построить смещенную логарифмическую частотную характеристику в декартовой системе координат $L_\delta(\omega) = Q[\varphi_\delta(\omega)]$. Тогда геометрический смысл условия (6.16) на плоскости $L_\delta\varphi_\delta$ будет тем же, что и раньше при $\delta_0 = 0$, но вместо характеристики $L(\omega) = Q[\varphi(\omega)]$ следует рассматривать смещенную логарифмическую частотную характеристику $L_\delta(\omega) = Q[\varphi_\delta(\omega)]$.

После нахождения смещенной логарифмической частотной характеристики $L_\delta(\omega) = Q[\varphi_\delta(\omega)]$ задача анализа и синтеза корректирующих устройств, обеспечивающих для рассматриваемой системы абсолютную устойчивость процессов и степень устойчивости процессов не менее заданной, сводится к задаче исследования устойчивости, рассмотренной в предыдущих главах.

3. Примеры анализа и синтеза качества нелинейных систем.

Система автоматического регулирования скорости двигателя. Рассмотрим пример исследования качества

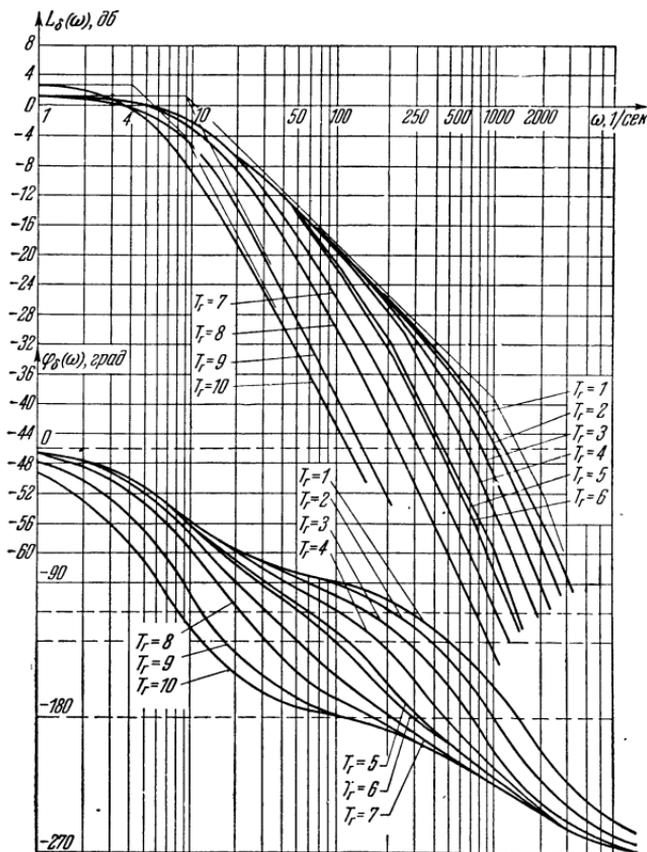


Рис. 6.1.

нелинейной системы автоматического регулирования скорости двигателя. Для этой системы:

1. В плоскости \bar{K}_{np} , T_r построим области, где выполняются условия абсолютной устойчивости процессов при $A = \infty$ ($\delta_0 = 0$), а также при $\delta_0 = 1, 5, 9$.

2. Для $\bar{k}_{\text{пр. тр}} = 40 \text{ дБ}$, $A = \infty$ и степени устойчивости $\delta_0 = 6$ проверим выполнение критерия абсолютной устойчивости процессов; в случае его невыполнения синтезируем последовательное корректирующее устройство.

Для решения первой задачи, т. е. для нахождения областей в плоскости $\bar{k}_{\text{пр}}$, T_{Γ} необходимо:

1) построить семейство смещенных логарифмических амплитудно- и фазо-частотных характеристик $L_{\delta}(\omega)$ и $\varphi_{\delta}(\omega)$ при разных T_{Γ} и $\delta = \delta_0 = 1, 5, 9$ при $\bar{k} = 1$. На рис. 6.1 изображено семейство логарифмических частотных характеристик, построенных при $\delta = \delta_0 = 1$ и разных значениях $T_{\Gamma} = 1, 2, \dots, 10$;

2) построить семейство смещенных частотных характеристик в декартовой системе координат $L_{\delta} = Q[\varphi_{\delta}]$ при $\bar{k} = 1$ и из условия касания граничной кривой, имеющей индекс $A = \infty$, определить значения $\bar{k}_{\text{пр}}$, соответствующие различным значениям δ_0 и T_{Γ} .

В качестве примера на рис. 6.2 изображено семейство логарифмических частотных характеристик в декартовой системе координат при $\delta_0 = 1$ и разных T_{Γ} ;

3) зная $\bar{k}_{\text{пр}}$, соответствующие различным значениям T_{Γ} и δ_0 , строится искомое семейство кривых $\bar{k}_{\text{пр}} = \bar{k}_{\text{пр}}(T_{\Gamma})$ при $\delta_0 = \text{const}$, которое изображено на рис. 6.3. На рис. 6.3 изображена также граница области устойчивости линеаризованной системы, определяющая также в данном случае границу области абсолютной устойчивости положения равновесия рассматриваемой нелинейной системы. Полученное семейство кривых позволяет

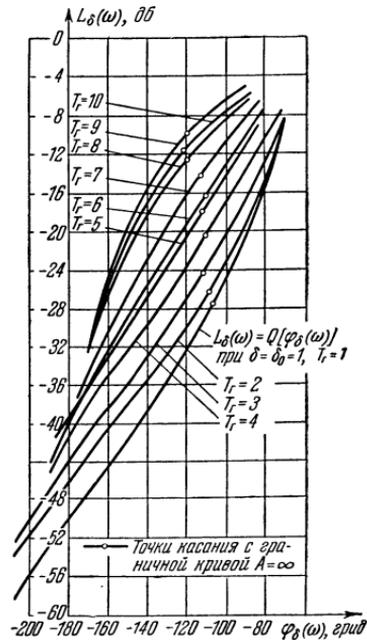


Рис. 6.2.

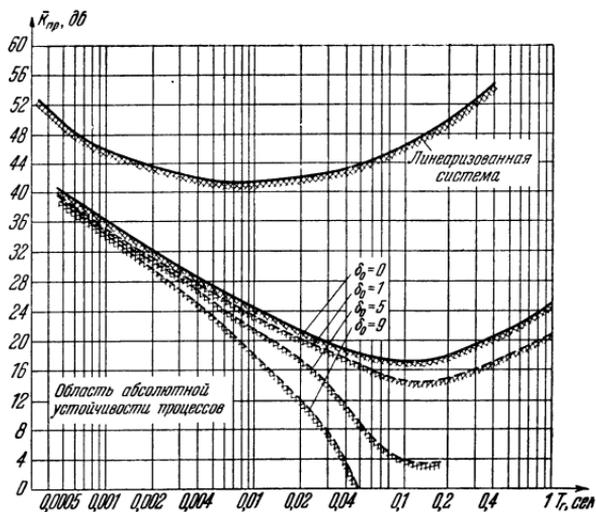


Рис. 6.3.

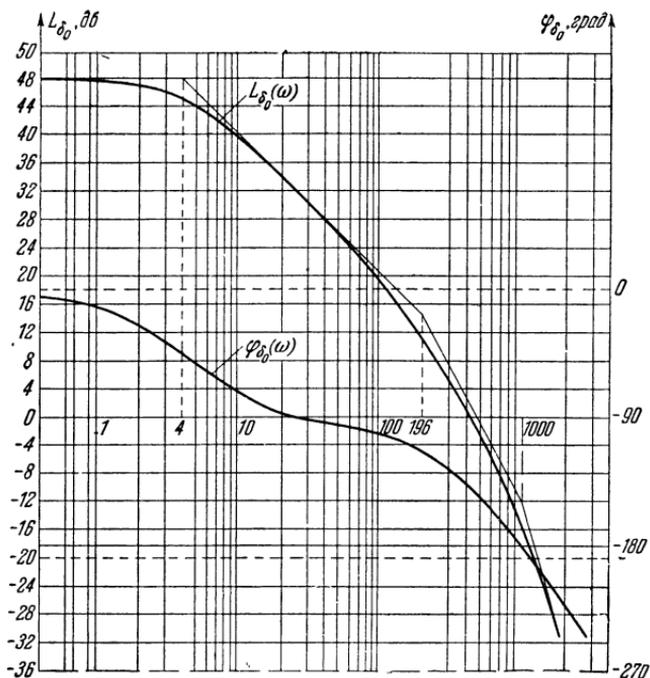


Рис. 6.4.

выбрать \bar{k} и T_{Γ} , не только исходя из условия обеспечения абсолютной устойчивости процессов, но также исходя из обеспечения заданной степени устойчивости.

Для решения второй задачи необходимо:

1) построить логарифмические амплитудно- и фазочастотные характеристики при $\bar{k}_{\text{пр}}=40$ дб и $\delta_0=6$ (рис. 6.4), а затем эту же характеристику в декартовой системе координат (рис. 6.5, кривая 1).

Нетрудно видеть, что при $\bar{k}_{\text{пр}}=40$ дб, $A=\infty$ и $\delta_0=6$ условие абсолютной устойчивости процессов не выполняется, а поэтому необходимо синтезировать корректирующее устройство;

2) для синтеза последовательного корректирующего устройства строится идеальная желаемая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика, а затем и физически реализуемая желаемая амплитудно-частотная характеристика линейной части системы. После этого не представляет труда найти асимптотическую логарифмическую амплитудно-частотную характеристику $L_{\kappa}(\omega)$ последовательного корректирующего устройства и соответствующую ей передаточную функцию $K_{\kappa}(p)$;

3) для проверки выполнения условия (6.16) при $\bar{k}_{\text{пр}}=40$ дб строится логарифмическая частотная характеристика скорректированной линейной части системы

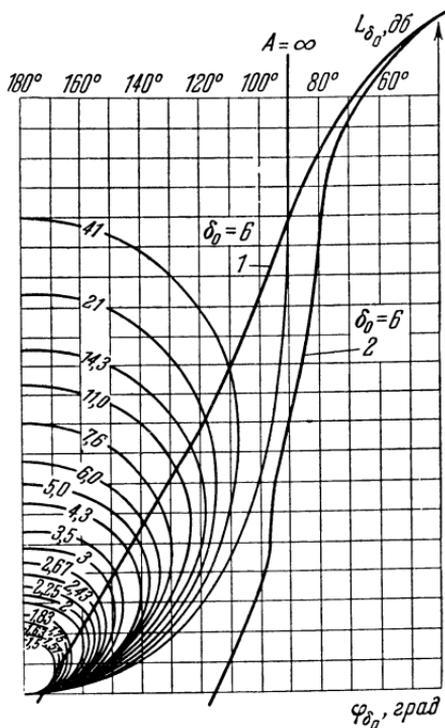


Рис. 6.5.

в декартовой системе координат (см. рис. 6.5, кривая 2).

Позиционная следящая система. В качестве второго примера рассмотрим позиционную следящую систему. Для этой системы построим области абсолютной устойчивости процессов $\bar{k}_{пр} = \bar{k}_{пр}(T_r)$ для $A = 1,63$ и $\delta_0 = 0; 1; 3; 4,4$.

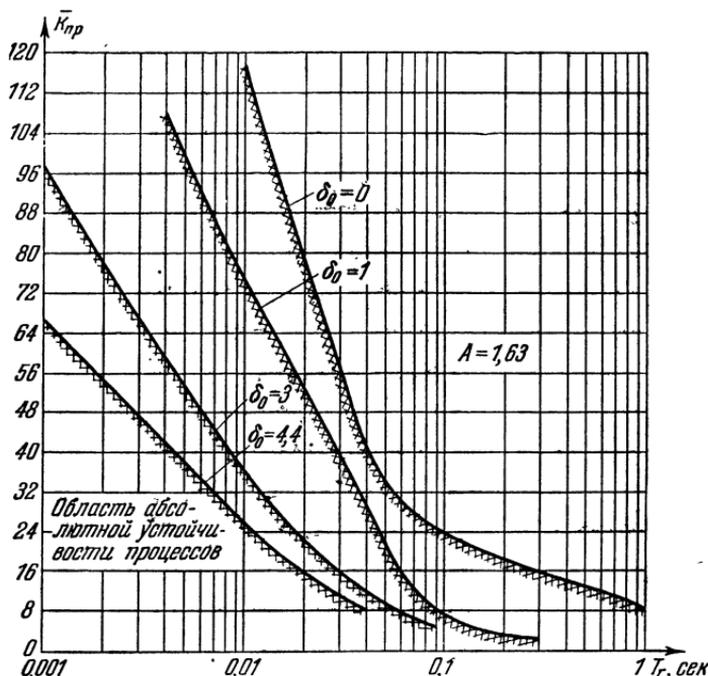


Рис. 6.6.

В связи с тем, что методика решения задачи практически остается такой же, как и в предыдущем случае, подробно описывать решение каждого этапа нет необходимости.

Искомые области абсолютной устойчивости приведены на рис. 6.6.

Система автоматического регулирования с запаздыванием. В качестве третьего примера построим области абсолютной устойчивости процессов $\bar{k}_{пр} = \bar{k}_{пр}(T_p)$ для

$A = 1,63$ и $\delta_0 = 0; 0,01; 0,05; 0,08$ системы автоматического регулирования с запаздыванием.

Искомые области устойчивости, полученные на основе методики, изложенной выше, приведены на рис. 6.7.

Таким образом, методика как анализа, так и синтеза нелинейных систем из условия абсолютной устойчивости процессов и заданной степени устойчивости остается одной и той же вне зависимости от вида линейной части

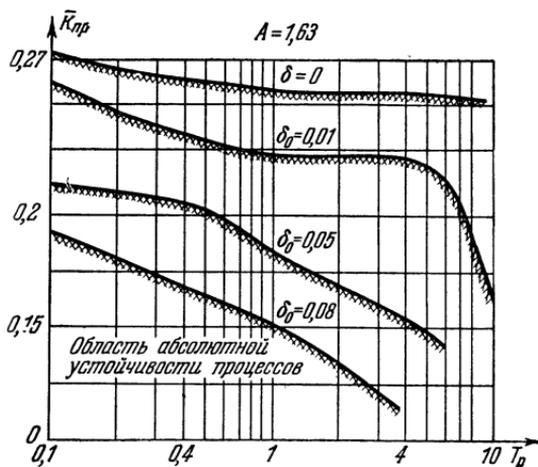


Рис. 6.7.

системы и нелинейного элемента. При использовании изложенного выше метода логарифмических частотных характеристик вычислительная процедура по трудности практически не отличается от подобной, применяемой для анализа и синтеза линейных систем.

§ 3. Степень устойчивости в нелинейных системах с абсолютно устойчивым положением равновесия

1. Достаточное условие, при выполнении которого отклонение от положения равновесия будет иметь степень устойчивости не менее заданной. В работе В. А. Якубовича [5] было получено достаточное условие, при выполнении которого все отклонения от положения равновесия, вызванные ненулевыми начальными условиями,

будут абсолютно устойчивы и, кроме того, будут иметь степень устойчивости не менее заданной $\delta = \delta_0$, т. е.

$$|\xi(t)| \leq M_\delta e^{-\delta_0 t}, \quad (6.17)$$

где $\xi(t)$ — отклонение от положения равновесия; M_δ — постоянная, определяемая начальными условиями, выводящими систему из состояния равновесия, и параметрами системы; $\delta = \delta_0$ — заданная степень устойчивости.

Это условие имеет следующий вид:

$$\operatorname{Re}(1 + jq\omega) kK_{л.ч}(j\omega - \delta_0) + 1 > 0 \quad (6.18)$$

для всех $\omega \geq 0$.

При этом нелинейная характеристика должна быть расположена внутри сектора $(0, k)$, т. е.

$$0 < \frac{\Phi(x)}{x} < k. \quad (6.19)$$

Сравнивая условие (6.18) с условием, при выполнении которого положение равновесия в нелинейной системе при $\delta_0 = 0$ будет абсолютно устойчивым, видим, что уравнение отличается лишь тем, что в него входит смещенная частотная характеристика линейной части системы.

2. Анализ и синтез нелинейных систем, обладающих заданной степенью устойчивости при помощи логарифмических частотных характеристик. Условие (6.18) отличается от условия абсолютной устойчивости положения равновесия лишь наличием смещенной частотной характеристики линейной части системы $K_{л.ч}(j\omega - \delta_0)$ (вместо частотной характеристики $K_{л.ч}(j\omega)$).

Поэтому и в данном случае мы можем воспользоваться методом логарифмических частотных характеристик. Для этого следует построить смещенные амплитудно- и фазо-частотные характеристики при разных значениях $q = q_0$:

$$L_{q\delta}(\omega) = 20 \lg \operatorname{mod} [(1 + jq_0\omega) kK_{л.ч}(j\omega - \delta_0)],$$

$$\varphi_{q\delta}(\omega) = \arg [(1 + jq_0\omega) kK_{л.ч}(j\omega - \delta_0)],$$

а затем и семейство $L_{q\delta}(\omega) = Q[\varphi_{q\delta}(\omega)]$. Наконец, строится кривая $k = f(1/q)$ при заданном значении степени устойчивости $\delta = \delta_0$.

Если найденное таким образом максимальное значение будет меньше требуемого, то, используя методику, изложенную в предыдущем разделе, можно синтезировать стабилизирующее устройство, при котором все отклонения от положения равновесия, вызванные исчезающими внешними воздействиями, будут иметь степень устойчивости не менее заданной.

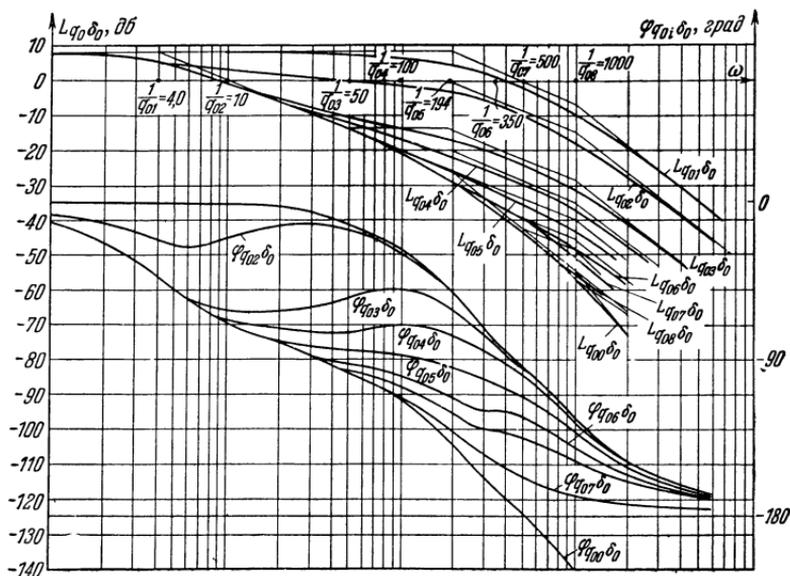


Рис. 6.8.

3. Пример анализа и синтеза нелинейной системы автоматического регулирования скорости двигателя.

Для системы автоматического регулирования скорости двигателя, рассмотренной в предыдущем разделе, определим максимальное значение $\bar{k}_{пр}$ при $\delta_0=6$ и, если оно меньше 45 дБ, синтезируем требуемое корректирующее устройство (при котором система при $\bar{k}=45$ дБ будет иметь степень устойчивости не менее $\delta_0=6$).

Смещенные логарифмические амплитудно- и фазочастотные характеристики для рассматриваемой системы при $\delta_0=6$, $\bar{k}=1$ и при разных значениях q_0 приведены на рис. 6.8.

На рис. 6.9 приведена кривая $\bar{k}_{\text{пр}} = f(1/q)$ при $\delta = \delta_0$ (кривая 1), откуда следует, что $\bar{k}_{\text{пр max}} \approx 43 \text{ дб}$ при $q_0 = 0,005$ меньше требуемого значения $\bar{k}_{\text{пр}} = 45 \text{ дб}$.

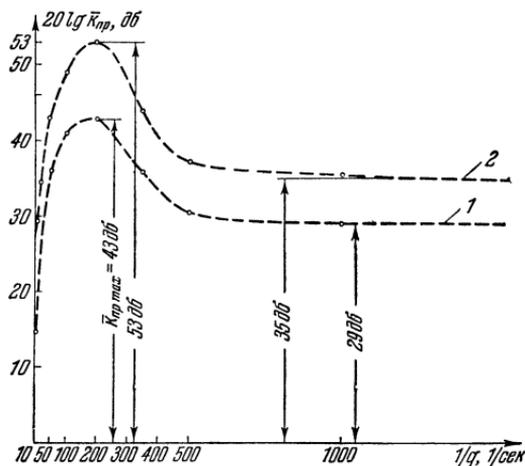


Рис. 6.9.

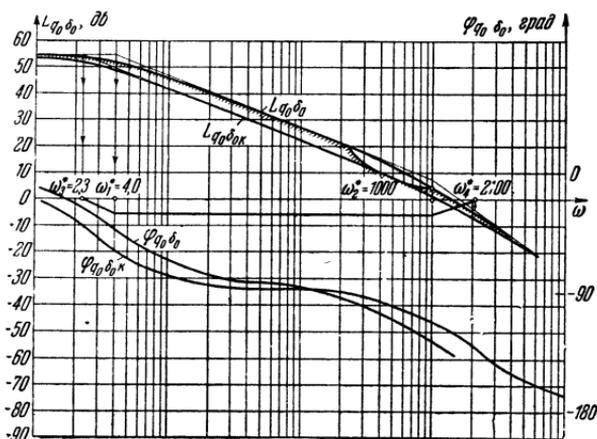


Рис. 6.10.

Поэтому синтезируем стабилизирующее устройство при $q_0 = 0,005$. Построения, необходимые для синтеза стабилизирующего устройства, приведены на рис. 6.10.

На рис. 6.9 приведена кривая $\bar{k}_{\text{пр}} = f(1/q)$ для синтезированной системы (кривая 2). Передаточная функция последовательного корректирующего устройства, при котором в рассмотренной системе переходные процессы будут иметь степень устойчивости не менее $\delta_0 = 6$, имеет следующий вид:

$$K_k(p) = \frac{(T_{1к}p + 1)(T_{2к}p + 1)}{(T_{3к}p + 1)(T_{4к}p + 1)},$$

где

$$T_{1к} = \frac{1}{\omega_1^*} = 0,25 \text{ сек}, \quad T_{2к} = \frac{1}{\omega_2^*} = 0,001 \text{ сек},$$

$$T_{3к} = \frac{1}{\omega_3^*} = \frac{1}{2,3} \text{ сек}, \quad T_{4к} = \frac{1}{\omega_4^*} = \frac{1}{2100} \text{ сек},$$

причем при данном корректирующем устройстве и при $\delta_0 = 6$ предельное значение коэффициента усиления $\bar{k}_{\text{пр max}} = 53 \text{ дБ}$, что больше требуемого по условиям задачи коэффициента усиления $\bar{k}_{\text{пр. тр}} = 45 \text{ дБ}$.

§ 4. Оценка качества в абсолютно устойчивых нелинейных системах

Нелинейная система (см. рис. 1.42), которая в результате эквивалентного преобразования приведена к виду, показанному на рис. 1.43 и 1.44, полностью характеризуется следующим нелинейным интегральным уравнением:

$$x(t) = f_{\text{н}}^0(t) - f_{\text{н}}^{\text{н}}(t) - \int_0^t h'_{\text{н}}(t - \lambda) \Phi_{\text{н}}(\lambda) d\lambda, \quad (6.20)$$

где $x(t)$ — входная величина нелинейного элемента $f_{\text{н}}^0(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F_0(p)}{1 + rK_{\text{л. ч}}(p)} \right\}$ — ограниченное внешнее воздействие (после эквивалентного преобразования); $F_0(p) = \mathcal{L} \{f_0(t)\}$ — изображение по Лапласу ограниченного внешнего воздействия (до эквивалентного преобразования); $f_{\text{н}}^{\text{н}}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F_{\text{н}}(p)}{1 + rK_{\text{л. ч}}(p)} \right\}$ — исчезающее внешнее воздействие (после эквивалентного преобразования); $F_{\text{н}}(p) = \mathcal{L} \{f_{\text{н}}(t)\}$ — внешнее воздействие, которое обусловлено ненулевыми начальными условиями;

$h'_n(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K_{л.ч}(p)}{1+rK_{л.ч}(p)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \{K_{л.ч}(p)\}$ — импульсная характеристика преобразованной устойчивой линейной части системы; $y_n(t) = \Phi_n[x(t)]$ — нелинейная характеристика преобразованной системы.

Если нелинейный элемент с характеристикой $\Phi(x)$ заменить на линейный с коэффициентом k , то получим

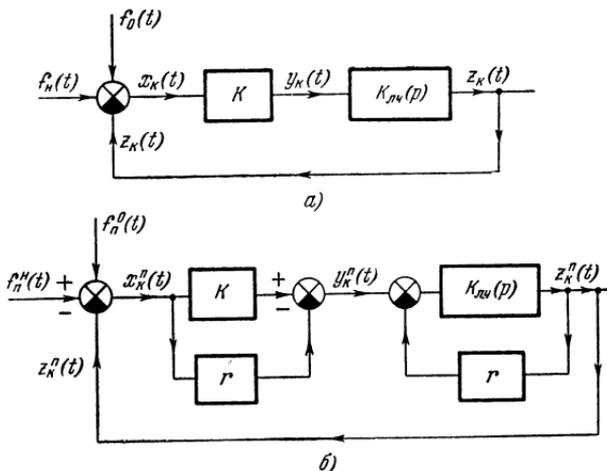


Рис. 6.11

линеаризованную систему на рис. 6.11, а с координатами x_n , y_n , z_n , либо преобразованную линеаризованную систему на рис. 6.11, б. В случае замены нелинейного элемента линейным с коэффициентом r получим линеаризованную систему с координатами x_r , y_r , z_r .

Если преобразованная нелинейная система абсолютно устойчива и обладает заданной степенью устойчивости $\delta_0 > 0$ (см. формулу (6.16)), то для всех $\omega \geq 0$ должно выполняться неравенство

$$\operatorname{Re} \left[\frac{K_{л.ч}(j\omega - \delta_0)}{1+rK_{л.ч}(j\omega - \delta_0)} \right] + \frac{1}{k-r} \geq \Delta > 0, \quad (6.21)$$

а производная нелинейной характеристики $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ должна

принадлежать полосе (r, k) , т. е. $r < \frac{\partial \Phi}{\partial x} < k$, причем

$$K_{л. ч}^{\Pi}(j\omega - \delta_0) = \frac{K_{л. ч}(j\omega - \delta_0)}{1 + rK_{л. ч}(j\omega - \delta_0)} \quad (6.22)$$

имеет все полюсы, лежащие в левой комплексной полуплоскости, т. е. соответствует устойчивой линейной части системы.

В предыдущих разделах при выводе неравенства (6.16) отмечалось, что степень устойчивости δ_0 является относительной мерой быстроты затухания переходного процесса.

Далее будут получены соотношения (см. Р. Ивенс [1]), которые в случае выполнения неравенства (6.21) позволяют оценить показатели качества — значение перерегулирования σ и время регулирования $t_{р.н.}$. В том случае, когда в нелинейной системе устанавливаются вынужденные движения, полученные соотношения позволяют оценивать также некоторые параметры вынужденной составляющей.

1. Вывод соотношений для оценки показателей качества переходных процессов. Для получения соотношений, позволяющих оценить показатели качества переходных процессов, запишем интегральное уравнение преобразованной нелинейной системы в следующем виде:

$$x(t) = f_{\Pi}^0(t) - f_{\Pi}^{\Pi}(t) - \int_0^t e^{\delta_0(t-\lambda)} h'_{\Pi}(t-\lambda) e^{-\delta_0(t-\lambda)} y_{\Pi}(\lambda) d\lambda, \quad (6.23)$$

где δ_0 — заданная степень устойчивости. Используя интегральное уравнение (6.23) и неравенство Шварца — Буняковского, получим:

$$\begin{aligned} f_{\Pi}^0(t) - f_{\Pi}^{\Pi}(t) - e^{\delta_0 t} \left[\int_0^t e^{2\delta_0 \lambda} y_{\Pi}^2(\lambda) d\lambda \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \left[\int_0^t e^{2\delta_0 \lambda} h_{\Pi}'^2(\lambda) d\lambda \right]^{\frac{1}{2}} \leq x(t) \leq f_{\Pi}^0(t) - f_{\Pi}^{\Pi}(t) + \\ + e^{\delta_0 t} \left[\int_0^t e^{2\delta_0 \lambda} y_{\Pi}^2(\lambda) d\lambda \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^t e^{2\delta_0 \lambda} h_{\Pi}'^2(\lambda) d\lambda \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6.24) \end{aligned}$$

Из основной леммы, установленной А. Р. Бергенном, Р. П. Ивенсом и А. Дж. Ральтом [1], следует, что если преобразованная нелинейная система абсолютно устойчива и имеет степень устойчивости $\delta = \delta_0$, то для всех $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$\left[\int_0^t e^{2\delta_0 \lambda} y_{\Pi}^2(\lambda) d\lambda \right]^{\frac{1}{2}} \leq \Delta^{-1} \left\{ \int_0^t e^{2\delta_0 \lambda} [f_{\Pi}^0(\lambda) - f_{\Pi}^H(\lambda)]^2 d\lambda \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Используя последнее неравенство и вводя обозначение $p_{\Pi}(\delta_0, \Delta, t) =$

$$= \Delta^{-1} \left[\int_0^t e^{2\delta_0 \lambda} h_{\Pi}^2(\lambda) d\lambda \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^t e^{-2\delta_0(t-\lambda)} f_{\Pi}^2(\lambda) d\lambda \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (6.25)$$

где $f_{\Pi}(t) = f_{\Pi}^0(t) - f_{\Pi}^H(t)$, неравенство (6.24) можно переписать в следующем виде:

$$f_{\Pi}(t) - p_{\Pi}(\delta_0, \Delta, t) \leq x(t) \leq f_{\Pi}(t) + p_{\Pi}(\delta_0, \Delta, t). \quad (6.26)$$

Функцию $p_{\Pi}(\delta_0, \Delta, t)$ назовем *функцией штрафа*.

Полученное неравенство (6.26) позволяет определить функции времени, ограничивающие сверху и снизу переходный процесс на входе нелинейного элемента, т. е. определить *мажоранту и миноранту*, зная которые, не представляет труда оценить качество системы. Аналогичное неравенство можно получить для оценки переходного процесса на выходе нелинейной системы $z(t)$.

В связи с тем, что $x(t) = x_{\Pi}(t)$, можно записать, что $x(t) = f(t) - z(t)$, где $f(t) = f_0(t) - f_{\Pi}(t)$. Кроме того, нетрудно показать, что $f_{\Pi}(t) = x_r(t)$, где $x_r(t)$ — ошибка в линеаризованной системе, полученной в результате замены нелинейного элемента с характеристикой $\Phi(x)$ линейным с коэффициентом r .

Используя эти соотношения, получим

$$f(t) - x_r(t) - p_{\Pi}(\delta_0, \Delta, t) \leq z(t) \leq f(t) - x_r(t) + p_{\Pi}(\delta_0, \Delta, t).$$

Кроме того, $z_r(t) = f(t) - x_r(t)$, поэтому

$$z_r(t) - p_{\Pi}(\delta_0, \Delta, t) \leq z(t) \leq z_r(t) + p_{\Pi}(\delta_0, \Delta, t), \quad (6.27)$$

где

$$z_r(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F(p) r K_{л.ч}(p)}{1 + r K_{л.ч}(p)} \right\},$$

$$F(p) = F_o(p) - F_n(p) = \mathcal{L} \{f(t)\},$$

$$F_o(p) = \mathcal{L} \{f_o(t)\},$$

$$F_n(p) = \mathcal{L} \{f_n(t)\},$$

или

$$|z(t) - z_r(t)| \leq p_n(\delta_0, \Delta, t).$$

Как следует из неравенства (6.27), для нахождения мажоранты $z_r(t) + p_n(\delta_0, \Delta, t)$ и миноранты $z_r(t) - p_n(\delta_0, \Delta, t)$ переходного процесса $z(t)$ в нелинейной системе надо вычислить переходный процесс в линеаризованной системе $z_r(t)$ и функцию штрафа $p_n(\delta_0, \Delta, t)$.

Для вычисления $p_n(\delta_0, \Delta, t)$ необходимо предварительно определить численное значение параметра Δ , импульсную характеристику преобразованной системы

$$h'_n(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K_{л.ч}(p)}{1 + r K_{л.ч}(p)} \right\} \quad (6.28)$$

и преобразованное внешнее воздействие

$$\hat{f}_n(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F_o(p) - F_n(p)}{1 + r K_{л.ч}(p)} \right\}.$$

Зная мажоранту и миноранту переходного процесса $z(t)$, не представляет труда определить качество системы. В этом заключается существо данного метода. Нетрудно показать, что при $(k-r) \rightarrow 0$ $\Delta \rightarrow \infty$ и тогда для всех $t \geq 0$ функция штрафа равна $p_n(\delta_0, \Delta, t)$ и, следовательно, $z(t) \rightarrow z_r(t)$.

2. Определение параметра Δ . Численное значение Δ существенно влияет на оценку переходного процесса и может быть определено в результате простых геометрических построений.

Воспользуемся неравенством (6.21) и введем обозначение

$$K_{л.ч}(j\omega - \delta_0) = U_{л.ч \delta_0}(\omega) + jV_{л.ч \delta_0}(\omega).$$

Тогда после элементарных преобразований получим

$$1 + [r + k - 2\Delta kr - 2\Delta r^2] U_{л.ч \delta_0} + r[k - r\Delta(k-r)] [U_{л.ч \delta_0}^2 + V_{л.ч \delta_0}^2] \leq \Delta(k-r). \quad (6.29)$$

Пусть

$$k - r\Delta(k - r) > 0 \quad \text{и} \quad r > 0.$$

При этом выражение (6.29) можно преобразовать к следующему виду:

$$\left[U_{\text{л. ч } \delta_0}(\omega) + \frac{1}{2} \frac{r + k - 2r\Delta(k - r)}{kr - r^2\Delta(k - r)} \right]^2 + V_{\text{л. ч } \delta_0}^2(\omega) \geq \left[\frac{1}{2} \frac{r - k}{kr - r^2\Delta(k - r)} \right]^2. \quad (6.30)$$

Если в (6.30) заменить знак неравенства на равенство, то для фиксированных k и r получим уравнение семейства окружностей

$$\left[U_{\text{л. ч } \delta_0}(\omega) - U_0 \right]^2 + V_{\text{л. ч } \delta_0}^2(\omega) = R_\Delta^2 \quad (6.31)$$

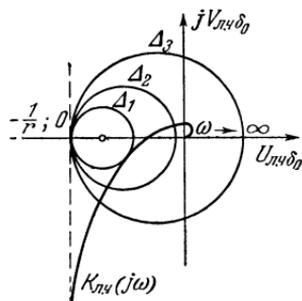


Рис. 6.12.

с радиусом R_Δ и центром в точке $(U_0, 0)$, где

$$R_\Delta = \frac{1}{2} \frac{r - k}{kr - r^2\Delta(k - r)},$$

$$U_0 = -\frac{1}{2} \frac{r + k - 2r\Delta(k - r)}{kr - r^2\Delta(k - r)}.$$

Координаты точек пересечения окружностей с осью абсцисс равны

$$U_{\text{л. ч } \delta_{01}} = -\frac{1}{r}, \quad U_{\text{л. ч } \delta_{02}} = -\left\{ \frac{1 - \Delta(k - r)}{k - r\Delta(k - r)} \right\}.$$

Заметим, что $U_{\text{л. ч } \delta_{01}}$ не зависит от Δ . Семейство окружностей изображено на рис. 6.12. Каждой окружности соответствует свое значение параметра Δ .

При этом $\Delta_1 > \Delta_2 > \Delta_3 > \dots$.

Для выполнения условия (6.30) при $r > 0$ и некотором значении Δ кривая $K_{\text{л. ч } \delta_0}(j\omega)$ должна лежать вне окружностей.

Значение Δ определяется из условия касания кривой $K_{\text{л. ч } \delta_0}(j\omega)$ окружности с соответствующим значением Δ .

В том случае, если $k - r\Delta(k - r) < 0$, можно получить другое семейство окружностей

Можно показать, что при $r < 0$ для выполнения условия (6.30) $K_{л.ч \delta_0}(j\omega)$ должна лежать внутри соответствующей Δ окружности (рис. 6.13).

Если вместо характеристики $K_{л.ч \delta_0}(j\omega)$ рассматривать частотную характеристику линеаризованной системы $rK_{л.ч \delta_0}(j\omega)$, получаемую в результате замены $\Phi(x) = rx$, то в этом случае вместо окружностей (6.31) следует рассматривать окружности с центром на оси $rU_{л.ч \delta_0}$ и радиусом $R_\Delta = \frac{1}{2} \frac{r-k}{kr - r^2\Delta(k-r)}$. При этом точки пересечения этих окружностей с осью абсцисс будут

$$rU_{л.ч \delta_{01}} = -1,$$

$$rU_{л.ч \delta_{02}} = -r \left[\frac{1 - \Delta(k-r)}{k - r\Delta(k-r)} \right].$$

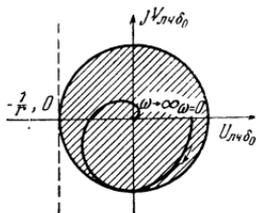


Рис. 6.13.

3. Определение численного значения Δ с использованием логарифмических частотных характеристик линейной части системы. В связи с тем, что в большинстве случаев построение логарифмических частотных характери-

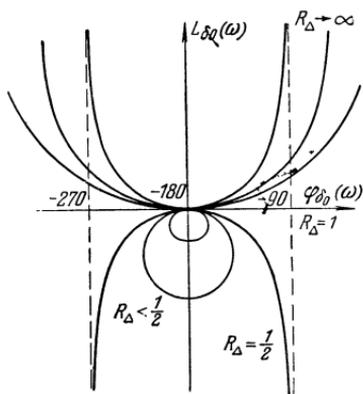


Рис. 6.14.

стик линейной части системы менее трудоемко по сравнению с построением частотной характеристики $rK_{л.ч \delta_0}(j\omega)$, рассмотрим способ, позволяющий определить численные значения Δ на основе логарифмических частотных характеристик. Поэтому отобразим семейство окружностей радиуса R_Δ , проходящих через точку $(-1; 0)$ плоскости $rK_{л.ч \delta_0}(j\omega)$, на плоскость логарифмической частотной характеристики в декартовой системе координат

$L_{\delta_0}, \varphi_{\delta_0}$. Каждому значению R_Δ будет соответствовать некоторая кривая на плоскости $L_{\delta_0}, \varphi_{\delta_0}$ (рис. 6.14). Зная значения R_Δ , а следовательно, и $rU_{л.ч \delta_{02}}$, а

также k и r , нетрудно определить соответствующее каждой кривой (окружности) значение Δ :

$$\Delta = \frac{rU_{\text{л. ч}} \delta_{02}(k+1)}{(r+1)(k-r)}. \quad (6.32)$$

Значение Δ определяется из условия касания кривой $L_{\delta_0} = Q[\varphi_{\delta_0}]$ (рис. 6.15) соответствующей Δ -кривой на плоскости $L_{\delta_0}, \varphi_{\delta_0}$. Следует отметить, что при исследовании качества переходных процессов в нелинейной системе, линейная часть которой нейтральна, имеет смысл рассматривать Δ -кривые лишь для $0 < R_{\Delta} < \frac{1}{2}$ при

$$k - k\Delta(k-r) > 0.$$

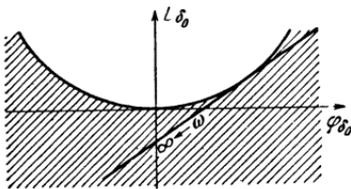


Рис. 6.15.

Δ -кривые при $R_{\Delta} \gg \frac{1}{2}$ имеет смысл рассматривать при $k - r\Delta(k-r) < 0$ для нелинейных систем с устойчивой линейной частью, так как в этом случае соответствующее значение Δ определяется из условия касания соответствующей Δ -окружности изнутри.

4. Пример оценки переходного процесса в нелинейной системе. В качестве примера оценки переходного процесса рассмотрим нелинейную следящую систему, линейная часть которой имеет передаточную функцию

$$K_{\text{л. ч}}(p) = \frac{1}{p(p+1)},$$

а нелинейная характеристика и ее производная принадлежат соответственно сектору (полосе) (r, k) , где $r = 0,5$; $k = 1,0$. Ко входу системы приложено единичное внешнее воздействие $f_0(t) = 1(t)$. Для данной системы найдем функции времени, ограничивающие сверху и снизу переходный процесс на выходе нелинейной системы.

1. Построим частотные характеристики линейной части системы при $\delta_0 = 0$

$$K_{\text{л. ч}}(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)}$$

и при $\delta_0 = 0,25$

$$K_{л. ч}(\delta_0, j\omega) = \frac{1}{(j\omega - 0,25)(j\omega + 0,75)}.$$

На рис. 6.16 приведены частотные характеристики при $\delta_0 = 0$ и $\delta_0 \neq 0$ с нанесенными на плоскости $K_{л. ч}(j\omega)$

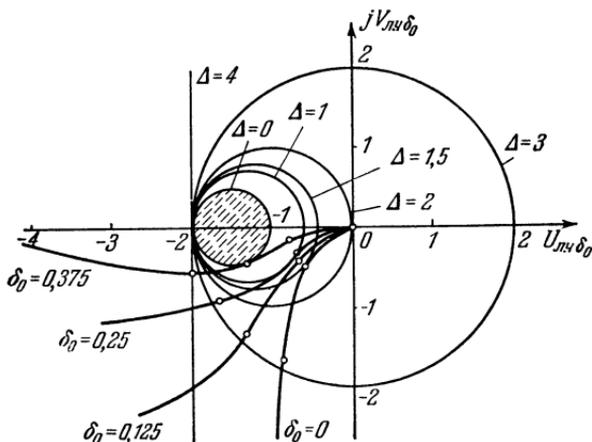


Рис. 6.16.

Δ -окружностями. Из приведенных построений следует, что при $\delta_0 = 0$ и $\Delta = 1,5$ и при $\delta_0 = 0,25$ $\Delta = 1,0$.

2. Для данной системы можно записать следующие неравенства, из которых можно определить функции времени, ограничивающие переходный процесс на выходе нелинейной системы сверху и снизу:

$$z_r(t) - p_n(0; 1,5; t) \leq z(t) \leq z_r(t) + p_n(0; 1,5; t);$$

$$z_r(t) - p_n(0,25; 1,0; t) \leq z(t) \leq z_r(t) + p_n(0,25; 1,0; t);$$

где $z_r(t)$ — переходный процесс на выходе линеаризованной системы (рис. 6.17)

$$z_r(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{r}{p(p^2 + p + 2)} \right\} = 2 + \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-\frac{t}{2}} \sin(0,5t - 45^\circ).$$

Вид функции штрафа $p_n(\delta_0, \Delta, t)$ при $\delta_0 = 0$ и $\delta_0 = 0,25$ может быть найден, если известны значения Δ , а также

$$h'_n(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2 + p + 2} \right\} = 2e^{-\frac{t}{2}} \sin \frac{t}{2}$$

и

$$f_{\Pi}^0(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p^2 + p}{p(p^2 + p + r)} \right\} = 2e^{-\frac{t}{2}} \sin \left(\frac{t}{2} + 45^\circ \right).$$

Подставляя найденные выражения для $h_{\Pi}'(t)$ и $f_{\Pi}^0(t)$ в (6.25) для $p_{\Pi}(\delta_0, \Delta, t)$, получим

$$p_{\Pi}(0, 25; 1, 0; t) = \left[\int_0^t e^{0,5\lambda} h_{\Pi}'^2(\lambda) d\lambda \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^t e^{-0,5(t-\lambda)} f_{\Pi}^{02}(\lambda) d\lambda \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$p_{\Pi}(0, 1, 5; t) = \frac{2}{3} \left[\int_0^t h_{\Pi}'^2(\lambda) d\lambda \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^t f_{\Pi}^{02}(\lambda) d\lambda \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Значения функций штрафа при разных значениях t прибедены в табл. 4 и 5. Вычислив функции штрафа и

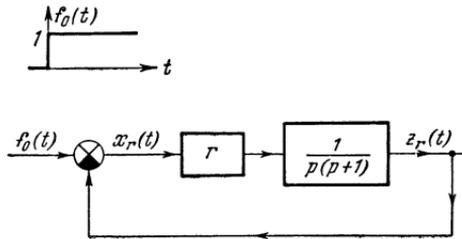


Рис. 6.17.

$z_r(t)$, строим миноранты и мажоранты переходного процесса на выходе нелинейной системы при $\delta_0 = 0$ и $\delta_0 = 0,25$.

Таблица 4

Вычисление значений функции штрафа $p_{\Pi}(0; 1,5; t)$
для $\delta_0 = 0$ и $\Delta = 1,5$

t	$\left[\int_0^t h_{\Pi}'^2(\lambda) d\lambda \right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[\int_0^t f_{\Pi}^{02}(\lambda) d\lambda \right]^{\frac{1}{2}}$	$p_{\Pi}(0; 1,5; t)$
0	0	0	0
0,5π	0,610	1,090	0,443
1,0π	0,938	1,220	0,760
1,5π	0,995	1,223	0,814
2,0π	1,000	1,225	0,817
2,5π	1,000	1,225	0,817
3,0π	1,000	1,225	0,817
∞	1,000	1,225	0,817

Таблица 5

Вычисление значений функции штрафа $p_{\Pi}(0,25; 1,0; t)$ для $\delta_0 = 0,25$ и $\Delta = 1,0$

t	$\left[\int_0^t h_{\Pi} r^2(\lambda) d\lambda \right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[\int_0^t \dot{f}_{\Pi}^{0,2}(\lambda) d\lambda \right]^{\frac{1}{2}}$	$p_{\Pi}(0,25; 1,0; t)$
0	0	0	0
0,5 π	0,825	0,880	0,725
1,0 π	1,480	0,732	1,085
1,5 π	1,728	0,489	0,845
2,0 π	1,752	0,328	0,575
2,5 π	1,756	0,235	0,412
3,0 π	1,777	0,150	0,266
4,0 π	1,786	0,075	0,134
5,0 π	1,789	0,033	0,055
∞	1,789	0,000	0,000

На рис. 6.18 изображены мажоранты и миноранты при $\delta_0=0$ и $\delta_0=0,25$ и их соответствующая комбинация, что отмечено штриховкой.

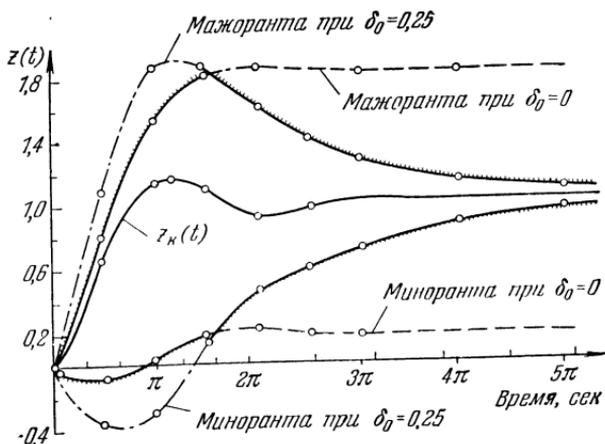


Рис. 6.18.

Таким образом, переходный процесс на выходе нелинейной системы будет лежать внутри комбинированных мажоранты и миноранты. Из рис. 6.18 следует

также, что время регулирования*) в нелинейной системе $t_{р.н} \leq 5\pi$ сек. Аналогично можно оценить и перерегулирование. На рис. 6.18 для сравнения изображен переходный процесс в линеаризованной системе при $\Phi(x) = x$, т. е. при $k=1$ и единичном скачкообразном входном воздействии.

§ 5. Интегральные квадратичные оценки переходных процессов в нелинейных системах автоматического управления

Наряду с использованием для оценки качества переходных процессов в нелинейных системах понятия степени устойчивости можно также использовать интегральные квадратичные оценки.

При этом с успехом могут быть использованы хорошо разработанные А. А. Красовским и А. А. Фельдбаумом методы определения интегральных квадратичных оценок для линейных систем автоматического управления.

1. Интегральная квадратичная оценка в нелинейной системе с абсолютно устойчивыми процессами.

Выражение для интегральной квадратичной оценки. Рассмотрим нелинейную систему с одним нелинейным элементом, на которую действует ограниченное внешнее воздействие $f_n^0(t)$. Допустим, что процессы в рассматриваемой нелинейной системе абсолютно устойчивы, т. е. отклонение от процесса $\xi(t)$, вызванное исчезающим внешним воздействием $f_n^0(t)$, удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0. \quad (6.33)$$

Это означает, что эквивалентная нелинейная система с нестационарным нелинейным элементом $\Psi_n[\xi(t), t]$ обладает абсолютно устойчивым положением равновесия. Поэтому

$$\operatorname{Re} K_{л.ч}^n(j\omega) + \frac{1}{k-r} \geq 0 \quad (6.34)$$

*) Под временем регулирования $t_{р.н}$ понимается время, необходимое для того, чтобы для всех значений $t > t_{р.н}$

$$|z(t) - z_{уст}| \leq 0,05z_{уст},$$

где $z_{уст}$ — установившееся значение $z(t)$.

для всех $\omega \geq 0$,

$$r < \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} < k, \quad (6.35)$$

либо

$$r < \frac{\Psi[\xi(t); t]}{\xi(t)} < k. \quad (6.36)$$

Обозначим

$$\sup \frac{\Psi[\xi(t); t]}{\xi(t)} = s_{\max} - r, \quad (6.37)$$

$$\inf \frac{\Psi[\xi(t); t]}{\xi(t)} = s_{\min} - r, \quad (6.38)$$

где s_{\max} , s_{\min} — максимальное и минимальное значения крутизны лучей $s_{\max}\xi$ и $s_{\min}\xi$, внутри которых расположена характеристика $\Psi[\xi(t); t]$ для любого t (рис. 6.19),

либо максимальное и минимальное значения полосы (s_{\max}, s_{\min}) , внутри которой расположена производная

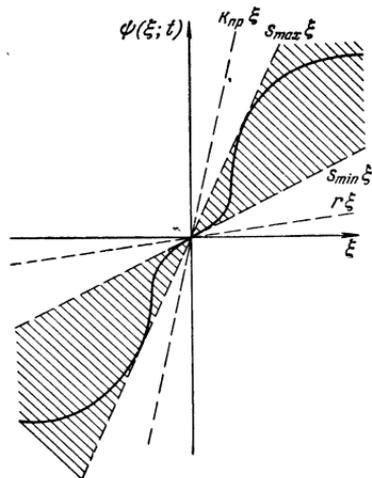


Рис. 6.19.

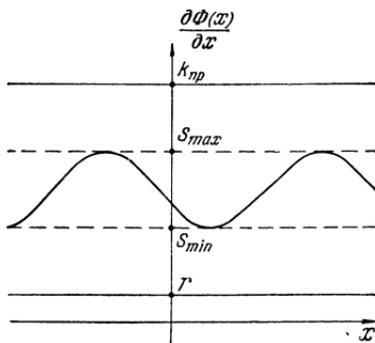


Рис. 6.20.

нелинейной характеристики $\partial\Phi/\partial x$ (рис. 6.20). При этом s_{\min} может определяться в зависимости от максимального значения установившейся ошибки, которое, например, в случае релейных систем можно определить на основе методики анализа вынужденных движений, изложенной в монографии Я. З. Цыпкина [8], а также далее в гл. VII.

Для определения квадратичных оценок воспользуемся неравенством:

$$\int_0^T \Psi [\xi(t); t] \left[\xi(t) - \frac{\Psi [\xi(t); t]}{k_{\text{нп}} - r} \right] dt \leq \int_0^T \Psi [\xi(t); t] f_{\text{н}}^{\text{н}}(t) dt, \quad (6.39)$$

где $T > 0$, которое можно получить из уравнения (2.30) (см. Б. Н. Наумов, Я. З. Цыпкин [1]). Левую часть неравенства (6.39) с учетом (6.38) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_0^T \Psi^2 [\xi(t); t] \left[\frac{\xi(t)}{\Psi [\xi(t); t]} - \frac{1}{k_{\text{нп}} - r} \right] dt &\leq \\ &\leq \left[\frac{1}{s_{\text{max}} - r} - \frac{1}{k_{\text{нп}} - r} \right] \int_0^T \Psi^2 [\xi(t); t] dt. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Правую часть неравенства (6.39) на основании неравенства Коши — Буняковского представим в виде:

$$\int_0^T \Psi [\xi(t); t] f_{\text{н}}^{\text{н}}(t) dt \leq \sqrt{\int_0^T \Psi^2 [\xi(t); t] dt \int_0^T [f_{\text{н}}^{\text{н}}(t)]^2 dt},$$

а

$$\int_0^T \Psi^2 [\xi(t); t] dt = \sqrt{\int_0^T \Psi^2 [\xi(t); t] dt \int_0^T \Psi^2 [\xi(t); t] dt}. \quad (6.41)$$

Тогда с учетом (6.40), (6.41) неравенство (6.39) можно представить как

$$\sqrt{\int_0^T \Psi^2 [\xi(t); t] dt} \leq \frac{(s_{\text{max}} - r)(k_{\text{нп}} - r)}{k_{\text{нп}} - s_{\text{max}}} \sqrt{\int_0^T [f_{\text{н}}^{\text{н}}(t)]^2 dt}. \quad (6.42)$$

Учитывая также, что

$$\Psi^2 [\xi(t); t] = \xi^2(t) \left\{ \frac{\Psi [\xi(t); t]}{\xi^2(t)} \right\}^2 \geq \xi^2(t) (s_{\text{min}} - r)^2, \quad (6.43)$$

и устремляя T к бесконечности, окончательно получим

$$\sqrt{\int_0^{\infty} \xi^2(t) dt} \leq \frac{(s_{\max} - r)(k_{\text{пр}} - r)}{(k_{\text{пр}} - s_{\max})(s_{\min} - r)} \sqrt{\int_0^{\infty} [f_{\text{п}}^{\text{H}}(t)]^2 dt}, \quad (6.44)$$

или

$$J_{20} = \int_0^{\infty} \xi^2(t) dt \leq \frac{(s_{\max} - r)^2 (k_{\text{пр}} - r)^2}{(k_{\text{пр}} - s_{\max})^2 (s_{\min} - r)^2} \int_0^{\infty} [f_{\text{п}}^{\text{H}}(t)]^2 dt. \quad (6.45)$$

Для вычисления правой части неравенства (6.45) можно воспользоваться, например, известным соотношением

$$\int_0^{\infty} [f_{\text{п}}^{\text{H}}(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_{\text{п}}^{\text{H}}(j\omega)|^2 d\omega, \quad (6.46)$$

где

$$F_{\text{п}}^{\text{H}}(j\omega) = \int_0^{\infty} f_{\text{п}}^{\text{H}}(t) e^{-j\omega t} dt,$$

а также аналитическими выражениями для интегральной квадратичной оценки через коэффициенты изображения по Лапласу исчезающего внешнего воздействия, действующего на входе нелинейного элемента $y = \Phi(x)$ (см. приложение 5). Методика получения изображения по Лапласу исчезающего внешнего воздействия $F_{\text{п}}^{\text{H}}(p)$ была изложена в гл. I.

Представляет интерес также метод В. Ф. Яроминика [1, 2, 3], позволяющий вычислять интегральные квадратичные оценки на основе использования так называемых понятий — равномерного запаса устойчивости по Раусу и Гурвитцу.

Вычисление интегральных квадратичных оценок по методу В. Ф. Яроминика. Полученное выше выражение позволяет вычислять верхнее значение интегральной

квадратичной оценки в нелинейной системе через интегральную квадратичную оценку

$$J'_{20} = \int_0^{\infty} [f_{\Pi}^H(t)]^2 dt. \quad (6.47)$$

Из (6.45) следует, что интегральная квадратичная оценка J_{20} будет тем меньше, чем меньше J'_{20} . Поэтому следует выбирать параметры линейной части системы таким образом, чтобы оценка J'_{20} принимала минимальные значения.

Для нахождения минимальных значений J'_{20} надо выбирать интересующие нас параметры, исходя из следующих соотношений:

$$\frac{\partial J'_{20}}{\partial \alpha_1} = 0, \dots, \frac{\partial J'_{20}}{\partial \alpha_l} = 0, \quad (6.48)$$

где α_i — параметры линейной части системы, которые изменяются из условия минимума интегральной квадратичной оценки.

Однако подобный подход для систем выше третьего порядка связан с большими трудностями.

В ряде случаев минимальное значение интегральной квадратичной оценки J'_{20} может быть довольно просто вычислено при помощи метода, предложенного В. Ф. Яроминком.

Понятие равномерного запаса устойчивости по Раусу и Гурвицу. Как уже было отмечено выше, в результате проведенного преобразования линейная часть системы всегда устойчива и, следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_{\Pi}^H(t) = 0.$$

При этом линейная часть системы обладает некоторым запасом устойчивости, который можно оценивать по величине определителей Гурвитца или элементов первого столбца Рауса, составленных для характеристического уравнения линейной части системы:

$$G(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (6.49)$$

Назовем, следуя В. Ф. Яроминку, *равномерным запасом устойчивости по Гурвитцу* тот случай, когда все определители Гурвитца, соответствующие нормированному характеристическому уравнению (т. е. уравнению (6.49), в котором $a_0 = a_n = 1$), положительны и равны между собой:

$$a_s = a_1 > 0, \quad s = 1; 2; \dots, n. \quad (6.49a)$$

В. Ф. Яроминек показал, что если выполнены условия (6.49a), то все коэффициенты характеристического уравнения для любого n однозначно определяются через коэффициент $a_1 > 0$. Такое уравнение автор назвал *уравнением равномерного запаса устойчивости* в смысле критерия Гурвитца или уравнением $\Gamma(p) = 0$.

Значения коэффициентов уравнения $\Gamma(p) = 0$ для $n = 1, 2, \dots, 10$ приведены в табл. 6.

Аналогичным образом назовем *равномерным запасом устойчивости в смысле алгоритма Рауса* случай, когда все элементы первого столбца Рауса, соответствующие нормированному характеристическому уравнению, положительны и равны между собой. Будучи выражено через определители Гурвитца, условие равномерного запаса устойчивости в смысле алгоритма Рауса принимает следующий вид:

$$\Delta_s = a_1^s > 0, \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad (6.50)$$

$$a_1 \Delta_{n-1} = \Delta_n, \quad (6.51)$$

т. е. все определители Гурвитца Δ_s ($s = 1, 2, \dots$), соответствующие нормированному характеристическому уравнению, составляют геометрическую прогрессию, где знаменателем прогрессии является показатель запаса устойчивости a_1 .

В случае выполнения условия (6.49a) коэффициенты характеристического уравнения, обладающего равномерным запасом устойчивости в смысле алгоритма Рауса, могут быть однозначно выражены через показатель запаса устойчивости $a_1 > 0$ (см. табл. 7).

Связь нормированной интегральной квадратичной оценки с равномерным запасом устойчивости по Гурвит-

Таблица 7

Коэффициенты характеристического уравнения,
обладающего равномерным запасом устойчивости
в смысле алгоритма Рауса

$n \backslash a_i$	2	3	4	5
a_0	1	1	1	1
a_1	$a_1 + \frac{1}{a_1}$	$a_1 + \frac{1}{a_1} + 1$	$a_1 + \frac{1}{a_1} + 2$	$a_1 + \frac{1}{a_1} + 3$
a_2	1	$1 + a_1$	$1 + 2a_1$	$1 + 3a_1$
a_3		1	$1 + a_1 + \frac{1}{a_1}$	$2 + 2a_1 + \frac{2}{a_1}$
a_4			1	$2 + a_1$
a_5				1

цу и Рауса. Выражение для нормированной интегральной квадратичной оценки, которую в дальнейшем мы будем обозначать \bar{J}'_{20} , можно записать в следующем виде:

$$\bar{J}'_{20} = \frac{J'_{20}}{C_{\text{H}}^2 \sqrt[n]{\frac{a_0}{a_n}}} = \frac{\int_0^{\infty} [f_{\text{H}}^{\text{H}}(t)]^2 dt}{C_{\text{H}}^2 \sqrt[n]{\frac{a_0}{a_n}}}, \quad (6.52)$$

где $C_{\text{H}} = \frac{B_{n-1}}{a_n}$ — отношение младших коэффициентов изображения по Лапласу для $f_{\text{H}}^{\text{H}}(t)$, причем

$$\mathcal{L}\{f_{\text{H}}^{\text{H}}(t)\} = F_{\text{H}}^{\text{H}}(p) = \frac{B_0 p^{n-1} + B_1 p^{n-2} + \dots + B_{n-1}}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (6.53)$$

Например, если

$$F_{\text{H}}^{\text{H}}(p) = \frac{B_0}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}, \quad C_{\text{H}} = \frac{B_0}{a_n}. \quad (6.54)$$

Изображение $F_n^H(p)$ будем называть нормированным и обозначать его через $\bar{F}_n^H(p)$, если в (6.54) $B_0 = a_0 = a_n = 1$. Как показал В. Ф. Яроминек, в том случае, когда

$$\bar{F}_n^H(p) = \frac{1}{p^n + \dots + 1} \quad (6.55)$$

и выполняется условие равномерного запаса устойчивости в смысле критерия Гурвитца, нормированная интегральная квадратичная оценка \bar{J}'_{20} зависит только от величины равномерного запаса устойчивости a_1 и от степени характеристического уравнения

$$\bar{J}'_{20} = \frac{1}{2} \left[a_1 + \frac{1}{a_1} + n - 2 \right]. \quad (6.56)$$

Нетрудно показать, что минимум выражения (6.56) достигается для $a_1 = 1$ и, следовательно, в этом случае

$$\bar{J}'_{20} = \frac{n}{2}. \quad (6.57)$$

Следовательно, если система обладает равномерным запасом устойчивости в смысле критерия Гурвитца и $a_1 = 1$, то в этом случае минимум (6.56) будет представлять собой минимум-минимум нормированной интегральной квадратичной оценки, т. е.

$$\bar{J}'_{20 \min \min} = \frac{n}{2}. \quad (6.58)$$

Отметим, что минимум нормированной интегральной квадратичной оценки (6.52) получается для любой степени n при одном и том же значении параметра $a_1 = 1$, причем, как следует из (6.58), чем меньше степень n , тем меньше интегральная квадратичная оценка.

В. Ф. Яроминек также показал, что если изображение для $F_n^H(p)$ имеет вид (6.54), то характеристическое уравнение обладает равномерным запасом устойчивости в смысле критерия Рауса, а выражение для интегральной квадратичной оценки имеет тот же вид, что и в случае равномерного запаса устойчивости в смысле критерия Гурвитца, и следовательно, достигает минимума в той же самой точке. Это является подтверждением

того, что найденный минимум (6.56) является единственным.

Для того чтобы теперь выбрать те или иные параметры системы, исходя из минимума оценки \bar{J}'_{20} , следует:

1. Найти нормированное изображение по Лапласу для $\bar{F}_n^H(p)$.

2. Используя приведенные в табл. 6 или табл. 7 выражения для коэффициентов характеристического уравнения, приравнять их коэффициентам нормированного характеристического уравнения линейной части системы

$$\bar{G}(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + 1 = 0$$

и, положив $a_1 = 1$, решить полученную систему $(n-1)$ уравнений.

Если система из $(n-1)$ уравнений допускает единственное решение относительно того или иного параметра линейной части системы, то при этом значении параметра нормированная интегральная квадратичная оценка будет иметь минимальное значение.

В заключение отметим, что В. Ф. Яроминком получены выражения для интегральных квадратичных оценок для тех случаев, когда \bar{F}_n^H имеет и более общий вид.

2. Интегральная квадратичная оценка в нелинейной системе с абсолютно устойчивым положением равновесия. В 1961 г. В. М. Попов получил выражение для верхнего значения интегральной квадратичной оценки в нелинейной системе с абсолютно устойчивым положением равновесия. В данной работе не будем останавливаться на его выводе, так как он совершенно аналогичен выводу, приведенному в предыдущем разделе. Приведем лишь окончательное выражение, которое имеет следующий вид:

$$J_2 \leq \frac{k_{\text{пр}}^2 s_{\text{max}}}{(k_{\text{пр}} - s_{\text{max}})^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_n(j\omega)|^2 d\omega - \frac{2k_{\text{пр}} s_{\text{max}} q}{k_{\text{пр}} - s_{\text{max}}} \int_0^{x^{(0)}} \Phi(x) dx. \quad (6.59)$$

Первое слагаемое в (6.59), так же как и в предыдущем случае, определяется при помощи методов, развитых в линейной теории. Второе слагаемое представляет собой площадь, ограниченную нелинейной характеристикой при заданном начальном отклонении (рис. 6.21).

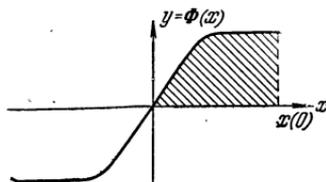


Рис. 6.21.

В заключение отметим, что найденные верхние значения интегральных квадратичных оценок очень грубые и во многих случаях дают завышенные результаты.

3. Примеры вычисления верхних значений интегральных квадратичных оценок в абсолютно устойчивых нелинейных системах. Рассмотрим примеры вычисления верхних значений интегральных квадратичных оценок только в нелинейных системах с абсолютно устойчивыми процессами.

Как следует из (6.59), вычисление верхних значений интегральных квадратичных оценок в нелинейных системах с абсолютно устойчивым положением равновесия отличается наличием лишь второго слагаемого, величина которого зависит от площади, ограниченной нелинейной характеристикой $\Phi(x)$.

Система автоматического регулирования скорости двигателя. Вычислим верхнее значение интегральной квадратичной оценки для абсолютно устойчивой системы автоматического регулирования скорости двигателя. В соответствии с найденным выражением (6.59) для вычисления верхнего значения необходимо знать интегральную квадратичную оценку для исчезающего внешнего воздействия, приведенного ко входу нелинейного элемента,

$$\int_0^{\infty} [f_{\Pi}^n(t)]^2 dt,$$

где в данном случае

$$\dot{f}_n^H(t) = u_{0H}(t),$$

$$\mathcal{L}\{u_{0H}(t)\} = U_{0H}(p) = u_{я0} \frac{T_B}{T_r} K_{л.ч}(p) + \frac{T_M \omega_0 (T_r p + 1) + T_r T_M \dot{\omega}_0}{k_{д\omega}} K_{д\omega}(p),$$

$$K_{д\omega}(p) = \frac{k_{д\omega}}{(T_M T_r p^2 + T_M p + 1)},$$

$$K_{л.ч}(p) = \frac{k_{л.ч}}{(T_B p + 1)(T_M T_r p^2 + T_M p + 1)},$$

$u_{я0}$ — начальное значение $u_{я}(t)$, ω_0 , $\dot{\omega}_0$ — начальное значение $\omega(t)$ и ее производной. Интегральная квадратичная оценка (6.59) вычисляется при помощи обычных методов, используемых в линейной теории.

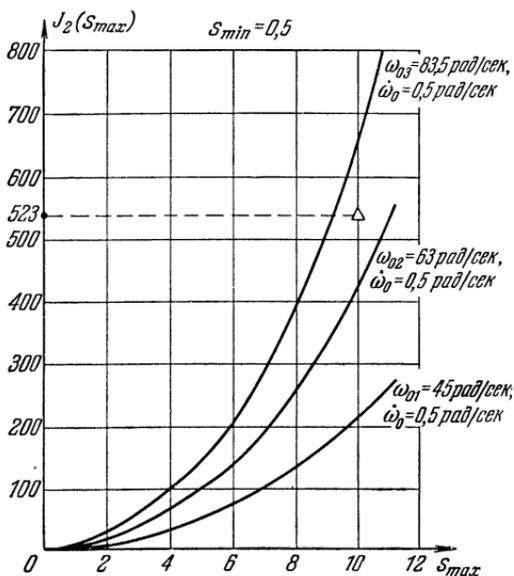


Рис. 6.22.

Вычислим верхнее значение интегральной квадратичной оценки J_2 для отклонения от вынужденного процесса $x(t)$, вызванного синусоидальным входным сигналом:

$$\dot{f}_0(t) = 10 \sin \omega_{вх} t.$$

При этом амплитуда установившегося сигнала ошибки равна $x_{\max} = 1,0$, т. е. $s_{\min} = 0,5$. На рис. 6.22 изображены три кривые $J_2 = J_2(s_{\max})$ для $\bar{k}_{\text{пр}} = 100$; $s_{\min} = 0,5$; $\omega_{01} = 45 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$; $\omega_{02} = 63 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$; $\omega_{03} = 83,5 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$; $\dot{\omega}_0 = 0,5 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$, построенные на основе (6.59). На рис. 6.22 нанесена

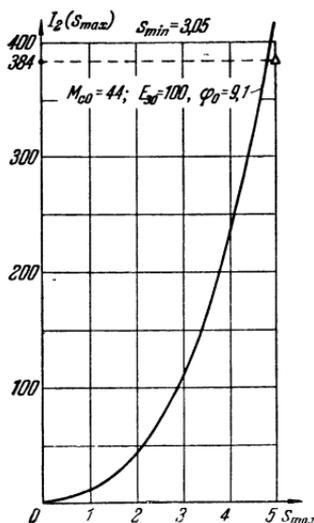


Рис. 6.23.

точка $J_2 = 523$, вычисленная на основе экспериментального исследования рассматриваемой нелинейной системы при $s_{\max} = 10$; $\omega_0 = 83,5 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$; $\dot{\omega}_0 = 0,5 \frac{\text{рад}}{\text{сек}^2}$ на электронной моделирующей установке. Для этого на вход системы подавалось синусоидальное воздействие и в некоторый момент времени, принятый за начало отсчета $t = 0$, прикладывалось исчезающее внешнее воздействие. Как следует из анализа полученных результатов, аналитическое выражение (6.59) в данном случае дает вполне удовлетворительные результаты.

Позиционная следящая система. В качестве второго примера вычислим верхнее значение

интегральной квадратичной оценки для абсолютно устойчивой позиционной следящей системы.

В этом случае

$$\mathcal{L}\{J_{\text{п}}^{\text{н}}(t)\} = \mathcal{L}\{u_{0\text{н}}(t)\} = \frac{E_{30}}{E_{\text{эм}}}\mathcal{K}_{\text{эм}}(p)\mathcal{K}_{\text{дф}}(p)k_{\text{р}}k_{\text{пр}2} + \\ + \left[\frac{M_{\text{с}0}(p) - \varphi_0(p)}{k_{\text{дф}}} - M_{\text{с}}(p) \frac{k_{\text{дмс}}}{k_{\text{дф}}}(T_{\text{я}}p + 1) \right] \mathcal{K}_{\text{дф}}(p)k_{\text{р}}k_{\text{пр}2},$$

где $\mathcal{K}_{\text{эм}}(p)$, $\mathcal{K}_{\text{дф}}(p)$, $M_{\text{с}0}(p)$, $\varphi_0(p)$ и $M_{\text{с}}(p)$ определяются выражениями, полученными ранее в гл. I.

На рис. 6.23 изображена кривая I_2 в функции от s_{\max} , вычисленная при $k_{\text{пр}} = 100$; $r = 2,44$; $E_{30} = 100$; $\varphi_0 = 9,1$; $M_{\text{с}0} = 44$; $s_{\min} = 3,05$; $x_{\max} = 1,52$. На этом же графике

изображено точное значение $I_2=384$, найденное экспериментально при $E_{30}=100$; $\varphi_0=9,1$; $M_{c0}=44$ на электронной моделирующей установке.

В заключение отметим, что если сравнить расчетные и экспериментальные (точные) значения I_2 , то и в данном случае они отличаются мало. При этом можно показать, что чем ближе будет значение s_{\max} к $k_{\text{пр}}$, тем больше будут отличаться расчетные значения оценки I_2 от точных (экспериментальных). При больших значениях $(k_{\text{пр}}-s_{\max})$ это отличие будет меньше. Об этом необходимо помнить при использовании полученной оценки в практических расчетах.

ГЛАВА VII

АВТОКОЛЕБАНИЯ И ВЫНУЖДЕННЫЕ ДВИЖЕНИЯ В РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Благодаря простоте конструкции и быстродействию релейные системы автоматического управления получили широкое практическое применение.

Исследованию динамики релейных систем со многими степенями свободы посвящено большое количество работ. Среди работ советских авторов здесь в первую очередь следует отметить работы П. В. Бромберга [3], Л. С. Гольдфарба [3, 4], Ю. В. Долголенко [1, 2], А. И. Лурье [3—8], Ю. И. Неймарка [3], Г. Н. Никольского [2], Е. П. Попова [1, 7], Я. З. Цыпкина [2, 4, 8] и многих других.

Среди работ зарубежных авторов следует отметить работы Р. Коченбургера [1, 2], Ж. Р. Дютиля [1], П. Наслена [1], В. Оппельта [1], Ж. Д. Лэба [1] и многих других, которые разработали ряд приближенных и точных методов исследования релейных систем.

Таким образом, существует большое число различных разновидностей приближенных и точных методов исследования автоколебаний и вынужденных движений в релейных системах, которые, используя различный математический аппарат, приводят к одним и тем же конечным результатам.

Благодаря своей простоте, наглядности и использованию частотных представлений наибольшее распространение при исследовании автоколебаний и вынужденных движений в релейных системах произвольного порядка получил точный частотный метод Я. З. Цыпкина [2, 4, 8], который и будет изложен в данной главе. Как видно из дальнейшего изложения, в ряде случаев существенного упрощения при решении задач анализа автоколебаний и вынужденных движений в релейных системах, а также их синтеза можно достигнуть путем обобщения метода логарифмических частотных характеристик.

Введение логарифмических характеристик релейных систем позволяет использовать для исследования периодических движений в релейных системах методику, очень похожую на методику, использовавшуюся при исследовании нелинейных систем из условия абсолютной устойчивости и заданного качества.

Изложенная в данной главе методика анализа и синтеза релейных систем иллюстрируется на ряде конкретных примеров.

§ 1. Общие соображения

Рассмотрим релейную систему автоматического управления, структурная схема которой приведена на рис. 7.1.

Нелинейный элемент, имеющий релейную характеристику, характеризуется следующей функцией:

$$y = \Phi(x, \dot{x}). \quad (7.1)$$

Наиболее распространенные характеристики релейных элементов были приведены в табл. 2.



Рис. 7.1.

Линейная часть системы характеризуется передаточной функцией

$$K_{\text{л. ч}}(p) = \frac{\mathcal{L}\{z(t)\}}{\mathcal{L}\{y(t)\}} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}, \quad (7.2)$$

где a_i, b_j — постоянные коэффициенты.

Как было отмечено выше, динамические свойства линейной части системы могут быть охарактеризованы частотной характеристикой линейной части системы

$$K_{\text{л. ч}}(j\omega) = [K_{\text{л. ч}}(p)]_{p=j\omega} \quad (7.3)$$

либо импульсной характеристикой

$$h'(t) = \mathcal{L}^{-1} \{K_{л.ч}(p)\}, \quad (7.4)$$

где $\mathcal{L}^{-1} \{ \}$ — операция обратного преобразования Лапласа.

Периодические режимы в замкнутой релейной системе полностью описываются нелинейным интегральным уравнением, полученным в гл. I:

$$x(t) = f_0(t) - \int_0^{\infty} h'(t-\lambda) \Phi[x(\lambda)] d\lambda, \quad (7.5)$$

где $f_0(t)$ — внешнее периодическое воздействие (например, вида $f_0(t+T) = -f_0(t)$ (см. рис. 7.2)).

§ 2. Условия существования периодических режимов

В релейных системах (рис. 7.1) могут возникать периодические движения (рис. 7.2). В том случае, когда внешнее периодическое воздействие отсутствует, $f_0(t) = 0$, устойчивый периодический режим, если он имеет место, соответствует автоколебаниям.

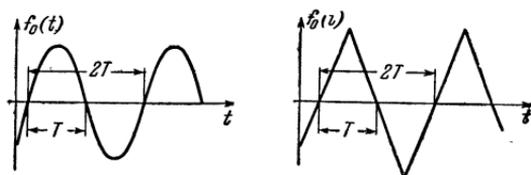


Рис. 7.2.

При наличии внешнего периодического воздействия ($f_0(t) \neq 0$) в релейных системах возможны два режима. Первый режим соответствует случаю, когда в системе наряду с вынужденными колебаниями некоторой частоты ω_0 существуют также автоколебания отличной от ω_0 частоты. В этом случае в системе имеет место так называемый *режим биений*. Второй режим соответствует случаю, когда внешнее периодическое воздействие навязывает системе вынужденные колебания частоты внешнего воздействия и подавляет автоколебания. Этот режим

является характерной особенностью нелинейных систем, часто называемый *принудительной* или *автоматической синхронизацией*. Его также называют *режимом захватывания*.

Вначале найдем условия существования периодических режимов в нелинейной системе с гистерезисной релейной характеристикой (рис. 7.3), вызванные гармоническим входным воздействием

$$\dot{f}_0(t) = A_0 \sin(\omega_0 t - \varphi_0), \quad (7.6)$$

где A_0 , ω_0 , φ_0 — соответственно амплитуда, частота и фазовый сдвиг внешнего периодического воздействия, а затем обобщим эти условия на случай произвольного периодического входного воздействия $\dot{f}_0(t)$.

Если в релейной системе существуют вынужденные колебания с периодом $2T$, то все величины, характеризующие состояние релейной системы $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, будут изменяться также периодически с частотой $\omega_0 = \pi/T$ (рис. 7.4). Обозначим эти периодически изменяющиеся величины через $x_T(t)$, $y_T(t)$ и $z_T(t)$. Выходная величина релейного элемента $y_T(t)$ в данном случае будет представлять последовательность знакопеременных импульсов постоянной длительности T постоянной высоты k_p (рис. 7.4).

Из рис. 7.4 нетрудно видеть, что простые периодические режимы могут существовать, если будут выполнены приведенные ниже три условия, обычно называемые *условиями существования периодических режимов*:

1. Условие надлежащего момента переключения

$$x_T(T) = [x(t)]_{t=T} = -x_0. \quad (7.7)$$

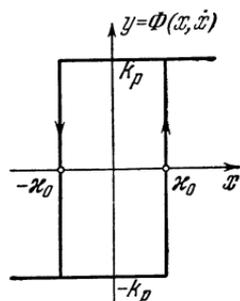


Рис. 7.3.

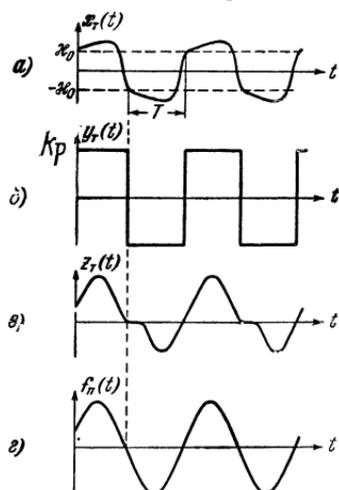


Рис. 7.4.

2. Условие надлежащего направления переключения

$$\dot{x}_T(T) = \left[\frac{dx(t)}{dt} \right]_{t=T-0} < 0. \quad (7.8)$$

3. Условие отсутствия переключения внутри полупериода T

$$x_T(t) > -\kappa_0 \quad \text{при} \quad 0 < t < T. \quad (7.9)$$

Если в (7.7), (7.8) и (7.9) подставить

$$x_T(T) = f_{0T}(T) - z_T(T) = A_0 \sin \varphi_0 - z_T(T),$$

$$\dot{x}_T(T) = \dot{f}_{0T}(T) - \dot{z}_T(T) = -A_0 \frac{\pi}{T} \cos \varphi_0 - \dot{z}(T),$$

то условия существования периодических режимов записываются в следующем виде:

$$A_0 \sin \varphi_0 - z_T(T) = -\kappa_0, \quad (7.10)$$

$$-\frac{T}{\pi} \dot{z}_T(T) - A_0 \cos \varphi_0 < 0, \quad (7.11)$$

$$A_0 \sin \left[\frac{\pi}{T} t - \varphi_0 \right] - z_T(t) > -\kappa_0, \quad 0 < t < T. \quad (7.12)$$

Как следует из (7.2), при $n - m \leq 1$ $\dot{h}(0) \neq 0$ и в этом случае, как показал Н. А. Королев [1], следует учитывать скачок скорости $\dot{z}(t)$ в момент $t = T$, что в свою очередь приводит к скачку скорости $\Delta \dot{x}_T(T)$.

Этот скачок учитывается в (7.8) подробной записью индекса $t = T - 0$, т. е. значение $\dot{x}(t)$ берется непосредственно перед переключением релейного элемента. Скачок скорости нетрудно определить, пользуясь следующим соотношением:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}(T) &= \dot{x}_T(T + 0) - \dot{x}_T = 2k_p \dot{h}(0) = \\ &= 2k_p \lim_{p \rightarrow \infty} p K_{л.ч}(p) = 2k_p \frac{b_0}{a_0} \end{aligned} \quad (7.13)$$

В случае отсутствия внешнего периодического воздействия, т. е. когда $f_0(t) \equiv 0$, условия (7.7), (7.8) и (7.9) переходят в условия существования автоколебаний:

$$-z_T(T) = -\kappa_0, \quad (7.14)$$

$$-\frac{T}{\pi} \dot{z}_T(T) < 0, \quad (7.15)$$

$$-z_T(t) > -\kappa_0 \quad \text{при} \quad 0 < t < T. \quad (7.16)$$

Условия существования вынужденных движений (7.14) и (7.15) можно записать в несколько ином виде через частотную характеристику линейной части системы

$$K_{л.ч}(j\omega) = U_{л.ч}(\omega) + jV_{л.ч}(\omega),$$

где $U_{л.ч}(\omega)$, $V_{л.ч}(\omega)$ — соответственно вещественная и мнимая частотные характеристики линейной части системы.

Если периодическое изменение на выходе линейной части системы $z_T(T)$ и $\dot{z}_T(T)$ выразить через $U_{л.ч}(\omega)$ и $V_{л.ч}(\omega)$, то получим:

$$-z_T(T) = \frac{4}{\pi} k_p \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \frac{V_{л.ч}[(2\vartheta-1)\omega_0]}{2\vartheta-1} \quad (7.17)$$

и

$$-\frac{1}{\omega_0} \dot{z}_T(T) = -\frac{k_p}{\omega_0} \dot{h}(0) + \frac{4}{\pi} k_p \sum_{\vartheta=1}^{\infty} U_{л.ч}[(2\vartheta-1)\omega_0]. \quad (7.18)$$

Используя (7.17) и (7.18), условия существования простых периодических режимов можно записать в следующем виде:

$$\frac{4}{\pi} k_p \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \frac{V_{л.ч}[(2\vartheta-1)\omega_0]}{2\vartheta-1} + A_0 \sin \varphi_0 = -\kappa_0, \quad (7.19)$$

$$\frac{4}{\pi} k_p \sum_{\vartheta=1}^{\infty} U_{л.ч}[(2\vartheta-1)\omega_0] - k_p \frac{b_0}{\omega_0 a_0} - A_0 \cos \varphi_0 < 0. \quad (7.20)$$

При отсутствии внешнего периодического воздействия условия (7.19) и (7.20) можно записать в следующем виде:

$$\frac{4}{\pi} k_p \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \frac{V_{л.ч}[(2\vartheta-1)\omega_0]}{2\vartheta-1} = -\kappa_0, \quad (7.21)$$

$$\frac{4}{\pi} k_p \sum_{\vartheta=1}^{\infty} U_{л.ч}[(2\vartheta-1)\omega_0] - k_p \frac{b_0}{\omega_0 a_0} < 0. \quad (7.22)$$

Полупериод искомым автоколебаний определяется как вещественный корень уравнения (7.21), удовлетворяющий неравенству (7.22) и условию (7.16).

§ 3. Характеристика релейной системы и ее использование для исследования периодических режимов

Для практического исследования вынужденных колебаний и автоколебаний в релейных системах удобно пользоваться введенным Я. З. Цыпкиным [2, 8, 10] понятием *характеристики релейной системы*, представляющей собой комплекснозначную функцию, которую в дальнейшем мы будем обозначать $J(\omega)$:

$$J(\omega) = \operatorname{Re} J(\omega) + j \operatorname{Im} J(\omega), \quad (7.23)$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} J(\omega) &= -\frac{1}{\omega} \dot{z}_T \left(\frac{\pi}{\omega} \right) = \\ &= -k_p \frac{b_0}{\omega a_0} + \frac{4}{\pi} k_p \sum_{\vartheta=1}^{\infty} U_{\text{л.ч}}[(2\vartheta-1)\omega], \end{aligned} \quad (7.24)$$

$$\operatorname{Im} J(\omega) = -z_T \left(\frac{\pi}{\omega} \right) = \frac{4}{\pi} k_p \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \frac{V_{\text{л.ч}}[(2\vartheta-1)\omega]}{2\vartheta-1}. \quad (7.25)$$

Задаваясь различными значениями ω_0 , можно построить на комплексной плоскости характеристику релейной системы $J(\omega)$ (рис. 7.5). Точка пересечения этой кривой с прямой

$$\operatorname{Im} J(\omega) = -\kappa_0, \quad (7.26)$$

расположенной в левой полуплоскости (см. условие (7.16)), определяет частоту автоколебаний ω_{0i} , удовлетворяющую условиям (7.21) и (7.22).

В случае идеальной релейной характеристики $\kappa_0=0$. В этом случае возможные частоты автоколебаний определяются как точки пересечения релейной характеристики $J(\omega)$ с отрицательной частью оси $\operatorname{Re} J(\omega)$ (рис. 7.5).

Кроме определения частоты ω_0 и амплитуды A_0 , требуется также определить сдвиг фаз φ между вынужденными колебаниями и внешним периодическим воздействием. Для определения сдвига фаз воспользуемся геометрическими построениями с использованием характеристики релейной системы (Я. З. Цыпкин [4, 10]). Для этого введем комплекснозначную функцию

$$\mathcal{F}(\pi - \varphi) = A_0 [\tilde{f}'(\pi - \varphi) + j\tilde{f}(\pi - \varphi)], \quad (7.27)$$

где $f_0(t) = A_0 \tilde{f}\left(\frac{\pi}{T}t - \varphi\right)$ — периодическая функция с периодом $2T$ (частотой $\omega_0 = \frac{\pi}{T}$), причем $\max \left| \tilde{f}\left(\frac{\pi}{T}t - \varphi\right) \right| = 1$.

Возможный вид таких функций приведен в табл. 8.

После этого условия существования периодических режимов (7.19) и (7.20) принимают вид

$$\operatorname{Im} [\mathcal{F}(\pi - \varphi) + J(\omega_0)] = -\kappa_0, \quad (7.28)$$

$$\operatorname{Re} [\mathcal{F}(\pi - \varphi) + J(\omega_0)] < 0. \quad (7.29)$$

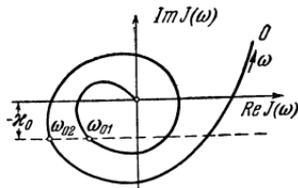


Рис. 7.5

В (7.28) и (7.29) искомым параметром является сдвиг фаз φ_0 , который можно определить следующим образом. Строим характеристику релейной системы $J(\omega)$ и проводим прямую $\operatorname{Im} J(\omega) = -\kappa_0$. Отмечаем точку ω_0 на релейной характеристике и, используя ее в качестве начала координат, строим кривую, описываемую концом вектора $\mathcal{F}(\pi - \varphi)$ при $A_0 = \operatorname{const}$ и при изменении φ_0 от нуля до π . В частности, при

$$f_0(t) = A_0 \tilde{f}\left(\frac{\pi}{T}t - \varphi\right) = A_0 \sin\left(\frac{\pi}{T}t - \varphi\right) \quad (7.30)$$

функция $\mathcal{F}(\pi - \varphi)$ представляет собой окружность с радиусом A_0 (рис. 7.6, а, б).

Вектор, проведенный из начала координат к кривой $\mathcal{F}(\pi - \varphi)$, равен сумме векторов $J(\omega)$ и $\mathcal{F}(\pi - \varphi)$ при $\omega = \omega_0$ (рис. 7.6, а).

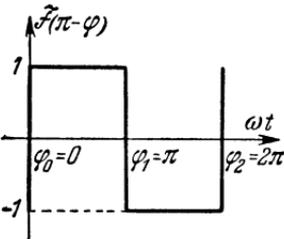
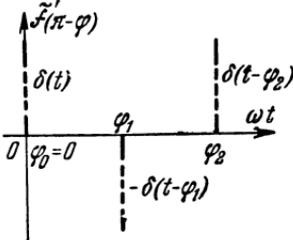
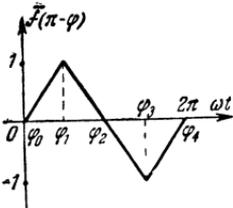
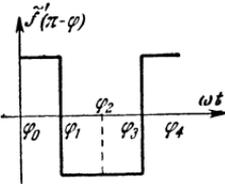
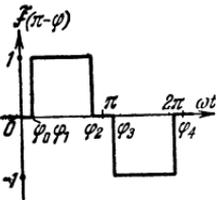
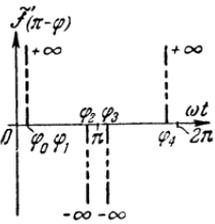
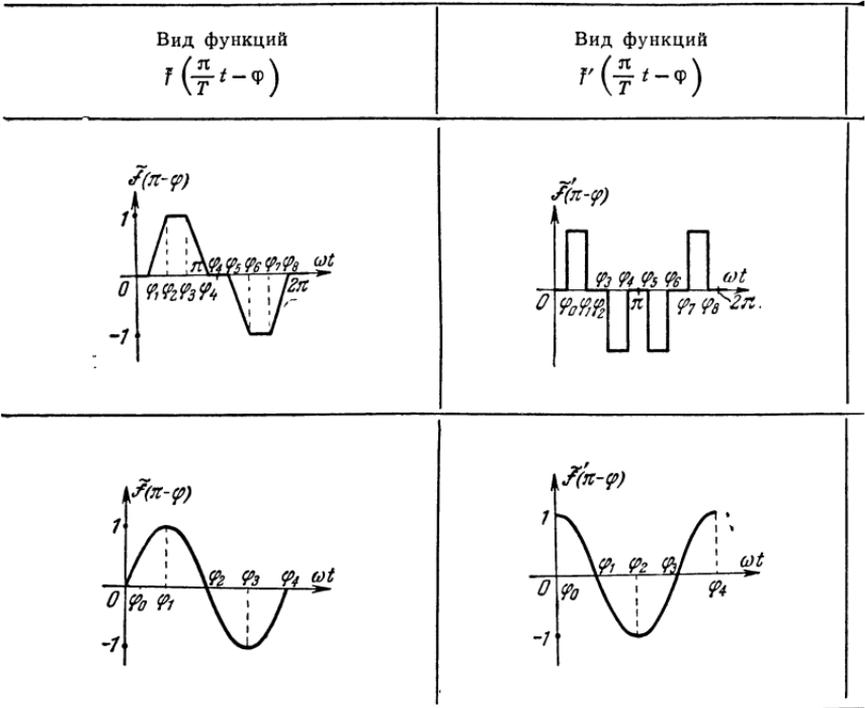
Вид функций $f\left(\frac{\pi}{T}t - \varphi\right)$	Вид функций $f'\left(\frac{\pi}{T}t - \varphi\right)$
	 <p>$\delta(t-\varphi)$ - дельта-функция</p>
	
	

Таблица 8

<p>Вид функций $\mathcal{F}(\pi - \varphi) = A_0 [\tilde{f}' + f]$</p>	<p>$\varphi = \Phi(A_{кр})$</p>



Условия (7.28) и (7.29) будут выполняться лишь для значений φ , при которых кривая $\mathcal{F}(\pi - \varphi)$ пересекает прямую $\text{Im} J(\omega) = -\kappa_0$ в левой полуплоскости.

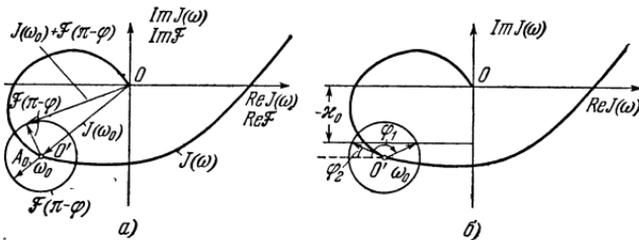


Рис. 7.6.

Как видно из рис. 7.6, таких значений фазы φ будет два — φ_1 и φ_2 , т. е. в данном случае число возможных

Режим биений и режим вынужденных колебаний переходят один в другой (при $\omega_0 = \text{const}$), когда величина A_0 принимает некоторые критические значения $A_{01 \text{ кр}}$ и $A_{02 \text{ кр}}$.

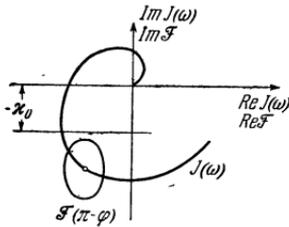


Рис. 7.7.

При $A_0 = A_{01 \text{ кр}}$ кривая $\mathcal{F}(\pi - \varphi)$ при $\varphi_0 = \varphi_{10}$ касается прямой $\text{Im } J(\omega) = -\kappa_0$ в левой полуплоскости (рис. 7.8), а при $A_0 = A_{02 \text{ кр}}$ кривая $\mathcal{F}(\pi - \varphi)$ при $\varphi_0 = \varphi_{20}$ пересекает прямую $\text{Im } J(\omega) = -\kappa_0$

только в точке пересечения этой прямой с мнимой осью (рис. 7.9).

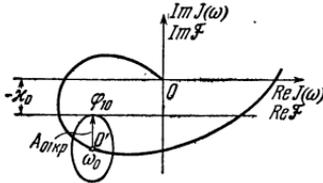


Рис. 7.8.

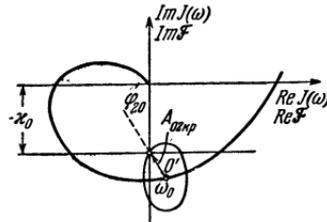


Рис. 7.9.

Выражение для $A_{01 \text{ кр}}$ и $A_{02 \text{ кр}}$ нетрудно найти в аналитической форме (Цыпкин [8]), используя для этого приведенные выше построения:

$$A_{01 \text{ кр}} = \frac{|\text{Im } J(\omega_0) + \kappa_0|}{|\tilde{f}_0(\pi - \varphi_{01})|} \quad (7.33)$$

и

$$A_{02 \text{ кр}} = \sqrt{\frac{[\text{Re } J(\omega_0)]^2 + [\text{Im } J(\omega_0) + \kappa_0]^2}{[\tilde{f}'_0(\pi - \varphi_{20})]^2 + [\tilde{f}_0(\pi - \varphi_{20})]^2}} \quad (7.34)$$

Используя аналогичные геометрические соображения, можно найти зависимость сдвига фаз от амплитуды внешнего воздействия

$$|\tilde{f}_0(\pi - \varphi)| = \frac{|\text{Im } J(\omega_0) + \kappa_0|}{A_0} \quad (7.35)$$

или, используя (7.28), получим

$$|\tilde{f}_0(\pi - \varphi)| = \frac{A_{01 \text{ кр}}}{A_0} \tilde{f}_0(\pi - \varphi_{10}). \quad (7.36)$$

Если на вход системы действует гармоническое входное воздействие, то определение $A_{0 \text{ кр}}$ и φ упрощается. В частности, используя полученные выражения (7.33) и (7.34), нетрудно определить значения φ_{10} для значения $A_{01 \text{ кр}}$, лежащего на части кривой $J(\omega_0)$, расположенной в левой полуплоскости:

$$A_{01 \text{ кр}} = |\operatorname{Im} J(\omega_0) + \varkappa_0|, \quad (7.37)$$

$$\varphi_{10} = \frac{\pi}{2},$$

и соответственно для $A_{02 \text{ кр}}$ и φ_{02} :

$$A_{02 \text{ кр}} = \sqrt{|\operatorname{Im} J(\omega_0) + \varkappa_0|^2 + |\operatorname{Re} J(\omega_0)|^2}, \quad (7.38)$$

$$\varphi_{02} = \pm \pi - \varphi_{10}. \quad (7.39)$$

В заключение отметим, что характеристику релейной системы можно также использовать для исследования автоколебаний и вынужденных движений в релейных системах с зоной нечувствительности. Однако в этом случае необходимые геометрические построения значительно усложняются и теряют ту наглядность, которая имеет место при исследовании гистерезисных релейных систем без зоны нечувствительности.

§ 4. Логарифмические характеристики релейных систем

Как было показано выше, использование логарифмических характеристик линейной части системы позволило значительно упростить анализ устойчивости и качества нелинейных систем и, главное, получить возможность синтезировать корректирующие устройства, при введении которых обеспечивается устойчивость и качество переходных процессов при заданных параметрах системы. Введение логарифмических характеристик и в данном случае позволяет использовать аналогичный подход при решении задач анализа и синтеза релейных систем автоматического управления.

Введем соответственно понятия *логарифмической амплитудно-частотной характеристики* релейной системы

$$L_J(\omega) = 20 \lg \text{mod } J(\omega) = \left[\frac{4k_p}{\pi} \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \frac{V_{\text{л. ч}}[(2\vartheta-1)\omega]}{2\vartheta-1} \right]^2 + \left[J_0(\omega) + \frac{4k_p}{\pi} \sum_{\vartheta=1}^{\infty} U_{\text{л. ч}}[(2\vartheta-1)\omega] \right]^2 \quad (7.40)$$

и *логарифмической фазо-частотной характеристики* релейной системы

$$\varphi_J(\omega) = \arctg \frac{\frac{4k_p}{\pi} \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \frac{V_{\text{л. ч}}[(2\vartheta-1)\omega]}{2\vartheta-1}}{J_0(\omega) + \frac{4k_p}{\pi} \sum_{\vartheta=1}^{\infty} U_{\text{л. ч}}(2\vartheta-1)\omega}, \quad (7.41)$$

где

$$J_0(\omega) = k_p \frac{\dot{h}(0)}{\omega_0} = k_p \frac{b_0}{\omega_0 a_0}.$$

Логарифмические амплитудно- и фазо-частотные характеристики релейных систем для типовых звеньев.

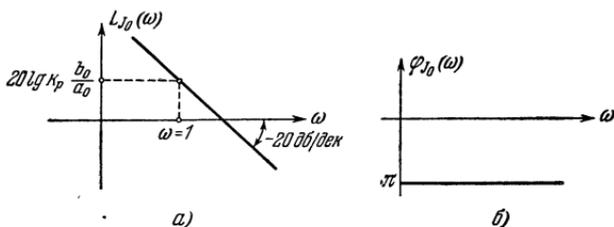


Рис. 7.10.

Обычно передаточная функция линейной части системы $K_{\text{л. ч}}(p)$ получается в результате соединения элементарных звеньев. Поэтому рассмотрим вначале, какой вид имеют логарифмические частотные характеристики отдельных составляющих $J_{\vartheta}(\omega)$ релейной характеристики типовых звеньев.

Логарифмическая характеристика нулевой составляющей $J_0(\omega) = k_p \frac{b_0}{a_0} \frac{1}{\omega}$. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика $L_{J_0}(\omega)$ нулевой составляющей $J_0(\omega)$ релейной системы имеет следующий вид (рис. 7.10, а):

$$L_{J_0}(\omega) = 20 \lg k_p \frac{b_0}{a_0} - 20 \lg \omega \quad (7.42)$$

и соответственно логарифмическая фазо-частотная характеристика (рис. 7.10, б):

$$\varphi_{J_0}(\omega) = -\pi. \quad (7.43)$$

Отметим, что в том случае, когда $n - m \geq 2$,

$$L_{J_0}(\omega) \equiv 0 \text{ и } \varphi_{J_0}(\omega) \equiv 0.$$

Рассмотрим теперь, какой вид имеют логарифмические характеристики релейных систем для типовых звеньев при $\frac{4k_p}{\pi} = 1$.

Интегрирующее звено $K_{л.ч}(p) = \frac{1}{p}$ (рис. 7.11, а, б):

$$J_{\vartheta}(\omega) = \frac{1}{(2\vartheta - 1)^2 \omega} e^{-j\pi/2},$$

$$L_{J_{\vartheta}}(\omega) = -40 \lg(2\vartheta - 1) - 20 \lg \omega, \quad (7.44)$$

$$\varphi_{J_{\vartheta}}(\omega) = -\frac{\pi}{2}. \quad (7.45)$$

Как следует из (7.44), (7.45), логарифмическая амплитудно-частотная характеристика $L_{J_{\vartheta}}(\omega)$ при $\vartheta > 1$ смещается параллельно самой себе вниз на величину $-40 \lg(2\vartheta - 1)$ (рис. 7.11, а), а логарифмическая фазо-частотная характеристика $\varphi_{J_{\vartheta}}(\omega)$ при $\vartheta > 1$ остается той же, что и при $\vartheta = 1$ (рис. 7.11, б).

Звено первого порядка $K_{л.ч}(p) = \frac{1}{Tp + 1}$ (рис. 7.12, а, б):

$$J_{\vartheta}(\omega) = \frac{\sqrt{1 + \bar{\omega}^2}}{1 + (2\vartheta - 1)^2 \bar{\omega}^2} e^{-j \arctg \bar{\omega}}, \quad (7.46)$$

$$L_{J_{\vartheta}}(\omega) = 10 \lg(1 + \bar{\omega}^2) - 20 \lg[1 + (2\vartheta - 1)^2 \bar{\omega}^2], \quad (7.47)$$

$$\varphi_{J_{\vartheta}}(\omega) = -\arctg \bar{\omega}, \quad (7.48)$$

где $\bar{\omega} = \omega T$.

Как следует из (7.47), (7.48), так же как и в предыдущем случае, логарифмическая амплитудно-

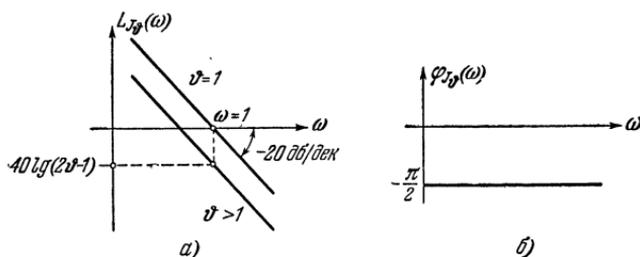


Рис. 7.11.

частотная характеристика $L_{J\phi}(\omega)$ при $\phi > 1$ смещается параллельно самой себе вниз на величину $-40 \lg(2\phi-1)$ (рис. 7.12, а), а логарифмическая фазо-частотная

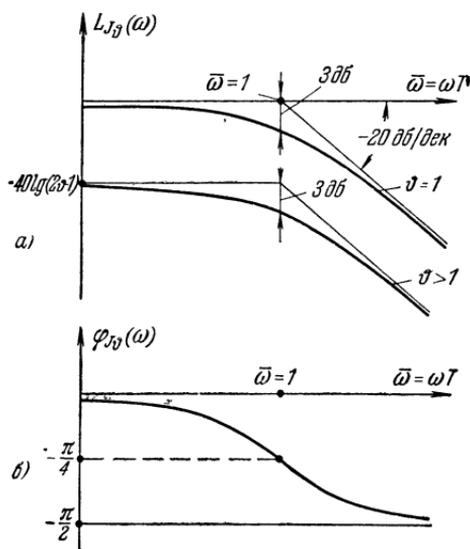


Рис. 7.12.

характеристика $\varphi_{J\phi}(\omega)$ при $\phi > 1$ (рис. 7.12, б) остается одной и той же, что и при $\phi = 1$, т. е. совпадает с логарифмической фазо-частотной характеристикой звена первого порядка.

При этом не следует забывать, что при $T \neq 1$ надо изменить также масштаб по оси ω , так как $\tilde{\omega} = \omega T$.

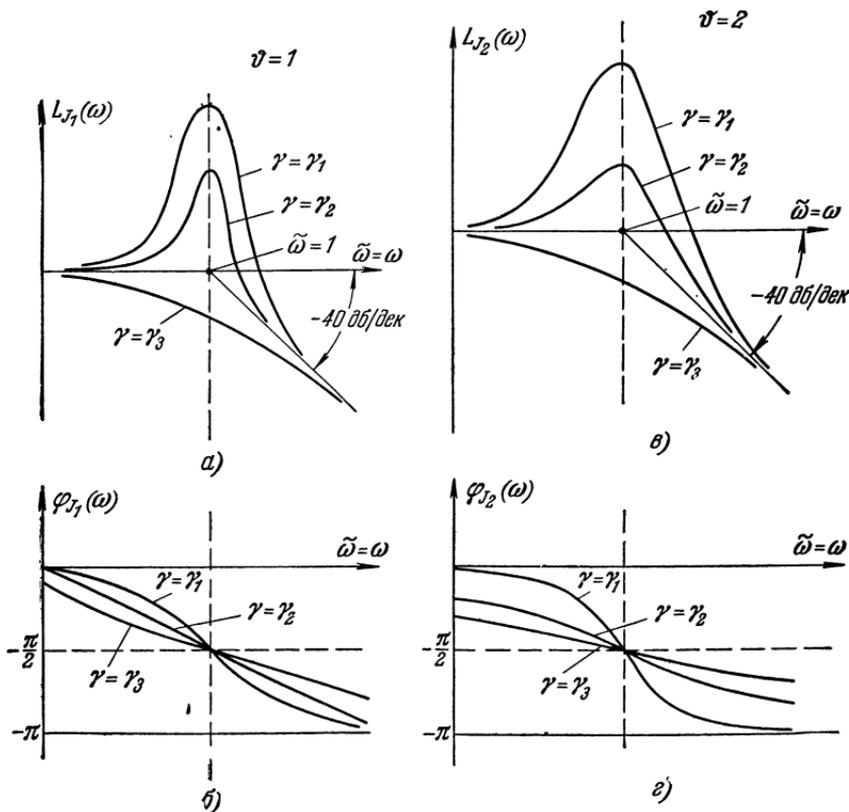


Рис. 7.13.

Звено второго порядка $K_{л.ч}(p) = \frac{1}{p^2 + 2\gamma p + 1}$ (рис. 7.13):

$$J_{\tilde{\omega}}(\tilde{\omega}) = \frac{\sqrt{(1 + \tilde{\omega}^2)^2 + 4\gamma^2 \frac{\tilde{\omega}^2}{(2\tilde{\theta} - 1)^2}}}{(1 - \tilde{\omega}^2)^2 + 4\gamma^2 \tilde{\omega}^2} e^{-j \arctg 2\tilde{\gamma} \frac{\tilde{\omega}}{(1 - \tilde{\omega}^2)}}, \quad (7.49)$$

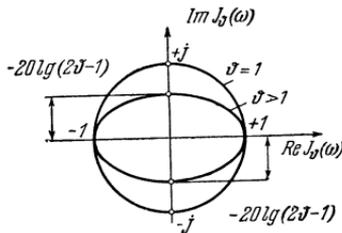
$$L_{J_\vartheta}(\tilde{\omega}) = 10 \lg \left\{ (1 - \tilde{\omega}^2)^2 + 4\gamma^2 \frac{\tilde{\omega}^2}{(2\vartheta - 1)^2} \right\} - \\ - 20 \lg \{ (1 - \tilde{\omega}^2)^2 + 4\gamma^2 \tilde{\omega}^2 \}, \quad (7.50)$$

$$\varphi_{J_\vartheta}(\tilde{\omega}) = -\operatorname{arctg} 2\tilde{\gamma} \frac{\tilde{\omega}}{1 - \tilde{\omega}^2}, \quad (7.51)$$

где $\tilde{\omega} = (2\vartheta - 1)\omega$, $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{2\vartheta - 1}$.

При $\vartheta = 1$ логарифмические характеристики $L_{J_1}(\omega) = L(\omega)$ и $\varphi_{J_1}(\omega) = \varphi(\omega)$ совпадают с обычными логарифмическими амплитудно- и фазо-частотными характеристиками звена второго порядка. При $\vartheta > 1$ характеристики $L_{J_\vartheta}(\omega)$ и $\varphi_{J_\vartheta}(\omega)$, как это следует из (7.50) и (7.51), нетрудно получить из характеристик $L(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ ($\vartheta = 1$), но имеющих другой масштаб по оси абсцисс. Как видно из (7.51), фазо-частотные характеристики $\varphi_{J_\vartheta}(\omega)$ соответствуют характеристикам $\varphi(\omega)$ при $\gamma = \tilde{\gamma}$. Так как обычно при построении характеристик релейных систем $J(\omega)$ не требуется учитывать больше двух составляющих $J_\vartheta(\omega)$, на рис. 7.13, а, б, в, г нами приведены логарифмические характеристики релейной системы для колебательного звена второго порядка при $\vartheta = 1$ и $\vartheta = 2$.

Рис. 7.14.



Звено запаздывания $K_{л.ч}(p) = e^{-p\tau}$ (рис. 7.14 и 7.15):

$$J_\vartheta(\tilde{\omega}) = \left[\cos \tilde{\omega} - j \frac{\sin \tilde{\omega}}{2\vartheta - 1} \right] = \\ = \sqrt{\cos^2 \tilde{\omega} + \frac{\sin^2 \tilde{\omega}}{(2\vartheta - 1)^2}} e^{-j \operatorname{arctg} \frac{1}{2\vartheta - 1} \operatorname{tg} \tilde{\omega}}, \quad (7.52)$$

$$L_{J_\vartheta}(\tilde{\omega}) = 10 \lg \left[\cos^2 \tilde{\omega} + \frac{\sin^2 \tilde{\omega}}{(2\vartheta - 1)^2} \right], \quad (7.53)$$

$$\varphi_{J_\vartheta}(\tilde{\omega}) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2\vartheta - 1} \operatorname{tg} \tilde{\omega}, \quad (7.54)$$

где $\tilde{\omega} = (2\vartheta - 1)\omega\tau = (2\vartheta - 1)\bar{\omega}$, $\bar{\omega} = \omega\tau$.

Логарифмические характеристики релейных систем. Выше было введено понятие логарифмических амплитудно- и фазо-частотных характеристик отдельных составляющих релейных систем $L_{J_\vartheta}(\omega)$ и $\varphi_{J_\vartheta}(\omega)$ при $\vartheta = 0, 1, 2$, которые определяются в соответствии с выражениями (7.40) и (7.41). Обычно достаточно учесть

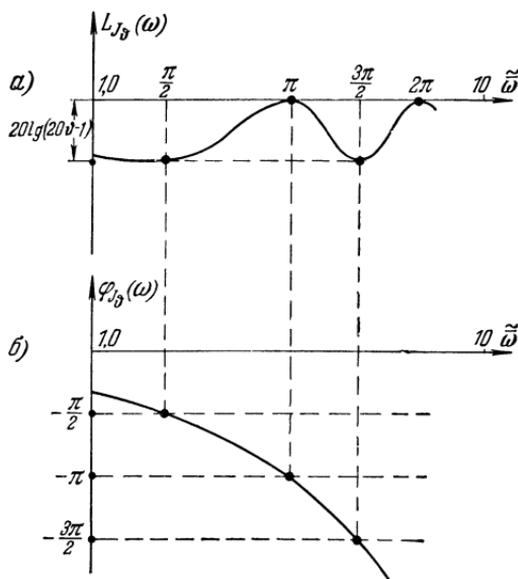


Рис. 7.15.

составляющие релейных характеристик при $\vartheta = 0, 1, 2$, либо при $\vartheta = 0, 1$. Для нахождения логарифмических характеристик

$$L_J(\omega) = 20 \lg \text{mod} [J_0(\omega) + J_1(\omega) + \dots], \quad (7.55)$$

$$\varphi_J(\omega) = \arg [J_0(\omega) + J_1(\omega) + \dots] \quad (7.56)$$

по известным $L_{J_\vartheta}(\omega)$ и $\varphi_{J_\vartheta}(\omega)$ удобно воспользоваться приведенными в первой главе номограммами (см. А. И. Гузенко [1], П. Наслен [1]).

1. Исследование автоколебаний в релейных системах.

Анализ автоколебаний. Выше был приведен способ построения логарифмических характеристик релейных

систем $L_J(\omega)$ и $\varphi_J(\omega)$ по частотной характеристике линейной части системы.

Если при помощи того или иного способа была построена логарифмическая характеристика релейной системы в декартовой системе координат, т. е. $L_J(\omega) = Q[\varphi_J(\omega)]$, то и в этом случае можно использовать

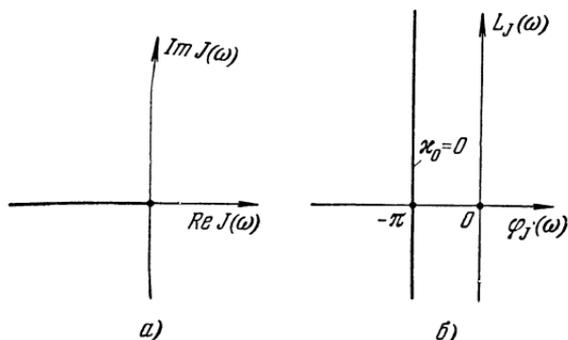


Рис. 7.16.

частотный метод Я. З. Цыпкина для определения частоты автоколебаний. Как было показано, условия существования автоколебаний имеют следующий вид:

$$\text{Im } J(\omega) = -\kappa_0,$$

$$\text{Re } J(\omega) < 0.$$

В случае отсутствия гистерезиса ($\kappa_0 = 0$) отрицательная часть действительной полуоси (рис. 7.16, а) отображается в декартовой системе координат в прямую $\varphi_J(\omega) = -\pi$, параллельную оси ординат (рис. 7.16, б), а в случае $\kappa_0 \neq 0$ прямая $\text{Im } J(\omega) = -\kappa_0$ отображается в кривую (рис. 7.17, а, б), которую для краткости в дальнейшем будем называть κ_0 -кривой.

При $|\kappa_0| > 1$ кривая будет лежать выше оси абсцисс, при $|\kappa_0| = 1$ будет касаться ее, а при $|\kappa_0| < 1$ частично будет расположена ниже оси абсцисс (рис. 7.17, б).

Для построения κ_0 -кривой, соответствующей данному численному значению κ_0 , целесообразно пользоваться графоаналитическим методом.

Для этого надо на плоскости $J(\omega)$ провести прямую $\text{Im } J(\omega) = -x_0$ (рис. 7.18), в точки $a, б, в, г, \dots$ провести векторы $L_a, L_б, L_в, L_г, \dots$ определить их модули

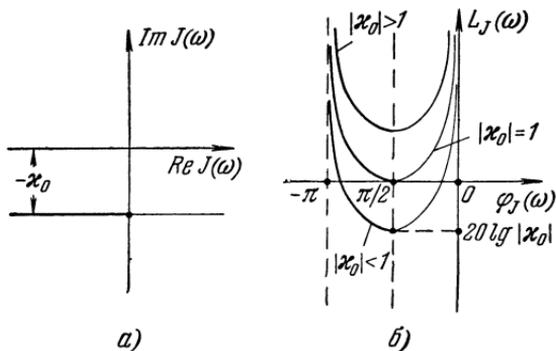


Рис. 7.17.

$|L_a|, |L_б|, |L_в|, |L_г|, \dots$, и соответствующие фазовые углы $\varphi_a, \varphi_б, \varphi_в, \varphi_г, \dots$. Используя таблицу перевода абсолютных значений $L_a, L_б, L_в, L_г, \dots$ в децибеллы (см. приложение 6) для определения $20 \lg |L_a|, 20 \lg |L_б|, 20 \lg |L_в|, \dots$, не представляет трудности построить и x_0 -кривую.

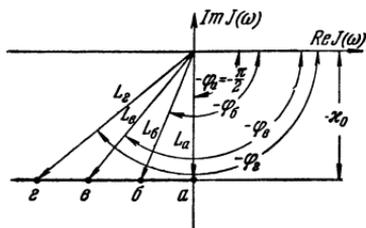


Рис. 7.18.

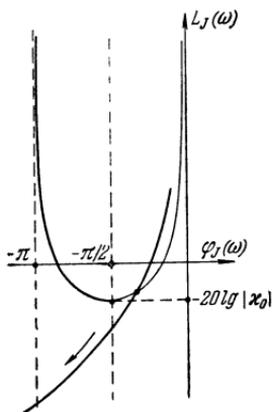


Рис. 7.19.

Частоты автоколебаний будут определяться как частоты, соответствующие точкам пересечения логарифмической характеристики релейной системы в декартовой системе координат с той частью x_0 -кривой, которая в случае $x_0 \neq 0$ расположена в полосе $-\pi/2 \div -\pi$.

Например, в случае, изображенном на рис. 7.19, автоколебания в релейной системе отсутствуют, а для случая, изображенного на рис. 7.20, существуют автоколебания с частотой ω_0 .

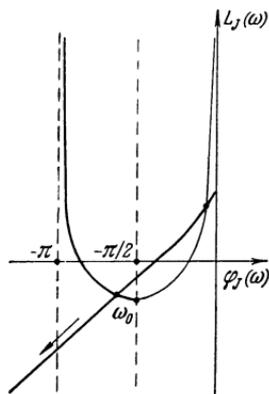


Рис. 7.20.

В том случае, когда $n - m \geq 2$, использование логарифмических характеристик релейных систем позволяет очень просто исследовать влияние коэффициента усиления линейной части системы на параметры автоколебаний. В этом случае логарифмическая характеристика релейной системы соответственно смещается вверх или вниз.

Синтез релейной системы из условия существования автоколебаний с заданными параметрами. В ряде

случаев при создании релейных систем автоматического управления возникает задача синтезировать такое корректирующее устройство, которое позволило бы получить, например, заданную частоту автоколебаний.

На рис. 7.21 изображена логарифмическая характеристика некоторой линейной системы, где $n - m \geq 2$. Очевидно, что в релейной системе при некотором значении $k = -k_0$ существуют автоколебания частоты $\omega = \omega_0$. Допустим, что требуется повысить эту частоту до некоторого значения $\omega_{отр}$. Нетрудно заметить, что увеличением коэффициента усиления линейной части системы в пределе при $k \rightarrow \infty$ (если это возможно) при $k_0 \neq 0$ можно получить частоту не выше, чем $\omega_{отр}$. Такая же частота будет в ре-

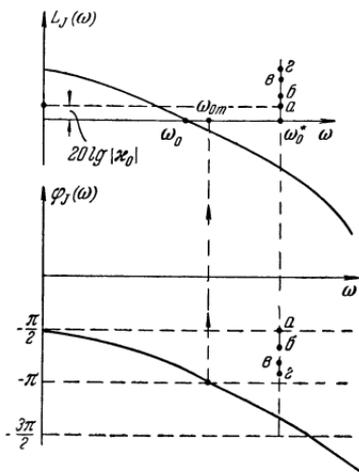


Рис. 7.21.

лейной системе при наличии релейного элемента без гистерезиса, т. е. при $\kappa_0 = 0$.

Рассмотрим теперь методику синтеза корректирующего устройства, при наличии которого частота автоколебаний в системе будет равна $\omega_{0 \text{ тр}} > \omega_{0 \text{ м}}$. Для этого введем понятие *желаемой логарифмической характеристики релейной системы* $L_{J_{\text{ж}}}(\omega) = Q[\varphi_{J_{\text{ж}}}(\omega)]$, которой должна обладать система, имеющая автоколебания требуемой частоты $\omega_{0 \text{ тр}} \gtrsim \omega_0$.

На языке логарифмической характеристики релейной системы в декартовой системе координат к желаемой характеристике необходимо предъявить лишь одно требование — она должна пересекать κ_0 -кривую при $\omega_{0 \text{ тр}}$ в одной из точек $a, б, в$ или $г$.

Это означает, что желаемая логарифмическая амплитудная $L_{J_{\text{ж}}}(\omega)$ и фазовая $\varphi_{J_{\text{ж}}}(\omega)$ характеристики релейной системы после введения в систему корректирующего устройства должны проходить через одну из точек $a, б, в$ или $г$, являющихся отображением точек $a, б, в, г$ на плоскости $L_J(\omega)$ и $\varphi_J(\omega)$ (рис. 7.22).

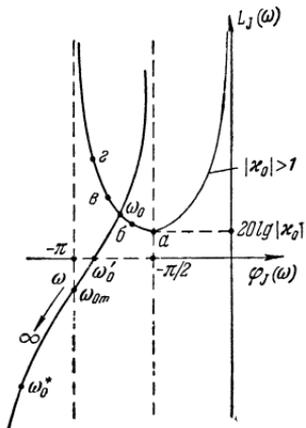


Рис. 7.22.

Допустим, что для линейной части системы выполняется условие $n - m > 1$. Тогда, подобрав корректирующее устройство таким образом, чтобы логарифмические характеристики $L_{J_{\text{ж}}}(\omega)$ и $\varphi_{J_{\text{ж}}}(\omega)$ проходили через одну из точек $a, б, в$, или $г$, мы тем самым в рассматриваемой системе обеспечим требуемую частоту автоколебаний. Если же нельзя обеспечить точного прохождения характеристик $L_{J_{\text{ж}}}(\omega)$ и $\varphi_{J_{\text{ж}}}(\omega)$ через точки $a, б, в$ или $г$, то в этом случае требуемая частота автоколебаний в релейной системе может быть получена лишь приближенно.

После того как указанным выше способом заданы желаемые логарифмические характеристики релейной

системы $L_{J_{\text{ж}}}(\omega)$ и $\varphi_{J_{\text{ж}}}(\omega)$, можно определить соответствующие логарифмические характеристики последовательного корректирующего устройства (рис. 7.23), используя следующее приближенное соотношение:

$$J_{\text{ж}}(\omega) \approx J(\omega) \cdot K_{\text{к}}(j\omega), \quad (7.57)$$

где $J_{\text{ж}}(\omega)$ — желаемая характеристика релейной системы; $J(\omega) = \frac{4k_{\text{р}}}{\pi} K_{\text{л.ч}}(j\omega)$ — первая составляющая релейной характеристики исходной системы; $K_{\text{л.ч}}(j\omega)$ — частотная характеристика линейной части системы; $K_{\text{к}}(j\omega)$ — частотная характеристика последовательного корректирующего устройства.

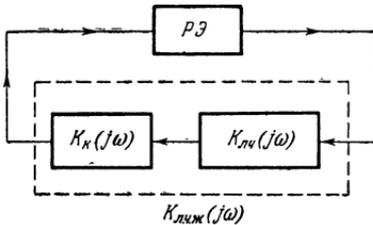


Рис. 7.23.

Переходя к логарифмическим характеристикам, получим:

$$\begin{aligned} L_{\text{к}}(\omega) &= L_{J_{\text{ж}}}(\omega) - L_J(\omega) = \\ &= L_{J_{\text{ж}}}(\omega) - L(\omega) - 20 \lg \frac{4}{\pi} k_{\text{р}}. \end{aligned}$$

Используя понятие желаемой логарифмической характеристики релейной системы, легко синтезировать как последовательные, так и параллельные корректирующие устройства.

В заключение следует построить логарифмическую характеристику релейной скорректированной системы и убедиться, что в системе будут существовать автоколебания с частотой, близкой к ω_0 тр.

2. Исследование вынужденных движений в релейных системах. Анализ вынужденных движений. Логарифмические характеристики релейных систем можно использовать для анализа вынужденных движений в релейных системах.

Рассмотрим вначале методику анализа вынужденных движений в релейных системах для случая гармонического входного сигнала частоты ω_0 :

$$f_0(t) = A \sin(\omega_0 t - \varphi_0). \quad (7.58)$$

Допустим, что построена логарифмическая характеристика релейной системы: при исследовании вынужденных движений необходимо знать лишь координаты одной точки релейной характеристики при $\omega = \omega_0$, т. е.

$$L_J(\omega_0) = 20 \lg \text{mod } J(\omega_0), \quad (7.59)$$

$$\varphi_J(\omega_0) = \arg J(\omega_0). \quad (7.60)$$

В случае гармонического внешнего воздействия $f_0(t)$ функция $F(\pi - \varphi_0)$ на плоскости релейной характеристики имеет вид окружности, проходящей через точку $J(\omega)$ при $\omega = \omega_0$.

Для исследования вынужденных движений в релейных системах при помощи логарифмических характеристик необходимо отобразить функцию $F(\pi - \varphi_0)$ на плоскость L_J и φ_J в декартовой системе координат (рис. 7.24), причем

$$L_J = 20 \lg \text{mod } F(\pi - \varphi_0),$$

$$\varphi_J = \arg F(\pi - \varphi_0).$$

В случае гармонического входного воздействия функция $F(\pi - \varphi_0)$ на плоскости L_J, φ_J имеет вид замкнутой кривой, вписываемой в прямоугольник и определяемый значениями (рис. 7.24, б)

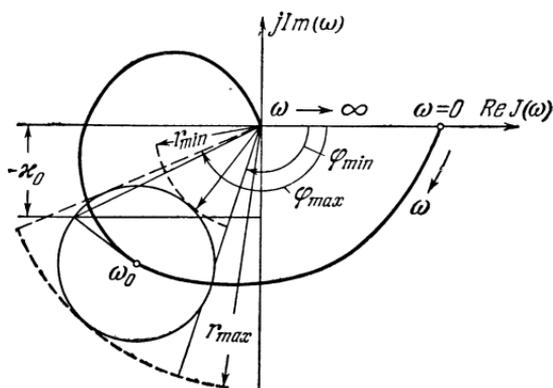
$$\varphi_{0 \min}, \varphi_{0 \max}, L_{r \min}, L_{r \max}.$$

Построив на плоскости логарифмической характеристики также κ_0 -кривую (рис. 7.24, б), можно определить координаты, соответствующие точкам пересечения F -кривой и κ_0 -кривой, которые мы обозначим через $\psi_{\min}, L_{J \min}, \psi_{\max}, L_{J \max}$.

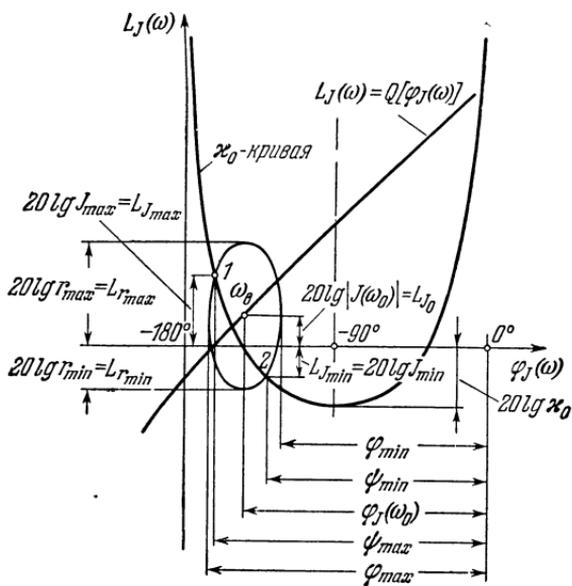
Тогда из простых геометрических соображений (рис. 7.25) можно определить значения φ_{10} и φ_{20} гармонического входного сигнала, при котором в системе могут устанавливаться вынужденные движения частоты $\omega = \omega_0$:

$$\varphi_{10} = \arctg \frac{J_{\min} \cos\left(\psi_{\max} - \frac{\pi}{2}\right) - J(\omega_0) \cos\left[\varphi_J(\omega_0) - \frac{\pi}{2}\right]}{J_{\min} \cos(\pi - \psi_{\max}) - J(\omega_0) \cos[\pi - \varphi_J(\omega_0)]}, \quad (7.61)$$

$$\varphi_{20} = \arctg \frac{J_{\min} \cos\left(\psi_{\max} - \frac{\pi}{2}\right) - J(\omega_0) \cos\left[\varphi_J(\omega_0) - \frac{\pi}{2}\right]}{J(\omega_0) \cos(\pi - \psi_{\min}) - J_{\max} \cos[\pi - \varphi_J(\omega_0)]}. \quad (7.62)$$



а)



б)

Рис. 7.24.

частоты ω_0 , можно поступить различным образом. Одним из возможных способов является введение последовательного линейного корректирующего устройства. Таким образом, под задачей синтеза вынужденных движений будем далее понимать синтез последовательного корректирующего устройства, при наличии которого в системе будут существовать вынужденные движения заданной частоты ω_0 , причем обычно $\omega_0 > \omega_a$, где ω_a — частота автоколебаний в релейной системе.

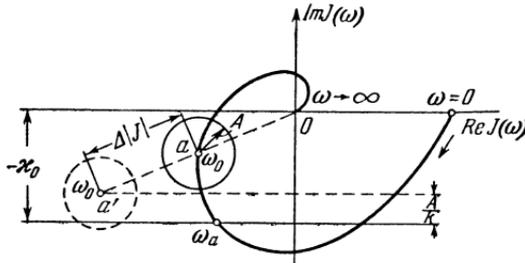


Рис. 7.27.

Вынужденные движения частоты ω_0 будут существовать в том случае, если, например, после введения корректирующего устройства точка релейной характеристики «а» попадает в точку «а'», лежащую на прямой, параллельной оси абсцисс (рис. 7.27):

$$\operatorname{Im} J(\omega) = -\left(\kappa_0 - \frac{A}{k}\right),$$

где $k \geq 1$; A — амплитуда входного гармонического воздействия; κ_0 — постоянная, характеризующая ширину зоны гистерезиса релейного элемента.

На языке логарифмической характеристики релейной системы это означает, что точка «а» должна сместиться в точку «а'», т. е. на величину $20 \lg \Delta |J|$ вверх и попасть на $\left(\kappa_0 - \frac{A}{k}\right)$ -кривую (рис. 7.28). Следовательно, корректирующее устройство должно так деформировать характеристику релейной системы в диапазоне частот $\omega_1 \div \omega_2$, чтобы она проходила через точку «а».

Таким образом, нетрудно получить желаемую логарифмическую характеристику релейной системы $L_{J_{жк}} = Q[\varphi_{J_{жк}}]$, при наличии которой в релейной системе будут существовать вынужденные колебания частоты ω_0 . На рис. 7.28 желаемая характеристика $L_{J_{жк}} = Q[\varphi_{J_{жк}}]$ отмечена штриховкой. Дальнейшая методика нахождения логарифмической характеристики, а затем и передаточной функции корректирующего устройства мало чем отличается от описанного выше при нахождении параметров корректирующих звеньев в релейных системах из условия существования автоколебаний.

В заключение строим логарифмическую характеристику релейной системы при учете найденного корректирующего устройства и убеждаемся, что в системе будут существовать вынужденные движения частоты, близкой к ω_0 .

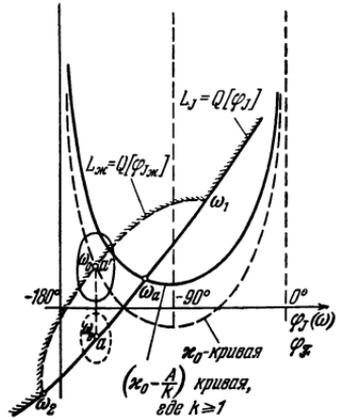


Рис. 7.28.

§ 5. Устойчивость периодических режимов в релейных системах

Изложенный выше частотный метод позволяет проводить исследование относительно простых периодических движений в релейных системах произвольного порядка. Найденные периодические движения могут физически существовать в системе только в тех случаях, когда они устойчивы. Поэтому рассмотрим кратко устойчивость периодических режимов в релейных системах для случая релейной системы произвольного порядка с идеальной релейной характеристикой. Критерий устойчивости для этого случая будет справедлив и в случае релейной характеристики с гистерезисом (Я. З. Цыпкин [2, 3, 9]).

Допустим, что $x_T(t)$ определяет найденное периодическое движение, устойчивость которого требуется

исследовать. Следуя теории устойчивости А. М. Ляпунова, будем считать, что периодический режим *устойчив*, если малые отклонения от периодического режима $\xi(t)$, вызванные достаточно малыми исчезающими внешними воздействиями $\dot{f}_H(t)$, удовлетворяющими условиям

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{f}_H(t) = 0, \quad (7.63)$$

$$\int_0^{\infty} \dot{f}_H(t) dt \leq M_f, \quad (7.64)$$

будут с течением времени также стремиться к нулю, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0 \quad (7.65)$$

или

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x_T(t) + \xi(t)] = x_T(t). \quad (7.66)$$

Таким образом, под устойчивостью периодического движения будем понимать асимптотическую устойчивость относительно найденного периодического движения $x_T(t)$. Если же при указанных выше условиях

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\xi(t)| = \infty, \quad (7.67)$$

то периодический режим *неустойчив*.

Следовательно, для исследования устойчивости периодического движения $x_T(t)$ следует получить уравнение относительно вариаций $\xi(t)$ и исследовать его устойчивость.

Как показано А. А. Андроновым и А. А. Виттом [1], а затем обобщено на более общий случай И. Г. Малкиным [1, 9, 10], по уравнению в вариациях можно судить об устойчивости исследуемого периодического движения и в так называемом критическом случае (когда $|\xi(t)|$ не удовлетворяет условиям (7.65), (7.66), но ограничено по абсолютной величине).

Перейдем теперь к составлению уравнения в вариациях относительно исследуемого периодического движения. Для этого можно воспользоваться уравнением

релейной системы, записанным в изображениях по Лапласу:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{f_0(t)\} - K_{л.ч}(p) \mathcal{L}\{\Phi(x(t))\}, \quad (7.68)$$

которое в случае простого периодического движения $x_T(t)$ с частотой ω_0 и внешнего периодического воздействия $f_{0T}(t)$ может быть переписано в следующем виде:

$$\mathcal{L}\{x_T(t)\} = \mathcal{L}\{f_{0T}(t)\} - K_{л.ч}(p) \mathcal{L}\{\Phi[x_T(t)]\}. \quad (7.69)$$

В том случае, когда отклонение от периодического режима $\xi(t)$ вызвано исчезающим внешним воздействием $f_n(t)$, приложенным к системе в момент времени $t=0$, уравнение в изображениях для возмущенного движения может быть записано как

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x_T(t) + \xi(t)\} &= \\ &= \mathcal{L}\{f_{0T}(t) + f_n(t)\} - K_{л.ч}(p) \mathcal{L}\{\Phi[x_T(t) + \xi(t)]\}. \end{aligned} \quad (7.70)$$

Вычитая (7.68) из (7.70), получаем уравнение относительно изображения $\xi(t)$:

$$\mathcal{L}\{\xi(t)\} = \mathcal{L}\{f_n(t)\} - K_{л.ч}(p) \mathcal{L}\{\Phi[x_T + \xi] - \Phi[x_T]\}. \quad (7.71)$$

Разность двух нелинейных функций

$$\Phi[x_T + \xi] - \Phi[x_T]$$

представляет собой последовательность импульсов постоянной высоты и переменной длительности, зависящей от $\xi(t)$.

Так как в рассматриваемом случае (7.71) нелинейно относительно $\xi(t)$, то предполагая, что $\xi(t)$ достаточно мало, можно представить выражение для $\mathcal{L}\{\xi(t)\}$ в следующем виде:

$$\mathcal{L}\{\xi(t)\} = \mathcal{L}\{f_n(t)\} - K_{л.ч}(p) \mathcal{L}\{\Phi'[x_T] \xi(t)\}, \quad (7.72)$$

где

$$\Phi'[x_T] = \frac{d\Phi[x_T]}{dx_T}.$$

Уравнение в вариациях (7.72), определяющее устойчивость исследуемого периодического движения, представляет собой линейное уравнение с периодическими коэффициентами.

Если предположить, что характеристика релейного элемента имеет вид, приведенный на рис. 7.29, то

$$\Phi'(x_T) = \frac{d\Phi}{dx_T} = 2k_p \delta(x_T), \quad (7.73)$$

где $\delta(x_T)$ — дельта-функция

$$\delta(x_T) = \begin{cases} = 0 & \text{при } x_T \neq 0, \\ = \infty & \text{при } x_T = 0, \end{cases} \quad (7.74)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_T) dx_T = 1. \quad (7.75)$$

Выражению (7.73) можно легко дать геометрическую трактовку, если дельта-функцию рассматривать как предел производной от кусочно-непрерывной кривой при ее

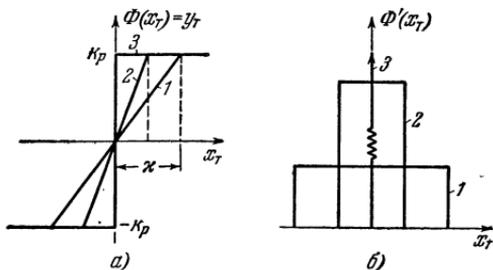


Рис. 7.29.

стремлении к разрывной характеристике релейного элемента (рис. 7.29, б). Если дельта-функцию от периодического аргумента $\delta(x_T)$ в (7.73) заменить ее выражением

$$\delta[x_T(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta(t - t_k)}{|\dot{x}_T(t_k)|}, \quad (7.76)$$

где $t_k = \frac{k\pi}{\omega_0}$, $k = 0, 1, \dots$ — корни уравнения $x_T(t) = 0$ (моменты переключения), с учетом

$$\begin{aligned} |\dot{x}_T(t_k)| &= \left| \dot{x}_T\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) \right|, \\ (k &= 0, 1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (7.77)$$

а также

$$\mathcal{L} \{ \delta(t - t_k) \xi(t) \} = e^{-pt_k} \xi(t_k),$$

то вместо (7.72) можно получить следующее уравнение относительно изображений:

$$\mathcal{L} \{ \xi(t) \} = F_n(p) - \frac{2k_p}{\left| \dot{x}_T \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \right|} K_{л. ч}(p) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-p_k \frac{\pi}{\omega_0}} \xi \left(k \frac{\pi}{\omega_0} \right). \quad (7.78)$$

Уравнению (7.78) соответствует некоторая линейная импульсная система (рис. 7.30).

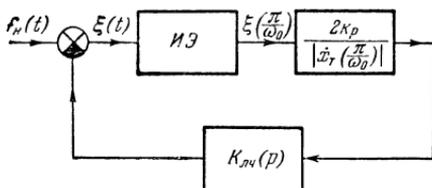


Рис. 7.30.

Импульсный элемент преобразует непрерывную входную величину $\xi(t)$ (рис. 7.31, а) в последовательность импульсных функций, площадь которых пропорциональна значениям $\xi(t)$ в дискретные равноотстоящие моменты времени (рис. 7.31, б).

Можно также показать (Я. З. Цыпкин, [2]), что при $\xi(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \mathcal{L} \{ \xi(t) \} = 0$ (7.79)

выражение

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-p_k \frac{\pi}{\omega_0}} \xi \left(k \frac{\pi}{\omega_0} \right) = \Xi^*(p) \quad (7.80)$$

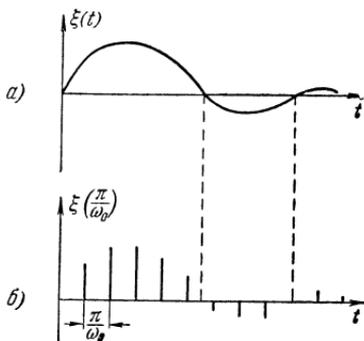


Рис. 7.31.

представляет собой дискретное преобразование Лапласа для $\xi(t)$ (Я. З. Цыпкин [10]), связанное с изображением

по Лапласу $\mathcal{L}\{\xi(t)\}$ следующим соотношением:

$$\Xi^*(p) = \frac{\omega_0}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Xi(p + 2jm\omega_0). \quad (7.81)$$

Подставляя $\Xi(p)$ из (7.81) в (7.78), окончательно получим уравнение импульсной системы (см. рис. 7.30):

$$\Xi^*(p) = F_{\text{н}}^*(p) - \frac{2k_p}{\left| \dot{x}_T \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \right|} K_{\text{л. ч}}^*(p) \Xi^*(p), \quad (7.82)$$

где

$$F_{\text{н}}^*(p) = \frac{\omega_0}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{\text{н}}(p + 2jm\omega_0), \quad (7.83)$$

$$K_{\text{л. ч}}^*(p) = \frac{\omega_0}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_{\text{л. ч}}(p + 2jm\omega_0), \quad (7.84)$$

или

$$\Xi^*(p) = K^*(p) F_{\text{н}}^*(p), \quad (7.85)$$

где

$$K^*(p) = \frac{1}{1 + \frac{2k_p}{\left| \dot{x}_T \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \right|} K_{\text{л. ч}}^*(p)} = \frac{1}{\Psi^*(p)} \quad (7.86)$$

— передаточная функция замкнутой импульсной системы (рис. 7.30).

В (7.86)

$$\tilde{K}_{\text{л. ч}}^*(p) = \frac{2k_p\omega_0}{\pi \left| \dot{x}_T \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \right|} K_{\text{л. ч}}^*(p) \quad (7.87)$$

представляет собой передаточную функцию разомкнутой импульсной системы, структурная схема которой приведена на рис. 7.30.

Можно показать (Я. З. Цыпкин [10]), что полученные уравнения остаются справедливыми и для релейной системы, имеющей релейный элемент с гистерезисом, т. е. когда $x_0 \neq 0$.

Таким образом, необходимым и достаточным условием устойчивости найденного периодического движения

некоторой частоты ω_0 является устойчивостью модели импульсной системы (рис. 7.30), характеризуемой функцией

$$\psi^*(p) = 0, \quad (7.88)$$

где

$$\psi^*(p) = 1 + K^*(p), \quad (7.89)$$

либо частотной характеристикой разомкнутой импульсной системы

$$\tilde{K}_{л.ч}^*(j\omega) = \frac{2k_p\omega_0}{\pi \left| \dot{x}_T \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \right|} \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_{л.ч}(p + 2jm\omega_0). \quad (7.90)$$

Поэтому для суждения об устойчивости можно воспользоваться одним из критериев устойчивости импульсных систем (Я. З. Цыпкин [10]).

Приведем без доказательства лишь одну форму необходимого и достаточного критерия устойчивости найденного периодического режима частоты ω_0 , основанную на использовании частотной характеристики разомкнутой импульсной системы $K_{л.ч}^*(j\omega)$. Этот критерий является аналогом амплитудно-фазового критерия Найквиста для импульсных систем.

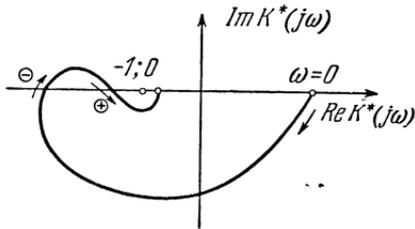


Рис. 7.32.

Допустим, что мы построили кривую $K_{л.ч}^*(j\omega)$

для $\omega_0 \geq 0$ (рис. 7.32). Назовем переход $K_{л.ч}^*(j\omega)$ при изменении ω от нуля до ω_0 через отрезок действительной оси $(-\infty; -1)$ с верхней полуплоскости в нижнюю — *положительным*, а с нижней полуплоскости в верхнюю — *отрицательным* (рис. 7.32). Тогда критерий устойчивости можно сформулировать следующим образом:

Периодический режим частоты ω_0 будет устойчивым, если разность между положительным и отрицательным переходами $K_{л.ч}^(j\omega)$ через отрезок $(-\infty; -1)$ при возрастании ω от нуля до ω_0 равна $n/2$, где n — число полюсов функции $\psi^*(p)$ передаточной функции $K_{л.ч}^*(p)$,*

лежащих в правой комплексной полуплосе (рис. 7.33). В любом другом случае периодический режим частоты ω_0 будет неустойчивым.

В случае, когда функция $\psi^*(p)$ (передаточная функция $K_{л.ч}^*(p)$) имеет n' полюсов на мнимой оси, то до-

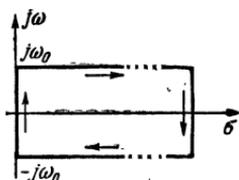


Рис. 7.33.

полняя $K_{л.ч}^*(j\omega)$ при $\omega \rightarrow 0$ дугой, бесконечно большого радиуса, центральный угол которой равен $\pi \frac{n'}{2}$,

можно использовать прежнюю формулировку критерия устойчивости.

Таким образом, используя соотношение (7.90), связывающее между собой $K_{л.ч}^*(j\omega)$ и $K_{л.ч}(j\omega)$, и построив кривую $\tilde{K}_{л.ч}^*(j\omega)$, можно судить об устойчивости периодического движения.

Для того чтобы построить кривую

$$\tilde{K}_{л.ч}^*(j\omega) = \frac{2k_p}{\pi} \frac{\omega_0}{\left| \dot{x}_T \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \right|} K_{л.ч}^*(j\omega) \quad (7.91)$$

или

$$\tilde{K}_{л.ч}^*(j\omega) = k_{\omega_0} K_{л.ч}^*(j\omega), \quad (7.92)$$

где

$$k_{\omega_0} = \frac{2k_p}{\pi} \frac{\omega_0}{\left| \dot{x}_T \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \right|}, \quad (7.93)$$

$$K_{л.ч}^*(j\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_{л.ч}[j(\omega + 2m\omega_0)], \quad (7.94)$$

необходимо предварительно вычислить значение коэффициента k_{ω_0} , который для данного периодического режима является постоянной положительной величиной.

Определение коэффициента k_{ω_0} фактически сводится к вычислению значения $\left| \dot{x}_T \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \right|$, так как значения ω_0 и k_p известны. Значение $\dot{x}_T \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right)$ можно определять в соответствии с ранее полученным выражением (см. стр. 228)

$$\frac{1}{\omega_0} \dot{x}_T \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) = \text{Re} [\mathcal{F}(\pi - \varphi_0) + J(\omega_0)]. \quad (7.95)$$

Учитывая, что выражение, стоящее в правой части, всегда отрицательно, получим

$$\left| \dot{x}_T \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \right| = - \operatorname{Re} [\mathcal{F} (\pi - \varphi_0) + J (\omega_0)]. \quad (7.96)$$

После этого нетрудно записать выражение для

$$k_{\omega_0}^{-1} = \frac{1}{k_{\omega_0}} = - \frac{\pi}{2k_p} \operatorname{Re} [\mathcal{F} (\pi - \varphi_0) + J (\omega_0)]. \quad (7.97)$$

В том случае, когда внешнее периодическое воздействие отсутствует, $\mathcal{F} \equiv 0$ и выражение для $k_{\omega_0}^{-1}$ принимает следующий вид:

$$k_{\omega_0}^{-1} = - \frac{\pi}{2k_p} \operatorname{Re} J (\omega_0). \quad (7.98)$$

Таким образом, значение $k_{\omega_0}^{-1}$ можно непосредственно определить по характеристике релейной системы с точностью до постоянного множителя $\frac{\pi}{2k_p}$ (рис. 7.34).

Однако, как следует из рассмотрения, существуют два значения коэффициента $k_{\omega_0}^{-1}$. Обычно одно из них соответствует устойчивым, а второе — неустойчивым вынужденным движениям.

Значения коэффициента $k_{\omega_0}^{-1}$ можно также определить по логарифмической характеристике релейной системы (рис. 7.35). Зная значения $L'_{\mathcal{F}}$ и $L''_{\mathcal{F}}$ в децибелах (рис. 7.35), определяем соответствующие им значения $[\operatorname{mod} \kappa_0]_{\varphi=\varphi'_{\mathcal{F}}}$ и $[\operatorname{mod} \kappa_0]_{\varphi=\varphi''_{\mathcal{F}}}$, а затем $k_{\omega_0}^{-1}$ и $k_{2\omega_0}^{-1}$:

$$\begin{aligned} k_{1\omega_0}^{-1} &= \frac{\pi}{2k_p} \operatorname{Re} [\mathcal{F} (\pi - \varphi'_{\mathcal{F}}) - J (\omega_0)] = \\ &= \frac{\pi}{k_p} [\operatorname{mod} \kappa_0]_{\varphi=\varphi'_{\mathcal{F}}} \cos \varphi'_{\mathcal{F}}, \quad (7.99) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{2\omega_0}^{-1} &= \frac{\pi}{2k_p} \operatorname{Re} [\mathcal{F} (\pi - \varphi''_{\mathcal{F}}) + J (\omega_0)] = \\ &= \frac{\pi}{k_p} [\operatorname{mod} \kappa_0]_{\varphi=\varphi''_{\mathcal{F}}} \cos \varphi''_{\mathcal{F}}. \quad (7.100) \end{aligned}$$

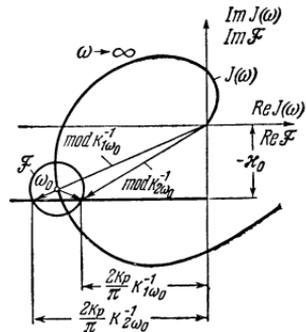


Рис. 7.34.

Для большинства устойчивых и нейтральных в разомкнутом состоянии систем автоматического управления, у которых $\tilde{K}^*(j\omega)$ не имеет пересечений с действительной осью при $\omega < \omega_0$, эквивалентная импульсная система, а следовательно, периодические движения будут неустойчивыми для больших значений k_{ω_0} . Если это так, то для случая, приведенного на рис. 7.34, при $k_{2\omega_0}^{-1}$ вынужденные движения будут устойчивыми, а при $k_{2\omega_0}^{-1}$ — неустойчивыми. В этом случае условие устойчивости будет иметь следующий вид:

$$-k_{\omega_0}^{-1} < K_{л.ч}^*(j\omega_0) = U^*(\omega_0), \quad (7.101)$$

где

$$U^*(\omega_0) = \text{Re } K_{л.ч}^*(j\omega_0).$$

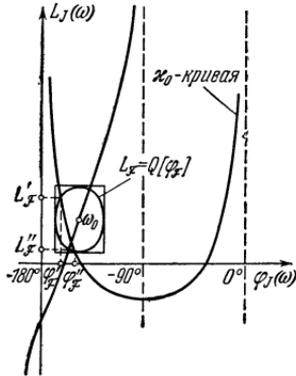


Рис. 7.35.

Следовательно, устойчивость вынужденных движений можно определить непосредственно по характеристике релейной системы. В более общем случае, когда $K_{л.ч}^*(j\omega)$ при $\omega < \omega_0$ пересекает действительную ось левее точки $U^*(\omega)$, неравенство (7.101) является лишь необходимым условием устойчивости.

Поэтому в этом случае для суждения об устойчивости следует построить кривую

$$\tilde{K}_{л.ч}^*(j\omega) = k_{\omega_0} K_{л.ч}^*(j\omega). \quad (7.102)$$

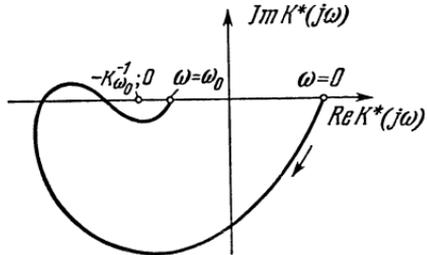


Рис. 7.36.

Иногда вместо кривой $\tilde{K}_{л.ч}^*(j\omega)$ строят кривую $K_{л.ч}^*(j\omega)$. В этих случаях приведенная выше формулировка критерия устойчивости остается прежней, если вместо точки $(-1; 0)$ рассматривать точку $(-k_{\omega_0}^{-1}; 0)$ (рис. 7.36).

Так же как и в случае вынужденных движений, значения коэффициента $k_{\omega_0}^{-1}$ можно непосредственно опре-

делить по характеристике релейной системы. При $\mathcal{F} \equiv 0$ значение коэффициента $k_{\omega_0}^{-1}$ может быть определено на основе следующих соотношений:

$$k_{\omega_0}^{-1} = -\frac{\pi}{2k_p} \operatorname{Re} J(\omega_0) \quad (7.103)$$

или

$$k_{\omega_0}^{-1} = K_{\text{л.ч}}^*(j\omega_0) = U^*(\omega_0).$$

Это значение $k_{\omega_0}^{-1}$ можно определить и по логарифмической характеристике релейной системы (рис. 7.37). Для этого определяем $L_J(\omega_0)$:

$$L_J(\omega_0) = 20 \lg \operatorname{mod} J(\omega_0). \quad (7.104)$$

Зная $L_J(\omega_0)$ и $\varphi(\omega_0)$, определяем искомое значение коэффициента

$$k_{\omega_0}^{-1} = \frac{\pi}{2k_p} \operatorname{mod} J(\omega_0) \cos \varphi(\omega_0). \quad (7.105)$$

Таким образом, в случае отсутствия внешнего периодического воздействия, характеристика $K_{\text{л.ч}}^*(j\omega)$ при $\omega = \omega_0$ проходит через точку $(-k_{\omega_0}^{-1}, 0)$ и, следовательно, эквивалентная импульсная система находится на границе устойчивости. Это означает, что корень функции $\psi^*(p)$ равен $p = j\omega_0$.

В соответствии с теоремой А. А. Андронова и А. А. Витта [2] в данном критическом случае для устойчивости автоколебаний частоты $\omega = \omega_0$ необходимо и достаточно, чтобы все корни функции $\psi^*(p)$, за исключением корня $p = j\omega_0$, имели бы отрицательные действительные части.

Для того чтобы применить сформулированный выше критерий устойчивости в данном случае, нужно определить, с какой стороны кривая $K_{\text{л.ч}}^*(j\omega)$ при $\omega = \omega_0$ подходит к интервалу $(-\infty; k_{\omega_0}^{-1})$.

Для этого исследуем поведение $K_{\text{л.ч}}^*(j\omega)$ вблизи точки $\omega = \omega_0$ (рис. 7.38). Рассмотрим $K_{\text{л.ч}}^*(j\omega)$ при $\omega = \omega_0 - \Delta\omega$ ($\Delta\omega > 0$; $\Delta\omega \ll \omega_0$).

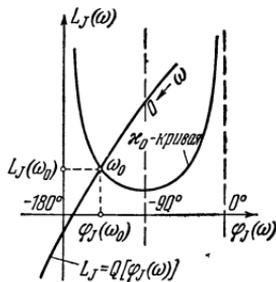


Рис. 7.37.

Разлагая $K_{л.ч}^* [j(\omega_0 - \Delta\omega)]$ в ряд и ограничиваясь лишь двумя членами, получим

$$K_{л.ч}^* [j(\omega_0 - \Delta\omega)] \approx K_{л.ч}^* (j\omega_0) - \left[\frac{dK_{л.ч}^* (j\omega)}{d\omega} \right]_{\omega=\omega_0} \Delta\omega. \quad (7.106)$$

Можно также показать (см. Я. З. Цыпкин [8], стр. 310—311), что

$$K_{л.ч}^* [j(\omega_0 - \Delta\omega)] \approx -k_{\omega_0}^{-1} - j \frac{\pi}{2k_p} \frac{d \operatorname{Im} J(\omega_0)}{d\omega_0} \Delta\omega. \quad (7.107)$$

Из (7.107) следует, что при

$$\frac{d \operatorname{Im} J(\omega_0)}{d\omega_0} > 0 \quad (7.108)$$

кривая $K_{л.ч}^* (j\omega)$ подходит к точке $(k_{\omega_0}^{-1}; 0)$ в третьем квадранте (рис. 7.38, кривая 1), а при

$$\frac{d \operatorname{Im} J(\omega_0)}{d\omega_0} < 0$$

кривая $K_{л.ч}^* (j\omega)$ подходит к этой точке $(k_{\omega_0}^{-1}; 0)$ во втором квадранте (рис. 7.38, кривая 2).

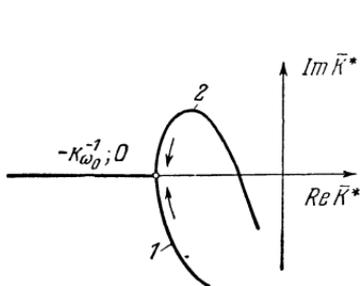


Рис. 7.38.

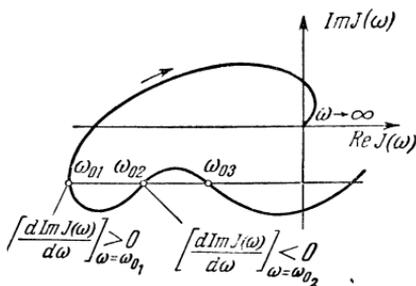


Рис. 7.39.

Знак $\frac{d \operatorname{Im} J(\omega_0)}{d\omega_0}$ определяется поведением характеристики релейной системы $J(\omega)$ в точках пересечения ее с отрицательной частью прямой $\operatorname{Im} J(\omega) = -k_0$, т. е. в точках, соответствующих частотам возможных автоколебаний (рис. 7.39).

Для релейных систем, в которых линейная часть устойчива или нейтральна и отсутствует пересечение характеристики $K_{л.ч}^*(j\omega)$ с прямой $-\chi_0$ при $\omega < \omega_0$, при

$$\left[\frac{d \operatorname{Im} J(\omega)}{d\omega} \right]_{\omega=\omega_0} > 0 \quad (7.109)$$

автоколебания частоты ω_0 являются *устойчивыми*.

В более общем случае условие (7.109) является лишь *необходимым* условием устойчивости.

Если использовать логарифмические характеристики релейных систем, то при удовлетворении необходимого условия устойчивости (7.109) кривая $L_J(\omega) = Q[\varphi_J(\omega)]$ пересекает кривую χ_0 изнутри наружу (рис. 7.40).

В заключение отметим, что необходимое условие устойчивости было получено Я. З. Цыпкиным [3], П. В. Бромбергом [3] и Ю. И. Неймарком [3].

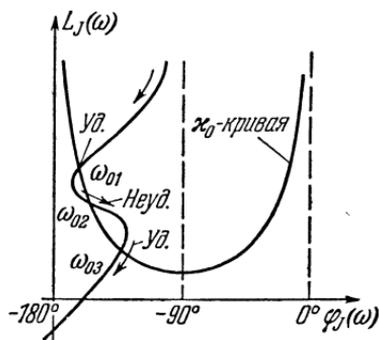


Рис. 7.40.

§ 6. Примеры исследования автоколебаний и вынужденных движений в релейных системах

1. Анализ автоколебаний в релейных системах.

В качестве первого примера определим частоту автоколебаний при помощи изложенного выше метода логарифмических характеристик в релейной системе с замедленной обратной связью (рис. 7.41), которая подробно исследовалась в работах Н. А. Королева [1, 2]. Структурная схема системы приведена на рис. 7.41, где

$$K_k(p) = \frac{k_0}{T_0 p + 1},$$

$$K_{л.ч.}(p) = \frac{k_{л.ч.}}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)},$$

где $k_0 = 2,0$; $T_0 = 0,01$ сек; $k_{л.ч.} = 75$; $T_1 = 0,05$ сек; $T_2 = 0,03$ сек; коэффициент усиления реле $k_p = 1$.

Передаточная функция линейной части системы имеет следующий вид:

$$K_{л.ч}(p) = \frac{k_0}{T_0 p + 1} + \frac{k_{л.ч}}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}.$$

Для определения частоты автоколебаний при помощи логарифмических характеристик поступим следующим образом:

1. Прежде чем строить логарифмическую характеристику релейной системы, определим отдельно логарифмические амплитудную и фазовую характеристики для первой и второй составляющих $J_1(\omega)$ и $J_2(\omega)$.

Первая составляющая $J_1(\omega)$ отличается от частотной характеристики линейной части системы $K_{л.ч}(j\omega)$ лишь множителем $\frac{4}{\pi} k_p$:

$$J_1(\omega) = \frac{4}{\pi} k_p [K_k(j\omega) + K_{л.ч.1}(j\omega)] = J_{1к}(\omega) + J_{1л.ч.1}(\omega). \quad (7.110)$$

Допустим, что нам известны логарифмические характеристики, соответствующие каждому слагаемому, т. е. известны $L_{J_{1к}}(\omega) = 20 \lg \text{mod } J_{1к}(\omega)$, $\varphi_{J_{1к}} = \arg J_{1к}(\omega)$,

$J_{1л.ч.1}(\omega) = 20 \lg \text{mod } J_{1л.ч.1}(\omega)$ и $\varphi_{J_{1л.ч.1}} = \arg J_{1л.ч.1}(\omega)$ — логарифмические амплитудная и фазовая характеристики, соответствующие первому и второму слагаемому в (7.110). Для определения логарифмических амплитудной и фазовой характеристик для первой составляющей $L_{J_1}(\omega)$ и $\varphi_{J_1}(\omega)$,

$$L_{J_1}(\omega) = 20 \lg \text{mod } J_1(\omega),$$

$$\varphi_{J_1}(\omega) = \arg J_1(\omega),$$

воспользуемся номограммой А. И. Гузенко (см. гл. I). Как было отмечено выше, эта номограмма позволяет по известным $L_{J_{1к}}(\omega)$, $\varphi_{J_{1к}}(\omega)$ и $L_{J_{1л.ч.1}}(\omega)$, $\varphi_{J_{1л.ч.1}}(\omega)$

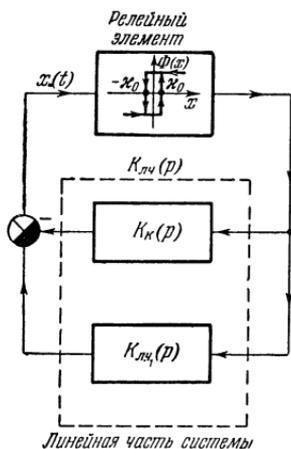


Рис. 7.41.

определить искомые $L_{J_1}(\omega)$ и $\varphi_{J_1}(\omega)$. Для этого построим вначале $\Delta L_1(\omega) = L_{J_{1л.ч.}}(\omega) - L_{J_{1к.}}(\omega)$, $\Delta\varphi_1(\omega) = \varphi_{J_{1л.ч.}}(\omega) - \varphi_{J_{1к.}}(\omega)$ (рис. 7.42), а затем перестроим их в декартовой системе координат (рис. 7.44, кривая 1).

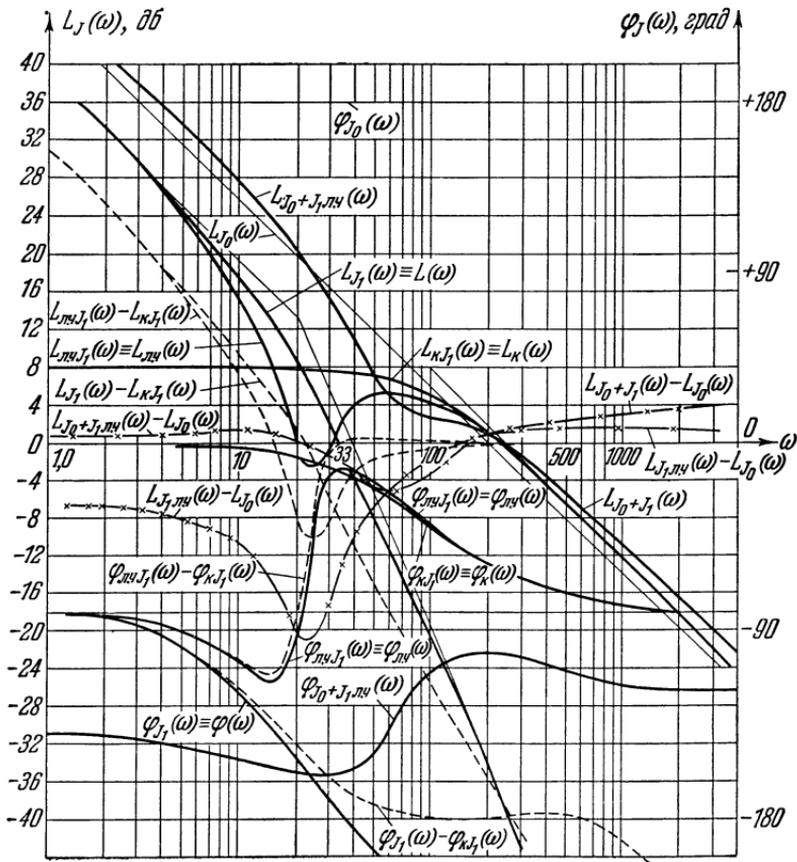


Рис. 7.42.

Тогда, используя номограмму, мы можем определить $L_{J_1}(\omega) - L_{J_{1к.}}(\omega)$ и $\varphi_{J_1}(\omega) - \varphi_{J_{1к.}}(\omega)$ (рис. 7.43), прибавляя к которым $L_{J_{1к.}}(\omega)$ и $\varphi_{J_{1к.}}(\omega)$, получаем искомые $L_{J_1}(\omega)$ и $\varphi_{J_1}(\omega)$.

Аналогичным образом определяются логарифмические характеристики релейной системы для второй составляющей:

$$J_2(\omega) = J_{2к}(\omega) + J_{2л.ч1}(\omega). \quad (7.111)$$

Для этого вначале строим амплитудную и фазовую характеристики для каждого слагаемого (7.111), т. е.

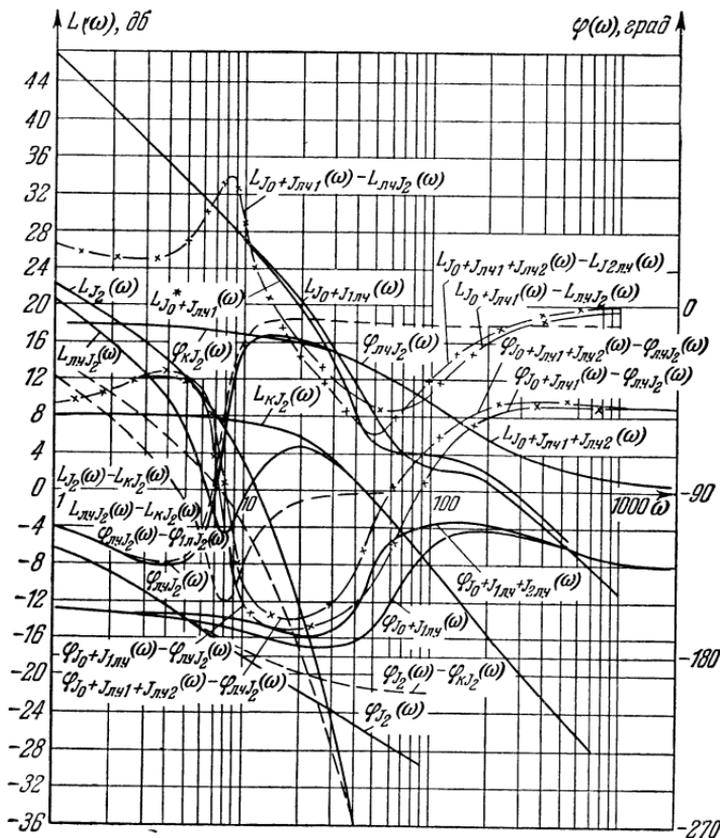


Рис. 7.43.

$L_{J_{2к}}(\omega)$, $\varphi_{J_{2к}}(\omega)$ и $L_{J_{2л.ч1}}(\omega)$, $\varphi_{J_{2л.ч1}}(\omega)$ (рис. 7.43), а затем по номограмме находим логарифмические характеристики, соответствующих сумме (7.111).

Для получения логарифмических характеристик $L_{J_2}(\omega)$ и $\varphi_{J_2}(\omega)$ строим вначале

$$\Delta L_2 = L_{J_{2\text{ л. ч. 1}}}(\omega) - L_{J_{2\text{ к}}}(\omega),$$

$$\Delta\varphi_2 = \varphi_{J_{2\text{ л. ч. 1}}}(\omega) - \varphi_{J_{2\text{ к}}}(\omega),$$

затем перестраиваем их в декартовой системе координат на плоскости номограммы (рис. 7.44) и определяем

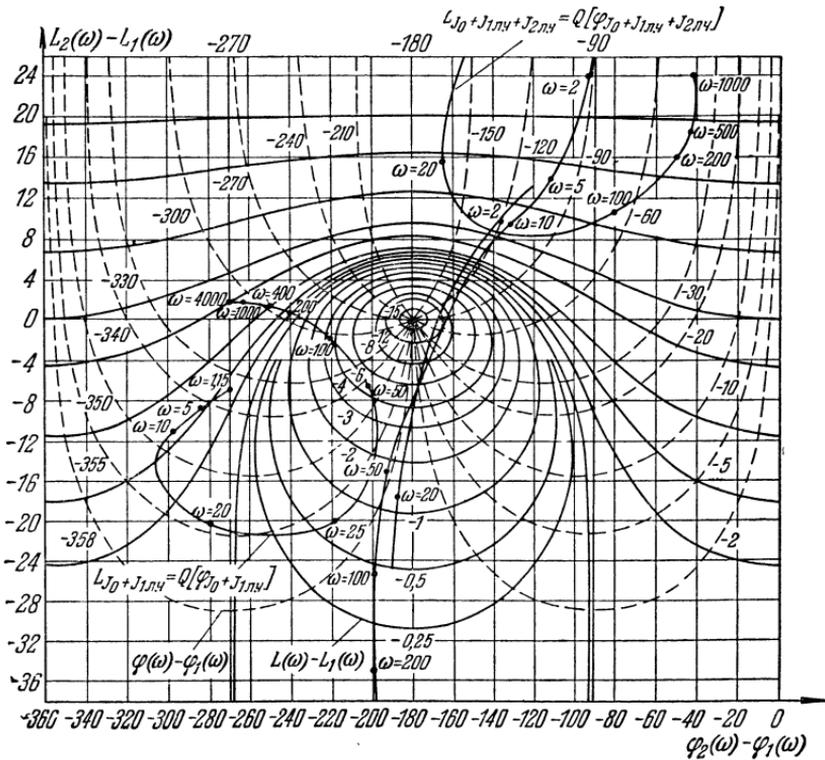


Рис. 7.44.

$$L_{J_0 + J_1}(\omega) - L_{J_0}(\omega), \quad \varphi_{J_0 + J_1}(\omega) - \varphi_{J_0}(\omega).$$

Так как $L_{J_0}(\omega)$ и $\varphi_{J_0}(\omega)$ известны, то не представляет трудности определить искомые $L_{J_0 + J_1}$ и $\varphi_{J_0 + J_1}$, а затем

перестроить их в декартовой системе координат (рис. 7.45).

2. Воспользуемся номограммой для нахождения логарифмической характеристики релейной системы,

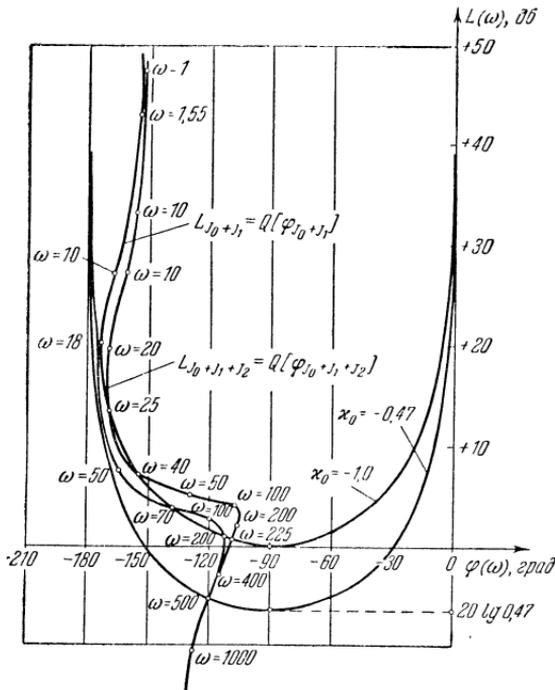


Рис. 7.45.

соответствующей учету нулевой, первой и второй составляющих.

Для этого строим:

$$L_{J_2}(\omega) - L_{J_1+J_2}(\omega),$$

$$\varphi_{J_2}(\omega) - \varphi_{J_1+J_2}(\omega),$$

перестраиваем их затем в декартовой системе координат, и по номограмме определяем

$$L_J(\omega) - L_{J_1+J_2}(\omega),$$

$$\varphi_J(\omega) - \varphi_{J_1+J_2}(\omega).$$

После этого легко определить искомые $L_J(\omega)$ и $\varphi_J(\omega)$. Логарифмическая характеристика релейной системы в декартовой системе координат, соответствующая учету трех составляющих $J_0(\omega)$, $J_1(\omega)$ и $J_2(\omega)$, изображена на рис. 7.45.

3. Теперь для определения частоты автоколебаний в рассматриваемой системе необходимо, кроме логарифмической характеристики релейной системы, построить также κ_0 -кривую при двух заданных значениях:

$$\kappa_0 = -0,47; -1,0 \text{ (рис. 7.45).}$$

4. Как следует из рис. 7.45, в зависимости от того, учитывались ли две или три составляющих релейной системы, получились разные результаты. При учете двух

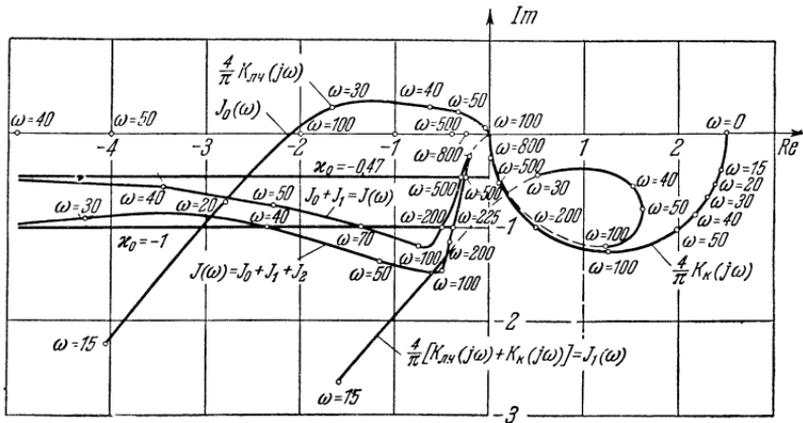


Рис. 7.46.

составляющих получаем пересечения для $\kappa_0 = -1$ при значениях $\omega = 20; 70; 200$, а при учете трех составляющих — при $\omega = 25; 40; 225$.

Нетрудно видеть, что полученные результаты полностью совпадают с тем, что имеет место при использовании не логарифмических, а обычных характеристик релейной системы (рис. 7.46).

В заключение отметим, что использование для анализа автоколебаний логарифмических характеристик релейных систем позволяет в ряде случаев при

исследовании релейных систем высокого порядка получить искомый результат с меньшей затратой времени.

2. Синтез релейных систем из условия существования автоколебаний с заданными параметрами. В качестве второго примера рассмотрим релейную систему

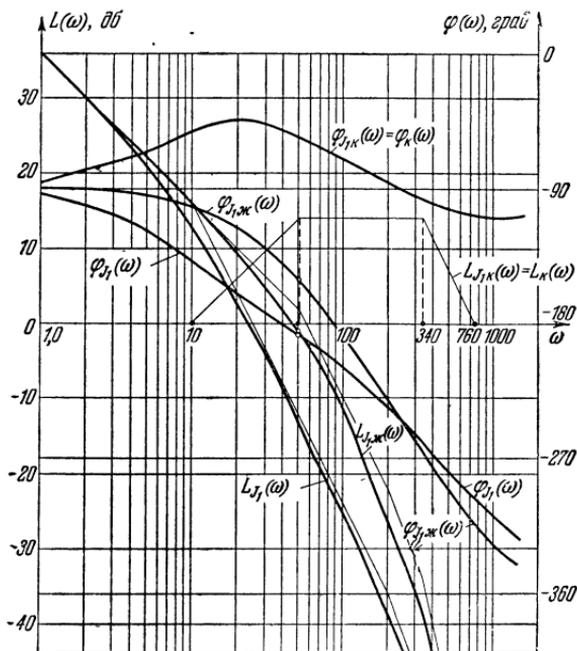


Рис. 7.47.

с гистерезисным релейным элементом, у которого $\kappa_0 = -0,47$, а передаточная функция линейной части системы имеет следующий вид:

$$K_{\text{л. ч}}(p) = \frac{k_{\text{л. ч}}}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)},$$

где $k_{\text{л. ч}} = 36$; $T_1 = 0,1$ сек; $T_2 = 0,05$ сек.

Для данной системы, используя метод логарифмических характеристик, определим частоту автоколебаний, а затем синтезируем последовательное корректирующее устройство (определим его передаточную функцию), при

АВТОКОЛЕБАНИЯ И ВЫНУЖДЕННЫЕ ДВИЖЕНИЯ В СИСТЕМАХ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ НЕЛИНЕЙНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ (МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА)

Так же как и в релейных системах, в системах с произвольными нелинейными характеристиками при выполнении определенных условий могут существовать автоколебания, форма которых во многих случаях близка к гармонической.

Начиная с 40-х годов, широкое применение находят приближенные методы исследования периодических режимов, получившие в СССР название метода гармонического баланса. Математические основы этого метода были разработаны в трудах академиков Н. М. Крылова (1934) и Н. Н. Боголюбова (1937) и получили дальнейшего развития в работах советских и зарубежных ученых как для исследования периодических режимов при отсутствии внешних воздействий, так и при их наличии.

Здесь следует назвать имена советских ученых Б. В. Булгакова [1—6], Л. С. Гольдфарба [1—4], А. И. Лурье [1—8], В. А. Котельникова [1], К. Ф. Теодорчика [1—3], Е. П. Попова [1—7], М. А. Айзермана [3—6], а также Р. Коченбургера [1, 2] в США, В. Оппельта [1] в ФРГ, А. Тастина [1—3] в Англии, Ж. Д. Лозба [1] и П. Наслена [1] во Франции и многих других. Литература, посвященная методу гармонического баланса, весьма обширна, так как до последнего времени этот метод был одним из основных методов, использовавшихся при исследовании нелинейных систем высокого порядка.

В данной главе будет изложена сущность метода гармонического баланса и его использование для анализа автоколебаний и вынужденных движений, а также для решения некоторых задач синтеза. Особое внимание уделяется, в частности, применению логарифмических частотных характеристик. Приведены примеры, иллюстрирующие изложенную методику.

§ 1. Приближенное исследование автоколебаний в нелинейных системах (метод гармонического баланса)

1. Сущность метода гармонического баланса. Рассмотрим нелинейную систему автоматического управления при внешнем воздействии $f_0(t) \equiv 0$ (рис. 8.1).

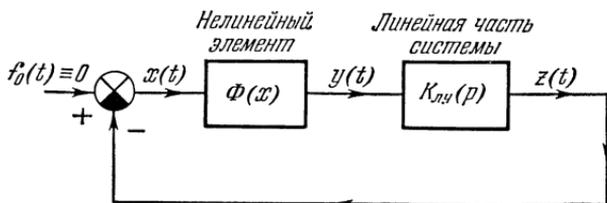


Рис. 8.1.

Пусть нелинейный элемент характеризуется некоторой нечетной симметричной нелинейной функцией

$$y = \Phi(x), \quad (8.1)$$

а линейная часть системы — передаточной функцией

$$K_{\text{л.ч}}(p) = \frac{\mathcal{L}\{z(t)\}}{\mathcal{L}\{y(t)\}} = \frac{b_0 p^m + \dots + b_m}{a_0 p^n + \dots + a_n} = \frac{Q(p)}{P(p)}, \quad (8.2)$$

либо частотной характеристикой $K_{\text{л.ч}}(j\omega)$.

Замкнутая система (рис. 8.1) характеризуется следующим уравнением в изображениях по Лапласу:

$$P(p) \mathcal{L}\{x(t)\} + Q(p) \mathcal{L}\{\Phi(x(t))\} = 0, \quad (8.3)$$

либо нелинейным дифференциальным уравнением

$$\left(a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_n x \right) + \left(b_0 \frac{d^m y}{dt^m} + \dots + b_m y \right) = 0, \quad \left. \begin{array}{l} \\ y = \Phi(x). \end{array} \right\} \quad (8.4)$$

Предположим, что в рассматриваемой системе возможен периодический режим $x_T(t)$, который приближенно может быть охарактеризован гармонической функцией

$$x_T(t) = A \sin \omega_0 t, \quad (8.5)$$

где A и ω_0 — подлежащие определению амплитуда и частота периодического (гармонического) режима на входе нелинейного элемента.

Тогда сигнал на выходе нелинейного элемента

$$y_{\tau}(t) = \Phi(A \sin \omega_0 t) \quad (8.6)$$

представляет собой периодическую функцию времени, которая в том случае, когда характеристика $y = \Phi(x)$ — нечетная симметричная функция, может быть представлена в виде ряда Фурье

$$y_{\tau}(t) = B_1(A) \sin \omega_0 t + C_1(A) \cos \omega_0 t + \dots, \quad (8.7)$$

где

$$B_1(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(A \sin \psi) \sin \psi \, d\psi; \quad (8.8)$$

$$C_1(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(A \sin \psi) \cos \psi \, d\psi; \quad (8.9)$$

$$\psi = \omega_0 t.$$

Вообще говоря, выходная величина нелинейного элемента в большинстве случаев представляет собой сумму бесконечного числа гармонических составляющих. Однако благодаря тому, что обычно линейная часть системы представляет собой низкочастотный фильтр

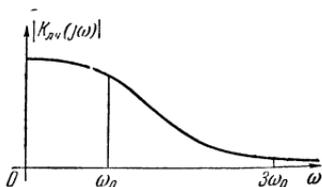


Рис. 8.2.

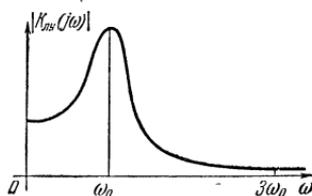


Рис. 8.3.

(рис. 8.2), либо проявляет резонансные свойства на частоте, близкой к ω_0 (рис. 8.3), гармонические составляющие при $\omega > \omega_0$ имеют очень малые амплитуды и ими можно пренебречь, что позволяет считать сигнал на входе нелинейного элемента гармоническим с частотой ω_0 .

Приведенные выше предположения, лежащие в основе метода гармонического баланса, обычно принято называть гипотезами фильтра и авторезонанса.

В тех же случаях, когда условия гипотезы фильтра и авторезонанса не выполняются, решение в виде (8.5) искать нельзя, и задача исследования периодических движений в нелинейных системах значительно усложняется. Однако в дальнейшем в данной главе мы будем предполагать, что наше предположение о гармонической форме сигнала на входе нелинейного элемента (выходе линейной части системы) выполняется.

В процессе исследования может оказаться, что в системе могут иметь место несколько периодических движений, например, два:

$$x_{1T}(t) = A_1 \sin \omega_{01} t,$$

$$x_{2T}(t) = A_2 \sin \omega_{02} t.$$

Поэтому второй задачей, которую необходимо решить, является исследование устойчивости периодических движений.

В результате требуется определить амплитуду и частоту устойчивого периодического движения, т. е. амплитуду и частоту простых автоколебаний, имеющих гармоническую форму.

Следует отметить, что если метод гармбаланса указывает на отсутствие периодических движений, либо найденные периодические движения — неустойчивые, то это, вообще говоря, еще не значит, что в исследуемой системе нет автоколебаний. Это лишь означает, что не существует автоколебаний, имеющих форму, близкую к гармонической; но могут, вообще говоря, иметь место автоколебания более сложной формы.

Перейдем теперь к выводу соотношений, которые позволяют по известной частотной характеристике линейной части системы $K_{л.ч}(j\omega)$ и характеристике нелинейного элемента $y = \Phi(x)$ определять амплитуду A и частоту ω_0 искомого гармонического периодического режима.

Подставим в дифференциальное уравнение (8.4) вместо $x(t)$ и $y(t)$ соответствующие им выражения

$$x_T(t) = A \sin \omega_0 t, \quad (8.10)$$

$$y_T(t) = B_1(A) \sin \omega_0 t + C_1(A) \cos \omega_0 t, \quad (8.11)$$

и приравняем стоящие в левой и правой частях составляющие при $\sin \omega_0 t$ и $\cos \omega_0 t$.

В результате получим:

$$A \operatorname{Re} P(j\omega_0) = B_1(A) \operatorname{Re} Q(j\omega_0) - C_1(A) \operatorname{Im} Q(j\omega_0), \quad (8.12)$$

$$A \operatorname{Im} P(j\omega_0) = B_1(A) \operatorname{Im} Q(j\omega_0) + C_1(A) \operatorname{Re} Q(j\omega_0), \quad (8.13)$$

где

$$P(j\omega_0) = \operatorname{Re} P(j\omega_0) + j \operatorname{Im} P(j\omega_0), \quad (8.14)$$

$$Q(j\omega_0) = \operatorname{Re} Q(j\omega_0) + j \operatorname{Im} Q(j\omega_0), \quad (8.15)$$

$$P(j\omega_0) = [P(p)]_{p=j\omega_0},$$

$$Q(j\omega_0) = [Q(p)]_{p=j\omega_0}.$$

Умножив уравнение (8.13) на j , сложив его с (8.12), после несложных преобразований получим

$$AP(j\omega_0) = -[B_1(A) + jC_1(A)]Q(j\omega_0) \quad (8.16)$$

или

$$K_{\text{л. ч}}(j\omega_0) = -\frac{1}{J_{\text{н. э}}(A)}, \quad (8.17)$$

где

$$K_{\text{л. ч}}(j\omega_0) = \frac{Q(j\omega_0)}{P(j\omega_0)}, \quad (8.18)$$

$$J_{\text{н. э}}(A) = \frac{B_1(A) + jC_1(A)}{A}. \quad (8.19)$$

$J_{\text{н. э}}(A)$ — эквивалентный комплексный коэффициент усиления нелинейного элемента *).

Если представить $J_{\text{н. э}}(A)$ в экспоненциальной форме

$$J_{\text{н. э}}(A) = |J_{\text{н. э}}(A)| e^{+j\theta_{\text{н. э}}(A)}, \quad (8.20)$$

где

$$|J_{\text{н. э}}(A)| = \operatorname{mod} J_{\text{н. э}}(A) = \sqrt{B_1^2(A) + C_1^2(A)}, \quad (8.21)$$

$$\theta_{\text{н. э}}(A) = \arg J_{\text{н. э}}(A), \quad (8.22)$$

*) В литературе можно также встретить названия — «эквивалентный адмитанс» либо «описывающая функция». Последнее название является переводом американского термина «describing function».

то $|J_{н.э}(A)|$ представляет собой отношение амплитуды первой гармоники частоты ω_0 на выходе нелинейного элемента к амплитуде гармонического входного сигнала, $\Theta_{н.э}(A)$ — сдвиг фазы первой гармоники частоты ω_0 на выходе нелинейного элемента по отношению к гармоническому входному сигналу.

Полученное выражение (8.17), позволяющее определить частоту ω_0 и амплитуду искомого периодического решения A , лежит в основе разновидностей метода гармонического баланса. Для определения ω_0 и A необходимо знать частотную характеристику линейной части системы $K_{л.ч}(j\omega)$ и эквивалентный комплексный коэффициент усиления нелинейного элемента.

В заключение отметим, что в случае, когда в передаточной функции линейной части системы $a_n \neq 0$ и $b_m \neq 0$, или в случае несимметричных нелинейностей решение следует искать в виде

$$x_T(t) = x_0 + A \sin \omega_0 t. \quad (8.23)$$

Тогда

$$y_T(t) = y_0(x_0, A) + B_1(A) \sin \omega_0 t + C_1(A) \cos \omega_0 t, \quad (8.24)$$

где

$$y_0(x_0, A) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(A \sin \psi) d\psi, \quad (8.25)$$

$$\psi = \omega_0 t.$$

Поступая точно так же, как это было сделано в случае $x_0 \equiv 0$, получим следующие два соотношения, позволяющие в данном случае определять уже не два, а три параметра x_0 , ω_0 , A :

$$\left. \begin{aligned} K_{л.ч}(j\omega) &= -\frac{1}{J_{н.э}(A)}, \\ a_n x_0 &= b_n y_0(x_0, A). \end{aligned} \right\} \quad (8.26)$$

Тогда, вычислив $y_0(x_0, A)$ и построив кривую зависимости y_0 от x_0 для разных A , можно при помощи простых геометрических построений определить значения x_0 и A , удовлетворяющие и условию (8.17). В данном случае каждой точке эквивалентного комплексного коэффициента усиления соответствует свое значение ω_0 и свое

значение A . Так как случай, соответствующий $x_0 \neq 0$, встречается сравнительно редко, в дальнейшем будем предполагать $x_0 \equiv 0$.

2. Различные методы вычисления $J_{н.э}(A)$. Существуют различные методы определения эквивалентного комплексного коэффициента усиления для нелинейных элементов. Рассмотрим кратко некоторые из них.

Аналитический метод вычисления $J_{н.э}(A)$ для типовых нелинейностей. Аналитический метод вычисления эквивалентного комплексного коэффициента усиления нелинейного элемента основан на определении выражений для $B_1(A)$ и $C_1(A)$:

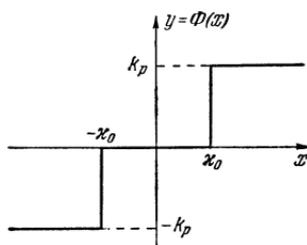


Рис. 8.4.

$$B_1(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(A \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad (8.27)$$

$$C_1(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(A \sin \psi) \cos \psi d\psi, \quad (8.28)$$

$$\psi = \omega_0 t.$$

В частном случае, когда характеристика нелинейного элемента описывается нечетной однозначной функцией, $C_1(A) \equiv 0$ и, следовательно:

$$J_{н.э}(A) = \frac{B_1(A)}{A}. \quad (8.29)$$

Пример. Вычислим эквивалентный комплексный коэффициент усиления для релейной характеристики с зоной нечувствительности (рис. 8.4). В этом случае коэффициент

$$C_1(A) \equiv 0$$

и достаточно вычислить коэффициент $B_1(A)$.

Выражение для нелинейной функции $y = \Phi(x)$ может быть записано в следующем виде (рис. 8.4):

$$y = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \leq x_0; \\ k_p & \text{при } x > x_0; \\ -k_p & \text{при } x < -x_0. \end{cases} \quad (8.30)$$

Используя (8.8), а также симметрию выходной величины (рис. 8.5), нетрудно определить выражение для $B_1(A)$:

$$B_1(A) = \frac{4}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi/2} k_p \sin \psi d\psi = \frac{4k_p}{\pi} \cos \alpha, \quad (8.31)$$

где

$$\alpha = \arcsin \frac{x_0}{A},$$

или с учетом (8.29) окончательно получаем:

$$J_{н.э.}(A) = \frac{4}{\pi} \frac{k_p}{x_0} \frac{1}{A} \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{A}{x_0}\right)^2}}. \quad (8.32)$$

График этой зависимости показан на рис. 8.6. Максимум

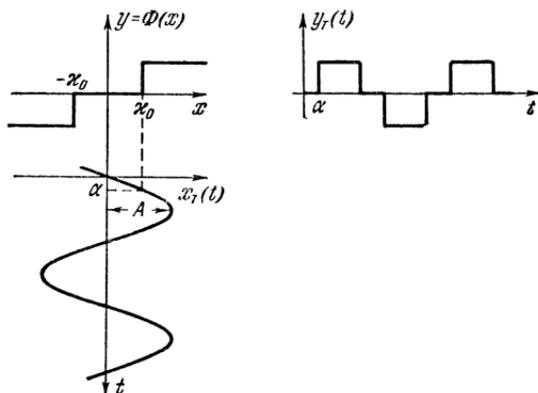


Рис. 8.5.

$J_{н.э.}(A)$ достигается при $\frac{A}{x_0} = \sqrt{2}$. Если $A \rightarrow \infty$, то $J_{н.э.}(A) \rightarrow 0$.

Аналогичным образом можно определить выражения для эквивалентных комплексных коэффициентов усиления остальных типовых нелинейностей. Найденные таким образом выражения даны в таблице, приведенной в приложении 7.

Приближенные методы определения $J_{н.э.}(A)$ для произвольных нелинейностей, заданных графически.

Метод Я. З. Цыпкина. В ряде случаев характеристика нелинейного элемента бывает задана графически. Я. З. Цыпкиным был предложен приближенный метод, позволяющий находить график $J_{н.э.}(A)$ по заданной графически характеристике нелинейного элемента. Этот метод пригоден лишь для однозначных нелинейных

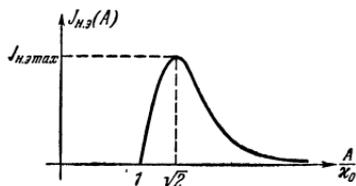


Рис. 8.6.

симметричных характеристик и, как будет видно из дальнейшего, по существу представляет собой метод приближенного вычисления интеграла (8.27).

В связи с тем, что кривая на выходе нелинейного элемента представляет собой симметричную функцию,

достаточно определить выражение для $J_{н.э.}(A)$, например, в интервале от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ и полученное выражение умножить на два. С учетом сделанного замечания можно записать следующее выражение для $J_{н.э.}(A)$, соответствующее произвольной однозначной симметричной характеристике:

$$J_{н.э.}(A) = \frac{2}{\pi A} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \Phi(A \sin \psi) \sin \psi d\psi.$$

После введения новой переменной

$$\rho = A \sin \psi,$$

$$d\rho = A \cos \psi d\psi,$$

$$\cos \psi = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{A}\right)^2}.$$

Знак в последнем выражении берется положительным при значениях ψ , лежащих в первом и четвертом квадрантах, и отрицательным — в двух других случаях. После перехода к новой переменной $\bar{\rho}$ выражение для $J_{н.э.}(A)$ можно записать так:

$$J_{н.э.}(A) = \frac{2}{\pi A} \int_{-1}^{+1} \frac{\bar{\Phi}(\bar{\rho})}{\sqrt{1 - \bar{\rho}^2}} d\bar{\rho}, \quad (8.33)$$

где

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{A},$$

$$\bar{\Phi}(\bar{\rho}) = \Phi(\bar{\rho}) \bar{\rho}.$$

Интеграл (8.33) можно вычислить при помощи следующей приближенной формулы:

$$J_{н.э}(A) = \frac{2}{A} \left[\frac{1}{6} \bar{\Phi}(1) - \bar{\Phi}(-1) + 2\bar{\Phi}\left(\frac{1}{2}\right) - \right. \\ \left. - 2\bar{\Phi}\left(-\frac{1}{2}\right) + R \right], \quad (8.34)$$

где

$$R = -\frac{\Phi^{(6)}(\xi)}{2^5 \cdot 6!} \quad (8.35)$$

для $-1 < \xi < +1$.

Заменяя $\bar{\Phi}(\bar{\rho})$ на $\Phi(\bar{\rho})\bar{\rho}$ и отбрасывая остаточный член, получим следующее приближенное выражение для $J_{н.э}(A)$:

$$J_{н.э}(A) \approx \frac{2}{3A} \left[\Phi(A) + \Phi\left(\frac{A}{2}\right) \right]. \quad (8.36)$$

Полученное выражение позволяет получить хорошее приближение к истинному выражению $J_{н.э}(A)$ в тех случаях, когда шестая производная от $x\Phi(x)$ по x мала на интервале изменения x ($-x_{\max} < x < x_{\max}$).

Если же $x\Phi(x)$ — полином не выше шестой степени, то, например, при

$$\Phi(x) = ax - bx^3$$

выражение для $J_{н.э}(A)$ можно легко получить из (8.34):

$$J_{н.э}(A) = a - b \frac{3A^2}{4}.$$

Для получения большей точности можно использовать другое выражение для $J_{н.э}(A)$:

$$J_{н.э}(A) = \frac{1}{3A} \left[\Phi(A) + \Phi\left(\frac{A}{2}\right) + \sqrt{3}\Phi\left(\frac{\sqrt{3A}}{2}\right) \right]. \quad (8.37)$$

Практически для нахождения графика $J_{н.э}(A)$ по приближенной формуле (8.36) удобнее всего пользоваться графическими построениями (рис. 8.7). Для этого

надо вначале построить функции $\Phi(A)$ и $\Phi(A/2)$ и сложить их ординаты. Для данного значения $A=A_1$ на кривой $\Phi(A) + \Phi(A/2)$ проводим прямую, проходящую через начало координат 0 и точку b . Тогда из подобия треугольников Oab и Ocd следует, что $J_{н.э.}(A_1) = cd$.

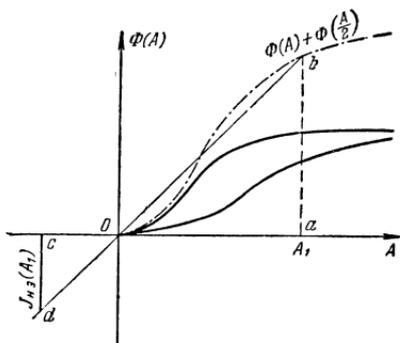


Рис. 8.7.

На рис. 8.8 и 8.9 приведены графики $J_{н.э.}(A)$ для двух различных типовых нелинейных характеристик, полученные по точным и приближенным формулам. Из рассмотрения приведенных графиков видно, что изложенный выше приближенный метод позволяет вычислять графики $J_{н.э.}(A)$ с довольно высокой точностью.

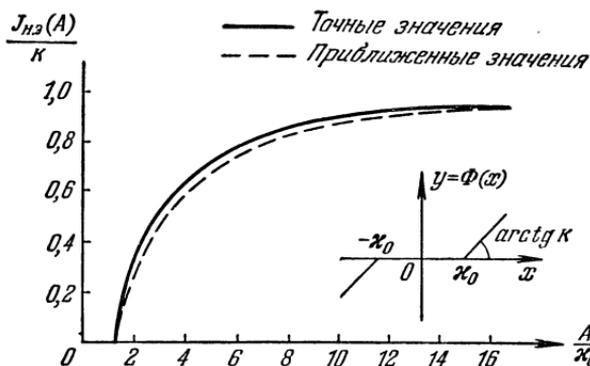


Рис. 8.8.

Данный метод можно обобщить на случай нелинейных характеристик, зависящих, например, от x и dx/dt , а также несимметричных характеристик. В табл. 9 приведены приближенные выражения для четырех различных типов нелинейных характеристик, полученные на основе использования формулы (8.36).

Таблица 9

Формулы приближенного определения $J_{н.э}(A)$ для нелинейных характеристик, заданных графически

№ п/п	Вид нелинейной характеристики $y = \Phi(x, \dot{x})$	$y_0(A)$ и $J_{н.э}(A, \omega) = B_1(A, \omega) + iC_1(A, \omega)$	$\bar{\Phi}(\bar{\rho})$
1	$y = \Phi(x)$ $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ $x = A \cos \omega_0 t$	$B_1(A) = \frac{2}{3A} \left[\Phi(A) + \Phi\left(\frac{A}{2}\right) \right]$ $C_1(A) = 0$ $y_0(A) = 0$	$\bar{\rho}\Phi(A\bar{\rho})$
2	$y = \Phi(x, \dot{x})$ $x = A \cos \omega_0 t$	$B_1(A, \omega) = \frac{2}{3A} \left[\Phi(A, 0) - \Phi(-A, 0) + \right. \\ \left. + \Phi\left(\frac{A}{2} - A\omega \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{A}{2} - A\omega \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right]$ $C_1(A, \omega) = \frac{1}{\sqrt{3}A} \left[\Phi\left(\frac{A}{2} - A\omega \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \right. \\ \left. \times \Phi\left(-\frac{A}{2} - A\omega \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right]$ $y_0(A) = 0$	$\bar{\rho}\Phi(A\bar{\rho} - A\omega \sqrt{1 - \bar{\rho}^2}) \times \\ \times \sqrt{1 - \bar{\rho}^2} \Phi[A\bar{\rho} - \\ - A\omega \sqrt{1 - \bar{\rho}^2}]$

<p>3</p> $y = \begin{cases} \Phi_1(x) & \text{для } \dot{x} > 0 \\ \Phi_2(x) & \text{для } \dot{x} < 0 \end{cases}$ $x = A \cos \omega_0 t$	$B_1(A) = \frac{1}{6A} \sum_{i=1}^2 \left[\Phi_i(A) - \Phi_i(-A) + \Phi_i\left(\frac{A}{2}\right) - \Phi_i\left(-\frac{A}{2}\right) \right]$ $C_1(A) = \frac{\sqrt{3}}{6A} \sum_{i=1}^3 \left[\Phi_i\left(\frac{A}{2}\right) + \Phi_i\left(-\frac{A}{2}\right) \right]$ $y_0(A) = 0$	$\bar{\rho} \Phi_i(A\bar{\rho}) \times$ $\times \sqrt{1 - \bar{\rho}^2} \Phi_i(A\bar{\rho})$
<p>4</p> $y = \Phi(x)$ $\Phi(-x) \neq -\Phi(x)$ $x = x_0 + A \cos \omega_0 t$	$B_1(A) = \frac{1}{3} \left[\Phi(x_0 + A) - \Phi(x_0 - A) + \Phi\left(x_0 + \frac{A}{2}\right) - \Phi\left(x_0 - \frac{A}{2}\right) \right]$ $C_1(A) = 0$ $y_0(A) = \frac{1}{3A} \left[\Phi(x_0 + A) + \Phi(x_0 - A) + 2\Phi\left(x_0 + \frac{A}{2}\right) + 2\Phi\left(x_0 - \frac{A}{2}\right) \right]$	$\bar{\rho} \Phi(x_0 + A\bar{\rho}) \times$ $\times \Phi(x_0 + A\bar{\rho})$

Примечание. $y(t) = y_0(A) + B_1(A, \omega) \sin \omega_0 t + C_1(A, \omega) \cos \omega_0 t$.

Складывая левые и правые части системы уравнений (8.38), получим следующее выражение для $\Phi(A)$:

$$\Phi(A) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{3A}{2^{k+1}} J_{n, \vartheta} \left(\frac{A}{2^k} \right). \quad (8.39)$$

Практически для нахождения $\Phi(A)$ по $J_{n, \vartheta}(A)$ достаточно в (8.38) взять лишь несколько первых членов.

Метод Дауса (П. Наслен [1]) является некоторым развитием метода Я. З. Цыпкина и позволяет для произвольных нелинейностей (симметричных и несимметричных, однозначных и неоднозначных) приближенно определять эквивалентный комплексный коэффициент усиления нелинейного элемента $J_{n, \vartheta}(A)$ с несколько большей точностью.

Рассмотрим вначале, как вычислять коэффициент $B_1(A)$, а затем $C_1(A)$. Выражение для $B_1(A)$, полученное выше после перехода к новым переменным, может быть записано в следующем виде:

$$B_1(A) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(\rho) \left(\frac{\rho}{A} \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{A} \right)^2}} d \left(\frac{\rho}{A} \right). \quad (8.40)$$

В общем случае интегрирование (8.40) должно производиться при изменении $\rho = A \sin \psi$ в интервале изменения ψ от 0 до 2π , и знак перед радикалом следует брать плюс в тех случаях, когда значения ψ лежат в первом и четвертом квадрантах, и минус — в остальных случаях.

Принимая во внимание, что

$$d \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{A} \right)^2} = - \frac{\left(\frac{\rho}{A} \right) d \left(\frac{\rho}{A} \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{A} \right)^2}},$$

выражение (8.40) можно переписать так:

$$B_1(A) = \pm \frac{1}{\pi} \int \Phi(\rho) d \left\{ \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{A} \right)^2} \right\}$$

или

$$B_1(A) = \pm \frac{1}{\pi} \int \Phi(\rho) dW, \quad (8.41)$$

где $W = \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{A}\right)^2}$.

Используя (8.40) и обозначая каждую из частей нелинейной характеристики $\Phi(x)$ соответственно через $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$ и $\Phi_4(x)$ (рис. 8.10), получим

$$B_1(A) = \frac{1}{\pi} \left[- \int_1^0 \Phi_1 dW + \int_0^1 \Phi_2 dW + \int_0^1 \Phi_3 dW - \int_0^1 \Phi_4 dW \right] \quad (8.42)$$

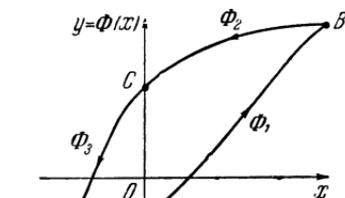


Рис. 8.10.

или

$$B_1(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4) dW. \quad (8.43)$$

Если $\Phi(x)$ — нечетная функция, то $\Phi_3 = -\Phi_1$ и $\Phi_4 = -\Phi_2$. Тогда $B_1(A) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (\Phi_1 + \Phi_2) dW$.

Если $\Phi(x)$ — однозначная функция, то $\Phi_1 = \Phi_2$ и $\Phi_3 = \Phi_4$. В этом случае

$$B_1(A) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (\Phi_1 + \Phi_3) dW \quad (8.44)$$

и для однозначной нечетной функции

$$B_1(A) = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \Phi_1 dW. \quad (8.45)$$

Каждый из интегралов в выражении (8.42) может быть приближенно вычислен в виде суммы. Для

выражения (8.45) имеем

$$B_1(A) = \frac{4}{\pi} \sum_{\rho_i = -A}^{\rho_N = A} \Phi_1(\rho_i) \Delta \sqrt{1 - \frac{\rho_i^2}{A^2}}, \quad (8.46)$$

где Δ — приращение аргумента $W_i = \sqrt{1 - \frac{\rho_i^2}{A^2}}$.

Для определения $B_1(A)$ следует сложить значения $\Phi(\rho)$ для одних и тех же значений аргумента $\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{A^2}}$.

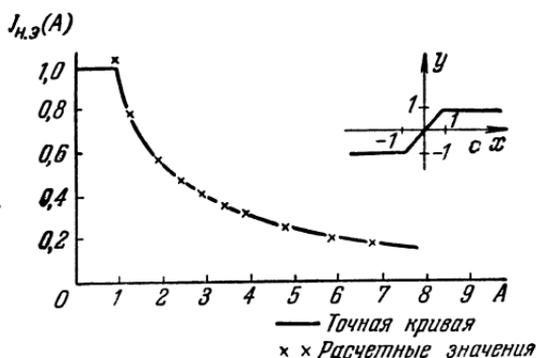


Рис. 8.11.

В табл. 10 приведены значения аргументов $\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{A^2}}$ при изменении от нуля до 1 и соответствующие им значения $\frac{\rho}{A}$.

Таблица 10

$\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{A^2}}$	$\frac{\rho}{A}$	$\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{A^2}}$	$\frac{\rho}{A}$
0,05	0,9987	0,55	0,8352
0,15	0,9887	0,65	0,7399
0,25	0,9683	0,75	0,6615
0,35	0,9368	0,85	0,5268
0,45	0,8930	0,95	0,3122

Зная коэффициент $B_1(A)$, нетрудно определить $J_{н.э}(A) = \frac{B_1(A)}{A}$.

Графики $J_{н.э}(A)$ для двух нелинейных характеристик показаны на рис. 8.11 и 8.12.

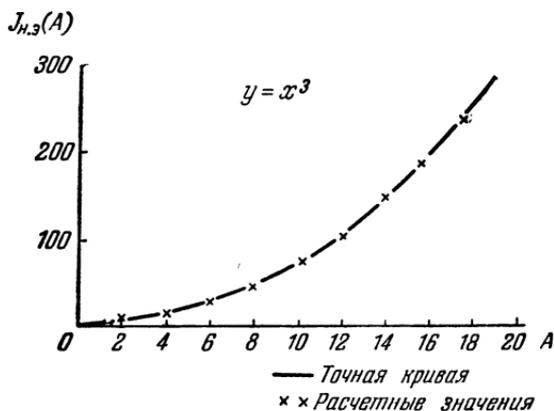


Рис. 8.12.

Аналогичным образом можно вычислить коэффициент $C_1(A)$ для неоднозначных нелинейных характеристик:

$$C_1(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(A \sin \psi) \cos \psi \, d\psi \quad (8.47)$$

или, обозначив $\rho = A \sin \psi$,

$$C_1(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^A \Phi(\rho) \frac{d\rho}{A}. \quad (8.48)$$

В том случае, когда функция $\Phi(x)$ — нечетная, выражение для $C_1(A)$ можно записать так:

$$C_1(A) = \frac{2}{\pi} \int_0^A (\Phi_1 - \Phi_2) \frac{d\rho}{A}. \quad (8.49)$$

Как уже отмечалось, зная $B_1(A)$ и $C_1(A)$, не представляет труда записать и выражение для $J_{н.э}(A)$:

$$J_{н.э}(A) = B_1(A) + jC_1(A) \quad (8.50)$$

или

$$J_{н.э}(A) = |J_{н.э}(A)| e^{j\theta_{н.э}(A)}. \quad (8.51)$$

На рис. 8.13 изображены $|J_{н.э}(A)|$ и $\theta_{н.э}(A)$ для релейной характеристики с гистерезисом, полученные на основе точных и приближенных выражений.

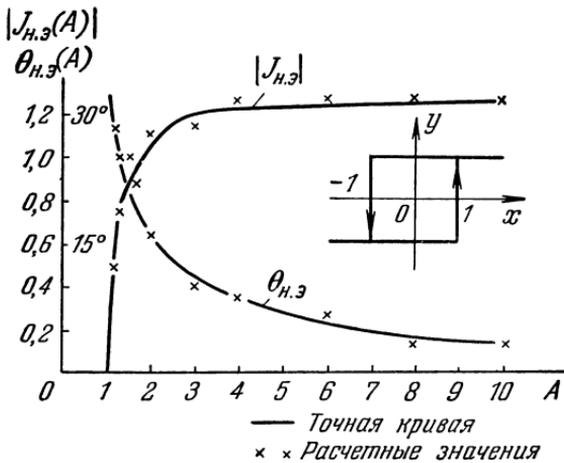


Рис. 8.13.

Из сравнения полученных результатов видим, что приближенный метод Дауса позволяет получить достаточно высокую точность, вполне приемлемую для практических расчетов.

В заключение еще раз отметим, что методы Цыпкина и Дауса очень удобны в тех случаях, когда характеристики нелинейных элементов заданы графически.

3. Анализ периодических движений в нелинейных системах. Полученное выше выражение (8.17) позволяет очень просто и наглядно, используя частотную характеристику линейной части системы, проводить анализ

периодических движений, т. е. определять амплитуду и частоту возможных периодических движений. Следует отметить, что практические методы анализа периодических движений, основанные на использовании соотношения (8.17), почти одновременно и независимо были опубликованы в печати в разных странах: Л. С. Гольдфарбом [3] — в СССР, В. Оппельтом [1] — в ФРГ, Р. Коченбургером [1] — в США, Ж. Р. Дютилем [1], П. Насленом [1] — во Франции, А. Тастином [1—3] — в Англии.

В дальнейшем эти методы получили существенное развитие в работах многих советских и зарубежных ученых.

Рассмотрим различные модификации метода гармонического баланса.

Метод Л. С. Гольдфарба [3]. В 1947 г. Л. С. Гольдфарб предложил способ приближенного определения частоты и амплитуды автоколебаний, который в литературе получил название метода Гольдфарба. Это по своему существу — графический способ решения полученного выше уравнения (8.17), лежащего в основе метода гармонического баланса.

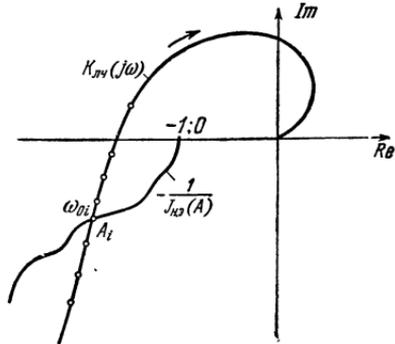


Рис. 8.14.

$$K_{л.ч}(j\omega_0) = -\frac{1}{J_{н.э}(A)}. \tag{8.52}$$

Нетрудно видеть, что искомые ω_0 и A могут быть определены как значения ω_0 и A , соответствующие точке пересечения частотной характеристики линейной части системы $K_{л.ч}(j\omega)$ и обратного эквивалентного комплексного коэффициента усиления нелинейного элемента $\frac{1}{J_{н.э}(A)}$, взятого с обратным знаком (рис. 8.14).

В том случае, когда характеристика нелинейного элемента — многозначна, $J_{н.э}(A)$ принимает комплексные значения, что является следствием того, что первая гармоника на выходе нелинейного элемента сдвинута по

фазе относительно гармонического сигнала, действующего на его входе. Для однозначных нелинейностей $\frac{1}{J_{н.э}(A)}$ располагается вдоль действительной оси (рис. 8.15).

Л. С. Гольдфарбом одним из первых были получены выражения для $J_{н.э}(A)$, соответствующие типовым не-

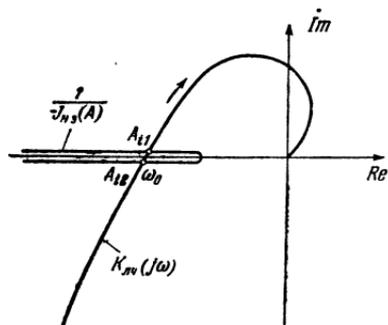


Рис. 8.15.

линейным характеристикам. Таким образом, метод Гольдфарба позволяет на основе использования частотной характеристики линейной части системы определять и частоту и амплитуду искомого периодического решения.

Использование логарифмических характеристик. Как уже неоднократно отмечалось ранее, весьма удобными и эффективными являются методы, основанные на ис-

пользовании логарифмических частотных характеристик линейной части системы

$$L(\omega) = 20 \lg |K_{л.ч}(j\omega)|,$$

$$\varphi(\omega) = \arg K_{л.ч}(j\omega).$$

По-видимому, одними из первых, использовавшими их для анализа автоколебаний на основе метода гармонического баланса, были Г. Честнат и Р. Майер [1] и П. Наслен [1].

Процедура, основанная на использовании логарифмических частотных характеристик, непосредственно следует из метода Л. С. Гольдфарба, если вместо плоскости $K_{л.ч}(j\omega)$ воспользоваться декартовой системой координат L, φ (рис. 8.16).

В том случае, когда характеристика нелинейного элемента — нечетная однозначная симметричная

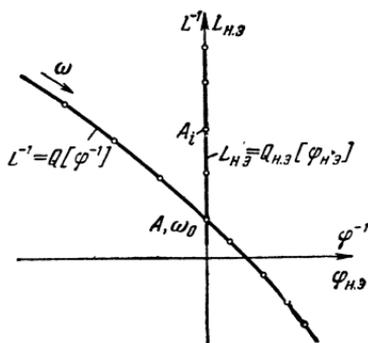


Рис. 8.16.

функция

$$-\frac{1}{J_{н.э}(A)} = J_{н.э}^{-1}(A) e^{-i180^\circ}. \quad (8.53)$$

Следовательно, соответствующая (8.53) логарифмическая характеристика $L_{н.э}^{-1}(A) = \varphi_{н.э}^{-1}(A)$ будет расположена вдоль оси ординат:

$$\varphi_{н.э}^{-1}(A) = -180^\circ. \quad (8.54)$$

A и ω_0 будут определяться как значения, соответствующие точке пересечения $L = Q[\varphi]$ с характеристикой

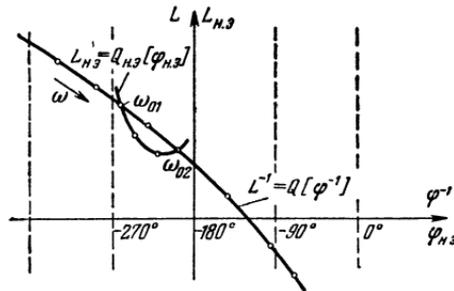


Рис. 8.17.

$L_{н.э}^{-1}(A) = Q_{н.э}[\varphi_{н.э}^{-1}(A)]$, расположенной вдоль оси ординат (либо, как легко видеть, — точке пересечения $L^{-1} = Q[\varphi^{-1}]$ с характеристикой $L_{н.э}(A) = Q_{н.э}[\varphi_{н.э}(A)]$, (рис. 8.16).

В случае нечетной многозначной нелинейной характеристики $L_{н.э}^{-1} = Q_{н.э}[\varphi_{н.э}^{-1}]$ будет расположена между прямыми $\varphi = 180^\circ$ и $\varphi = 270^\circ$.

Значения A и ω_0 определяются точно так же, как и в предыдущем случае, — как точки, соответствующие пересечениям кривых $L = Q(\varphi)$ и $L_{н.э}^{-1} = Q_{н.э}[\varphi_{н.э}^{-1}]$ (либо как точки, соответствующие пересечениям кривых $L^{-1} = Q(\varphi^{-1})$ и $L_{н.э} = Q_{н.э}[\varphi_{н.э}]$, рис. 8.17).

Решение задачи синтеза. В некоторых случаях может потребоваться устранить автоколебания, которые имеют место в исследуемой нелинейной системе, либо изменить их параметры — амплитуду и частоту — в требуемом направлении за счет введения, например, линейного корректирующего устройства.

Если говорить об устранении простых гармонических автоколебаний, то задача может быть сведена к деформации частотной характеристики линейной части системы $L(\varphi)$ в диапазоне ω_1 и ω_2 , причем таким образом, чтобы она не имела пересечений с характеристикой $L_{н.э}(A) = Q_{н.э}[\varphi_{н.э}(A)]$ (рис. 8.18).

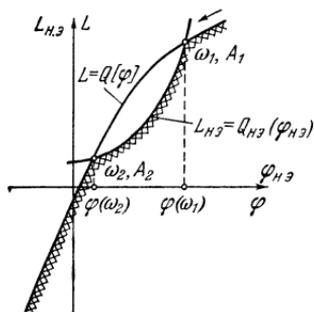


Рис. 8.18.

Если назвать эту характеристику $L_{ж.и} = Q[\varphi_{ж.и}]$ желаемой в указанном выше смысле слова (на рис. 8.18 она заштрихована дважды), то зная ее и задаваясь различными значениями φ в диапазоне $\varphi(\omega_1)$ и $\varphi(\omega_2)$, не представляет труда получить соответствующие $L_{ж.и}(\omega)$ и $\varphi_{ж.и}(\omega)$ (рис. 8.19), иступая при этом

аналогично описанной методике в разделах об абсолютной устойчивости и качестве переходных процессов. Строя затем физически реализуемые $L_{ж.р}(\omega)$ и $\varphi_{ж.р}(\omega)$ и перестраивая их на плоскости L, φ , убеждаемся, что частотная характеристика скорректированной линейной части системы не имеет пересечений с характеристикой нелинейного элемента $L_{н.э}^{-1} = Q_{н.э}^{-1}[\varphi_{н.э}^{-1}]$. Характеристика последовательного корректирующего устройства может быть получена из условия (рис. 8.19):

$$L_{к}(\omega) = L_{ж.р}(\omega) - L(\omega).$$

Аппроксимируя $L_{к}(\omega)$ асимптотическими характеристиками, находим соответствующую $L_{к}(\omega)$ передаточную функцию корректирующего устройства $K_{к}(p)$.

В тех случаях, когда требуется синтезировать корректирующее устройство, при котором частота или амплитуда автоколебаний будут находиться в некотором

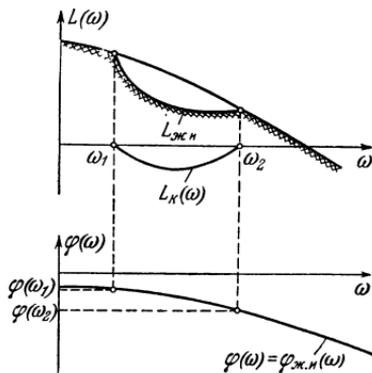


Рис. 8.19.

требуемом диапазоне заданных значений, задача сводится к тому, чтобы с некоторой степенью точности желаемая характеристика $L_{ж.р} = Q[\varphi_{ж.р}]$ либо, что практически удобнее, $L_{ж.р}(\omega)$ и $\varphi_{ж.р}(\omega)$ проходили через некоторую точку (область). Зная $L_{ж.р}(\omega)$ и $\varphi_{ж.р}(\omega)$, которые удовлетворяют заданным требованиям, нетрудно найти и соответствующее корректирующее устройство. Более подробно останавливаться на этом не будем, так как методика синтеза аналогична методике, изложенной нами в разделе, посвященном релейным системам.

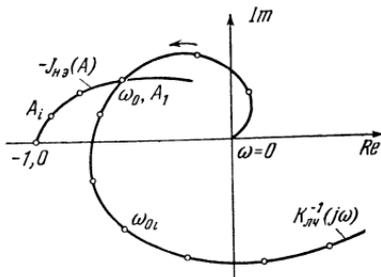


Рис. 8.20.

Метод Р. Коченбургера [1, 2]. Несколько иной графический способ определения частоты и амплитуды автоколебаний, основанный также на полученном выше соотношении (8.17), предложил Р. Коченбургер.

Представим выражение (8.17) в следующем виде:

$$\frac{1}{K_{л.ч}(j\omega_0)} = K_{л.ч}^{-1}(j\omega_0) = -J_{н.э}(A), \quad (8.55)$$

где $K_{л.ч}^{-1}(j\omega)$ — обратная частотная характеристика линейной части системы.

Из (8.55) следует, что частота и амплитуда автоколебаний могут быть графически определены как частота и амплитуда, соответствующие точке пересечения обратной частотной характеристики $K_{л.ч}^{-1}(j\omega)$ и характеристики эквивалентного коэффициента усиления нелинейного элемента $J_{н.э}(A)$, взятой со знаком минус (рис. 8.20 и 8.21; см. также рис. 8.16 и 8.17).

Метод К. Ф. Теодорчика [2]. Для систем с однозначными характеристиками К. Ф. Теодорчик предложил графический метод определения частоты и амплитуды

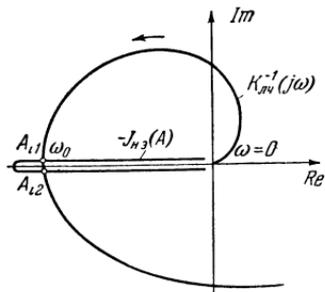


Рис. 8.21.

автоколебаний, названный им *энергетическим*, основанный на использовании соотношения (8.17), записанным в следующем виде:

$$J_{н.э}(A) K_{л.ч}(j\omega_0) = -1. \quad (8.56)$$

При изменении значений амплитуды будет меняться численное значение $J_{н.э}(A)$, и для левой части (8.56) мы получим целое семейство характеристик (рис. 8.22).

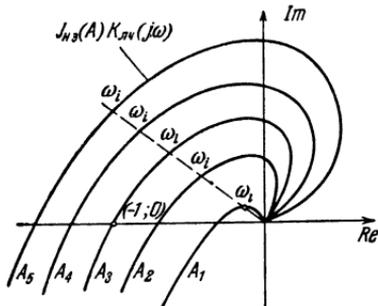


Рис. 8.22.

Тогда искомому периодическому движению будут соответствовать те значения A и ω , при которых характеристика $J_{н.э}(A) K_{л.ч}(j\omega)$ проходит через точку $(-1; 0)$.

Таким образом, если $J_{н.э}(A)$ рассматривать как некоторый коэффициент усиления нелинейного элемента,

то автоколебания могут иметь место, когда некоторая линеаризованная система находится на границе устойчивости, т. е. когда

$$J_{н.э}(A) k_{л.ч} = k_{гр} \quad (8.57)$$

или

$$J_{н.э}(A) = \frac{k_{гр}}{k_{л.ч}},$$

где $k_{л.ч}$ — коэффициент усиления линейной части системы; $k_{гр}$ — граничный коэффициент усиления рассматриваемой линеаризованной системы.

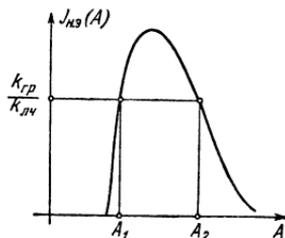


Рис. 8.23.

Следовательно, если известны $k_{гр}$ и $k_{л.ч}$ и построена характеристика $J_{н.э}(A)$, то не представляет труда определить амплитуду искомых периодических движений (рис. 8.23). Для случая, приведенного на рис. 8.23, графическое решение уравнения (8.56) дает два значения амплитуд: A_1 и A_2 , причем только одному значению A будут соответствовать устойчивые периодические движения или, как принято говорить, автоколебания,

Для того чтобы выбрать A_1 или A_2 , надо провести исследование устойчивости автоколебаний и выбрать значение, соответствующее устойчивым автоколебаниям. Более подробно это описывается далее.

Метод Е. П. Попова. Е. П. Поповым [1] был предложен метод определения частоты и амплитуды периодических движений, основанный на методе гармонического баланса. Для пояснения сущности данного метода представим выражение (8.17) в следующем виде:

$$K_{л.ч}(j\omega_0) J_{н.э}(A) + 1 = 0. \quad (8.58)$$

Если, как это было уже отмечено выше, (8.58) рассматривать как уравнение кривой Михайлова для некоторой линеаризованной системы, то:

$$G_{л.с}(j\omega_0, A) = Q(j\omega_0) J_{н.э}(A) + P(j\omega_0) = 0 \quad (8.59)$$

или

$$G_{л.с}(j\omega_0, A) = U_{л.с}(\omega_0, A) + jV_{л.с}(\omega_0, A), \quad (8.60)$$

где

$$U_{л.с}(\omega_0, A) = \text{Re } G_{л.с}(j\omega_0, A),$$

$$V_{л.с}(\omega_0, A) = \text{Im } G_{л.с}(j\omega_0, A).$$

Таким образом, каждой точке кривой $G_{л.с}(j\omega_0, A)$ соответствуют свои значения ω_0 и A .

Тогда вместо (8.60) можно записать два уравнения, позволяющие определять амплитуду и частоту периодических решений:

$$\left. \begin{aligned} U_{л.с}(\omega_0, A) &= 0, \\ V_{л.с}(\omega_0, A) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.61)$$

Геометрически условия (8.61) соответствуют случаю, когда кривая Михайлова рассматриваемой линеаризованной системы (8.59) проходит через начало координат (рис. 8.24).

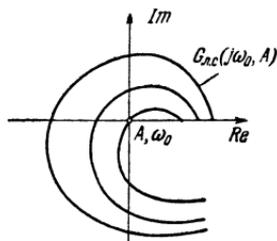


Рис. 8.24.

В заключение отметим, что данный метод был распространен автором на случай несимметричных автоколебаний с постоянной и медленно меняющейся составляющей.

Использование метода D -разбиения по двум параметрам для исследования периодических движений. В тех случаях, когда система автоматического управления содержит нелинейный элемент с нечетной однозначной характеристикой, можно использовать метод D -разбиения по двум параметрам (Ю. И. Неймарк [1]) для определения параметров периодических движений и исследования влияния параметров линейной части системы на частоту и амплитуду автоколебаний (Я. З. Цыпкин [7]). Как было показано выше, частота автоколебаний в системе с нечетной однозначной нелинейной характеристикой может быть определена как частота, соответствующая значениям $k = k_{гр}$ и некоторому параметру T , лежащему на границе устойчивости, исследуемой линеаризованной системы.

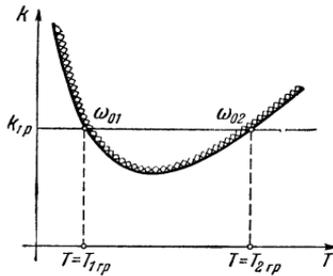


Рис. 8.25.

Таким образом, если на основе (8.60) построена кривая D -разбиения по двум параметрам k , T , одним из которых является коэффициент усиления разомкнутой системы k (рис. 8.25), то не представляет труда построить кривую зависимости параметров автоколебаний от интересующего нас параметра линейной части системы. Действительно, как следует из ранее изложенного, используя кривую D -разбиения по двум параметрам k , T , не представляет труда определить $k = k_{гр}$, соответствующее некоторым $T_{1 гр}$ и $T_{2 гр}$ (рис. 8.25). После этого, зная $k_{гр}/k_{л. ч.}$, по кривой $J_{н. э.}(A)$ (рис. 8.26) можно определить значения $A = A_1$ и $A = A_2$.

Частота автоколебаний определяется по кривой D -разбиения как частота, лежащая на границе устойчивости и соответствующая $k_{гр}$ и $T_{гр}$.

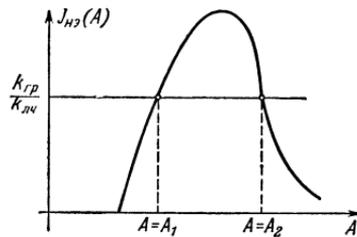


Рис. 8.26.

На рис. 8.25 и 8.26 показаны два значения ω_{01} , ω_{02} частоты и соответственно два значения A_1 , A_2 амплитуды автоколебаний.

При этом для определения, какому из найденных значений соответствуют устойчивые и какому — неустойчивые автоколебания, надо провести исследование устойчивости. В результате только одному из найденных значений ω_0 и A будут соответствовать устойчивые автоколебания.

§ 2. Приближенное исследование вынужденных движений в нелинейных системах на основе метода гармонического баланса

Как уже отмечалось в гл. VII, посвященной релейным системам, движения, имеющие место в нелинейных системах при действующих на входе гармонических воздействиях, могут существенно отличаться от подобных в линейных случаях. В линейных системах выходная величина всегда меняется с частотой, совпадающей с частотой внешнего гармонического воздействия: устойчивость гармонических колебаний выходной величины не зависит от параметров $f_0(t)$. На выходе нелинейных систем — при определенных условиях, зависящих как от параметров входного воздействия $f_0(t)$, так и от свойств линейной части и нелинейного элемента, — могут возникать гармонические колебания той же частоты, непериодические (почти периодические) колебания, установившиеся колебания, являющиеся суммой двух гармонических колебаний, одно из которых совпадает по частоте с $f_0(t)$, а другое по частоте близко к автоколебаниям, имевшим место при $f_0(t) \equiv 0$.

Поэтому исследование вынужденных движений в нелинейных системах сводится к определению, будут ли нет при заданном внешнем воздействии $f_0(t)$ существовать гармонические колебания $x(t) = A \sin \omega_0 t$ частоты внешнего периодического воздействия ω_0 и какова будет их амплитуда A ; либо какова должна быть амплитуда A_0 и фаза φ_0 внешнего гармонического воздействия, чтобы в системе существовали установившиеся гармонические движения с частотой ω_0 .

Таким образом, при исследовании вынужденных движений на основе метода гармонического баланса также исходят из предположения, что установившиеся движения частоты ω_0 близки к гармоническим.

1. Сущность метода. Для исследования вынужденных движений в нелинейных системах наибольшее распространение получили два метода: метод Коченбургера — Айзермана [1, 2] и метод Е. П. Попова [1].

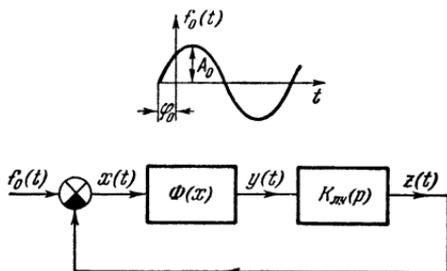


Рис. 8.27.

Рассмотрим кратко каждый из них.

Метод Коченбургера — Айзермана. Рассмотрим нелинейную систему автоматического управления, к которой приложено периодическое внешнее воздействие (рис. 8.27)

$$f_0(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (8.62)$$

Нелинейный элемент характеризуется некоторой нечетной симметричной нелинейной функцией

$$y = \Phi(x), \quad (8.63)$$

а линейная часть системы — передаточной функцией

$$K_{л.ч}(p) = \frac{\mathcal{L}\{z(t)\}}{\mathcal{L}\{x(t)\}} = \frac{b_0 p^m + \dots + b_m}{a_0 p^n + \dots + a_n} = \frac{Q(p)}{P(p)}, \quad (8.64)$$

либо частотной характеристикой $K_{л.ч}(j\omega)$.

Замкнутая система (рис. 8.27) описывается следующим уравнением:

$$\begin{aligned} \left(a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_n x \right) + \left(b_0 \frac{d^m y}{dt^m} + \dots + b_m y \right) = \\ = \left(b_0 \frac{d^m}{dt^m} + \dots + b_m \right) A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \end{aligned} \quad (8.65)$$

где

$$y = \Phi(x).$$

Найдем основные соотношения, лежащие в основе метода Коченбургера — Айзермана анализа вынужденных движений в нелинейных системах. Для этого подставим в левую часть (8.65)

$$x(t) \approx x_T(t) = A \sin \omega_0 t,$$

а вместо $y = \Phi(x)$ подставим первые два члена разложения $y(t)$ в ряд Фурье, исходя из предположения, что нелинейная характеристика $y = \Phi(x)$ — симметричная и нечетная функция, т. е.

$$y(t) \approx y_T(t) = B_1(A) \sin \omega_0 t + C_1(A) \cos \omega_0 t, \quad (8.66)$$

где

$$B_1(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(A \sin \psi) \sin \psi \, d\psi,$$

$$C_1(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(A \sin \psi) \cos \psi \, d\psi,$$

$$\psi = \omega_0 t.$$

Приравнявая выражения при $\sin \omega_0 t$ и $\cos \omega_0 t$, стоящие в левой и правой частях полученного выражения, и проводя простые преобразования, аналогичные тем, которые мы делали при выводе соотношений для определения параметров автоколебаний, получим:

$$A \operatorname{Re} P(j\omega_0) = B_1(A) \operatorname{Re} Q(j\omega_0) - C_1(A) \operatorname{Im} Q(j\omega_0) + \\ + A_0 \cos \varphi_0 \operatorname{Re} Q(j\omega_0) - A_0 \sin \varphi_0 \operatorname{Im} Q(j\omega_0); \quad (8.67)$$

$$A \operatorname{Im} P(j\omega_0) = B_1(A) \operatorname{Im} Q(j\omega_0) + C_1(A) \operatorname{Re} Q(j\omega_0) + \\ + A_0 \cos \varphi_0 \operatorname{Im} Q(j\omega_0) + A_0 \sin \varphi_0 \operatorname{Re} Q(j\omega_0). \quad (8.68)$$

Умножая уравнение (8.68) на j и складывая его с (8.67), получим:

$$AP(j\omega_0) + [B_1(A) + jC_1(A)]Q(j\omega_0) = A_0Q(j\omega_0)e^{j\varphi_0}, \quad (8.69)$$

или

$$K_{л.ч}^{-1}(j\omega_0) + J_{н.с}(A) = \frac{A_0}{A} e^{j\varphi_0}, \quad (8.70)$$

где $K_{л.ч}^{-1}(j\omega)$ — обратная частотная характеристика линейной части системы,

$$J_{н.э}(A) = \frac{B_1(A) + jC_1(A)}{A} \quad (8.71)$$

— эквивалентный комплексный коэффициент усиления нелинейного элемента.

Метод Е. П. Попова. Рассмотрим нелинейную систему на рис. 8.27. Как было показано ранее, данная нелинейная система характеризуется следующим уравнением в изображениях по Лапласу при нулевых начальных условиях:

$$\begin{aligned} P(p) \mathcal{L}\{x(t)\} + Q(p) \mathcal{L}\{\Phi(x)\} = \\ = P(p) \mathcal{L}\{A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)\}, \end{aligned} \quad (8.72)$$

либо нелинейным дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} \left(a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_n x\right) + \left(b_0 \frac{d^m y}{dt^m} + \dots + b_m y\right) = \\ = \left(b_0 \frac{d^m f_0}{dt^m} + \dots + b_m f_0\right), \end{aligned} \quad (8.73)$$

где

$$\begin{aligned} y &= \Phi(x), \\ f_0(t) &= A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned}$$

Найдем соотношения, лежащие в основе метода Е. П. Попова анализа вынужденных движений в нелинейных системах, структурная схема которых может быть приведена к виду, изображенному на рис. 8.27.

Для этого подставим в левую часть (8.73)

$$x(t) \approx x_T(t) = A \sin \omega_0 t$$

и

$$y(t) \approx y_T(t) = B_1(A) \sin \omega_0 t + C_1(A) \cos \omega_0 t.$$

Проводя такие же преобразования, как и в предыдущем случае, получим

$$A[1 + K_{л.ч}(j\omega_0) J_{н.э}(A)] = A_0 e^{j\varphi_0}, \quad (8.74)$$

где $K_{л.ч}(j\omega)$ — частотная характеристика линейной части системы, $J_{н.э}(A)$ — эквивалентный комплексный коэффициент усиления нелинейного элемента.

2. Анализ вынужденных движений. Полученные выше соотношения (8.70) и (8.74) позволяют проводить анализ вынужденных движений в нелинейных системах.

Задача анализа вынужденных движений может ставиться по-разному.

Одна из возможных постановок может быть сформулирована так: на входе нелинейной системы с одним нелинейным элементом

$$y = \Phi(x),$$

линейная часть которой характеризуется передаточной функцией $K_{л.ч}(p)$, приложено гармоническое внешнее воздействие

$$f_0(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Требуется определить, будут в исследуемой нелинейной системе существовать вынужденные движения с частотой внешнего гармонического воздействия ω_0 , чему должны быть равна амплитуда A_0 и фаза φ_0 внешнего воздействия и какова будет при этом амплитуда вынужденных движений A на входе нелинейного элемента. Для решения сформулированной выше задачи анализа удобнее всего пользоваться геометрическими построениями, аналогичными описанным для анализа автоколебаний.

Рассмотрим методику анализа вынужденных движений, основанную на методах Коченбургера — Айзермана и Е. П. Попова.

Анализ вынужденных движений на основе метода Коченбургера — Айзермана. Предположим, что для системы с одной однозначной нелинейной характеристикой (рис. 8.27) на плоскости обратной частотной характеристики линейной части системы $K_{л.ч}^{-1}(j\omega)$ с одним и тем же масштабом по осям построили эквивалентный комплексный коэффициент усиления нелинейного элемента $-J_{н.э.}(A)$ и $K_{л.ч}^{-1}(j\omega)$ (рис. 8.28).

Тогда, как следует из (8.70), для определения амплитуды вынужденных движений A и фазы φ_0 надо из точки $A = A_i$ кривой $-J_{н.э.}(A)$ провести окружность радиуса A_0/A_i таким образом, чтобы она пересекала кривую $K_{л.ч}^{-1}(j\omega)$ в точке ω_0 .

Если возможно найти такую точку $A \equiv A_i$, то в системе будут существовать вынужденные движения частоты ω_0 (рис. 8.28). Может оказаться, что для того, чтобы в системе имели место вынужденные движения с частотой ω_0 , потребуется изменить амплитуду внешнего воздействия A_0 . Из геометрических построений, приведенных на рис. 8.28, нетрудно определить и фазу φ_0 .

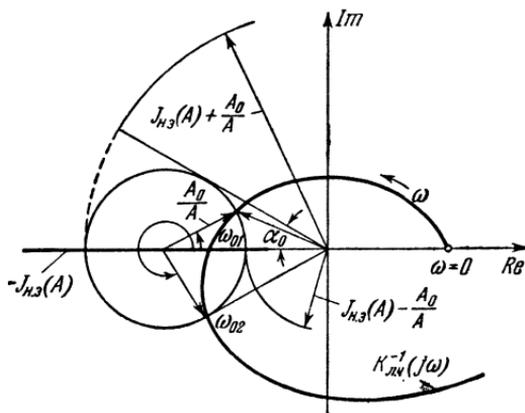


Рис. 8.28.

Как следует из рис. 8.28, возможны вынужденные движения с двумя частотами ω_{01} и ω_{02} , каждой из которых соответствует своя фаза φ_{01} и φ_{02} . Однако, как будет показано несколько дальше, одной из них соответствуют устойчивые вынужденные движения, а другой — неустойчивые.

В некоторых случаях для решения задачи анализа удобно воспользоваться логарифмическими характеристиками.

Логарифмические характеристики быстрее приводят к цели, особенно в тех случаях, когда требуется построить графики зависимости, например $\omega_0 = \omega_{0A}(\alpha)$ при $A_0 = \text{const}$, либо $\omega_0 = \omega_{0\varphi}(\varphi_0)$ при $A_0 = \text{const}$, и т. д.

Геометрические построения, соответствующие рис. 8.28, приведены на рис. 8.29, на плоскости обратной логарифмической частотной характеристики в декартовой системе координат.

Окружность с радиусом A_0/A отобразится на плоскости $L^{-1}(\omega)$, $\varphi^{-1}(\omega)$ в замкнутую кривую. Обычно ее построение очень просто, особенно если предварительно

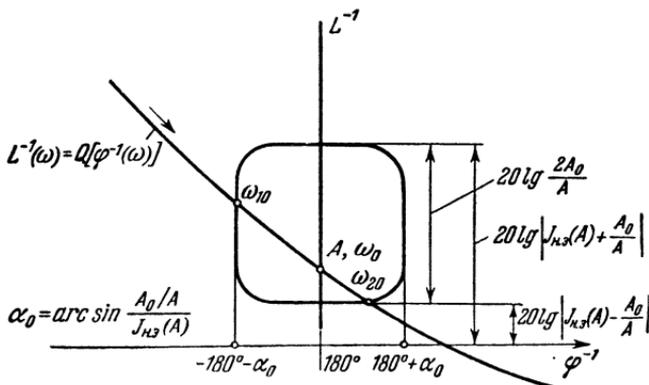


Рис. 8.29.

найти значения α_0 и $J_{н.э}(A) \pm \frac{A_0}{A}$, определяющие размеры прямоугольника, внутрь которого вписывается

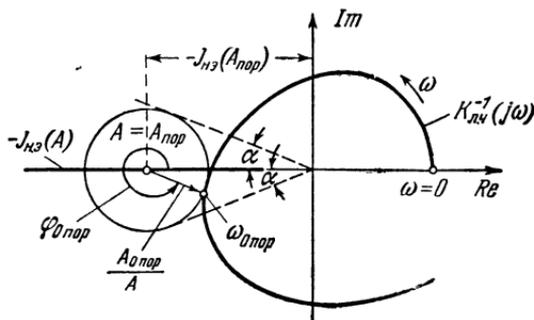


Рис. 8.30.

замкнутая кривая, являющаяся отображением окружности с радиусом A_0/A . Заметим, что в данном случае $-J_{н.э}(A)$ будет расположена вдоль оси ординат $\varphi_{н.э} = -180^\circ$.

В заключение отметим, что пороговое значение амплитуды внешнего гармонического воздействия будет

иметь место в случае, когда окружность касается обратной частотной характеристики линейной части системы (рис. 8.30, 8.31).

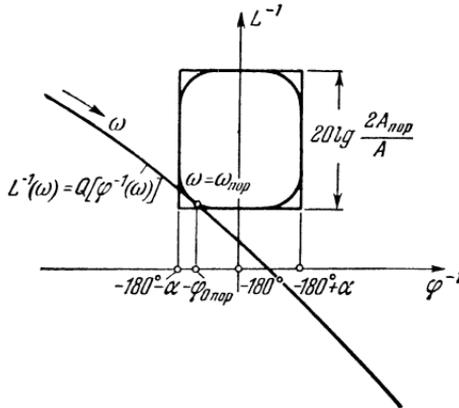


Рис. 8.31.

В системе не будет вынужденных движений с амплитудой A , если окружность с радиусом A_0/A не пересекается с обратной частотной характеристикой $K_{\text{л.ч}}^{-1}(j\omega)$ (рис. 8.32, 8.33).

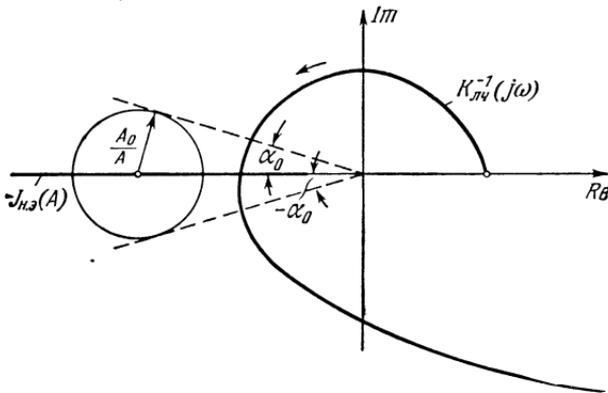


Рис. 8.32.

В том случае, когда нелинейный элемент имеет многозначную характеристику, характеристика эквивалентного коэффициента усиления будет комплексной. Гео-

метрические построения, позволяющие исследовать вынужденные движения, приведены на рис. 8.34, 8.35.

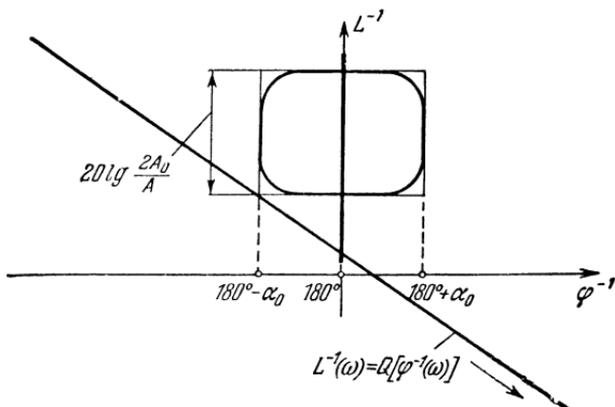


Рис. 8.33.

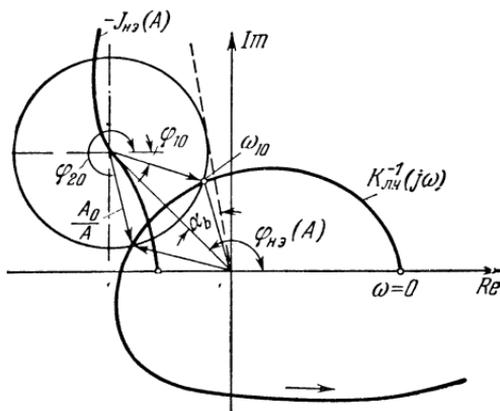


Рис. 8.34.

Анализ вынужденных движений на основе метода Е. П. Попова. Анализ вынужденных движений в нелинейных системах, структурная схема которых может быть приведена к виду, показанному на рис. 8.27, в ряде случаев удобно проводить на основе метода Е. П. Попова.

Для пояснения сущности методики представим (8.74) в следующем виде:

$$\tilde{J}_{н.э}(A, \omega_0) = A_0 e^{-i\varphi_0}, \quad (8.75)$$

где

$$\tilde{J}_{н.э}(A, \omega_0) = A [1 + K_{л.ч}(j\omega_0) J_{н.э}(A)]. \quad (8.76)$$

Так как ω_0 равна частоте внешнего воздействия и, следовательно, нам известна, то

$$K_{л.ч}(j\omega) = U_{л.ч}(\omega_0) + jV_{л.ч}(\omega_0). \quad (8.77)$$

Построение функции

$$\tilde{J}_{н.э}(A, \omega_0) = U_{\tilde{J}_{н.э}}(A, \omega_0) + jV_{\tilde{J}_{н.э}}(A, \omega_0) \quad (8.78)$$

на комплексной плоскости $U_{\tilde{J}_{н.э}}, V_{\tilde{J}_{н.э}}$ не представляет большого труда (рис. 8.36). Каждой точке функции

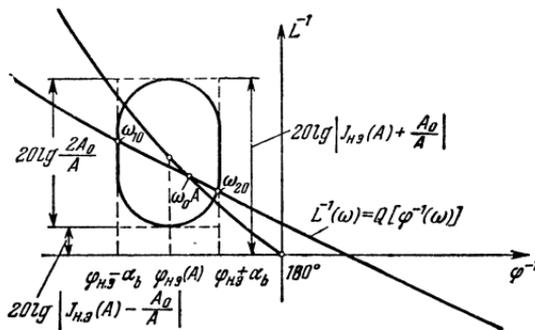


Рис. 8.35.

$J_{н.э}$ будет соответствовать свое значение амплитуды вынужденных движений A и одно и то же значение частоты ω_0 .

Тогда, если известно значение амплитуды вынужденного движения A , то, как следует из (8.76), проводя окружность с центром в начале координат плоскости $U_{\tilde{J}_{н.э}}, V_{\tilde{J}_{н.э}}$ и пересекающую функцию $\tilde{J}_{н.э}$ в точке A , можно найти соответствующую амплитуду вынужденного движения A_0 , равную радиусу окружности $R = A_0$.

Нетрудно также определить и фазу φ_0 . На рис. 8.37 изображен вид функции $\mathcal{J}_{н.э}$ для того случая, когда существует некоторое пороговое значение амплитуды внешнего воздействия $A_{0\text{ пор}}$. Если внешнее воздействие

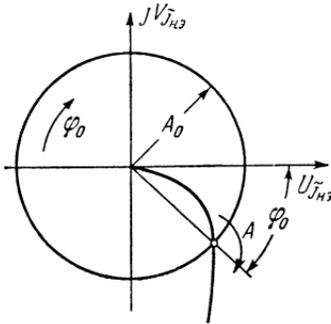


Рис. 8.36.

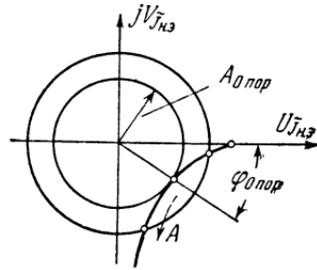


Рис. 8.37.

$f(t)$ будет иметь амплитуду меньше порогового значения, т. е.

$$A_0 < A_{0\text{ пор}},$$

то в исследуемой нелинейной системе не будет существовать вынужденных движений частоты ω_0 .

Задаваясь различными значениями ω_0 и строя семейство функций $\mathcal{J}_{н.э}(A, \omega_0)$, можно построить кривую $A_{0\text{ пор}} = A_0(\omega_0)$ (рис. 8.38). Отметим, что точка касания полученной кривой оси абсцисс на рис. 8.38 соответствует частоте автоколебаний ω_{0A} . При этом значении $\omega_0 = \omega_{0A}$ кривая $\mathcal{J}_{н.э}(A, \omega_0)$ проходит через начало координат плоскости $U_{\mathcal{J}_{н.э}}, V_{\mathcal{J}_{н.э}}$.

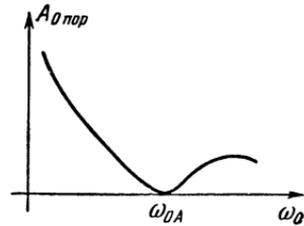


Рис. 8.38.

В ряде случаев анализ вынужденных движений может быть проведен с использованием логарифмических характеристик, изображенных в декартовой системе координат.

Окружность с центром в начале координат плоскости $U_{\mathcal{J}_{н.э}}, V_{\mathcal{J}_{н.э}}$ отображается на плоскости $L_{\mathcal{J}_{н.э}}, \Phi_{\mathcal{J}_{н.э}}$ в прямую, параллельную оси абсцисс.

Тогда значения пороговых амплитуды $A_{0 \text{ пор}}$ и фазы $\varphi_{0 \text{ пор}}$ внешнего гармонического воздействия определяются из условия касания прямой $L_{A \text{ пор}} = 20 \lg A_{0 \text{ пор}}$ кривой $L_{\tilde{J}_{H3}} = Q[\varphi_{\tilde{J}_{H3}}]$ (рис. 8.39).

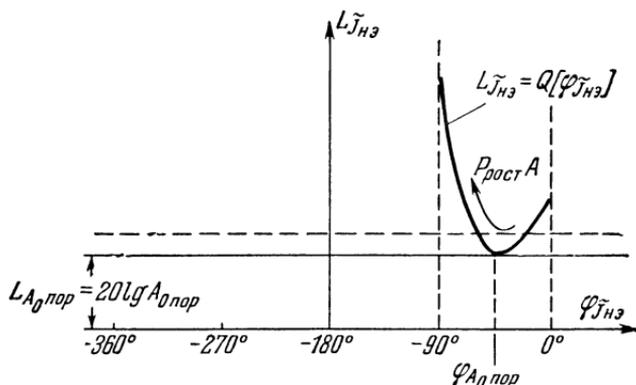


Рис. 8.39.

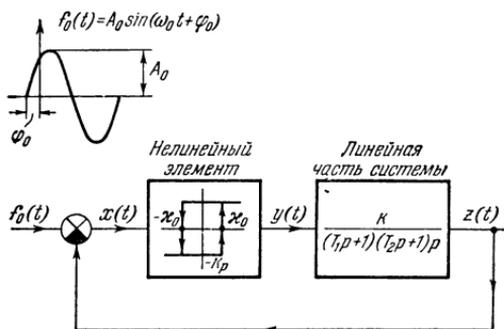


Рис. 8.40.

Пример*). Для нелинейной системы (рис. 8.40) с гистерезисным релейным элементом (рис. 8.41) и линейной частью, характеризуемой передаточной функцией

$$K_{\text{л. ч}}(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p},$$

*) См. Е. П. Попов, И. П. Пальтов [1], стр. 686—689.

определить амплитуду A_0 пор гармонического входного воздействия $f_0(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ и фазу φ_0 , при которых в системе будут существовать вынужденные движения частоты $\omega_0 = 10$ 1/сек, и построить зависимости амплитуды вынужденного движения A и фазы φ_0 от A_0 , используя метод Е. П. Попова.

Численные значения параметров нелинейной системы $k_p = 10$; $\kappa_0 = 4$; $k = 10$ 1/сек, $T_1 = 0,01$ сек; $T_2 = 0,02$ сек. Для решения задачи:

1. Найдем выражение $J_{н.э}(A)$ для гистерезисного релейного элемента:

$$J_{н.э}(A) = \frac{B_1(A) + jC_1(A)}{A}, \quad (8.79)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{B_1(A)}{A} &= \frac{4k_p}{A} \sqrt{1 - \frac{\kappa_0^2}{A^2}}, \\ \frac{C_1(A)}{A} &= \frac{4k_p \kappa_0}{\pi A^2} (A \geq \kappa_0). \end{aligned} \quad (8.80)$$

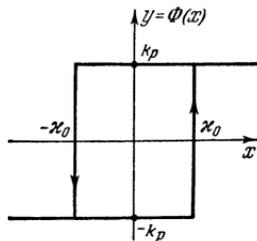


Рис. 8.41.

2. Найдем функцию

$$\tilde{J}_{н.э}(\omega_0, A) = A [1 + J_{н.э}(A) K_{л.ч}(j\omega_0)] \quad (8.81)$$

и после подстановки соответствующих выражений для $J_{н.э}(A)$ и $K_{л.ч}(j\omega_0)$ получим

$$\tilde{J}_{н.э}(\omega_0, A) = A \left[1 + \frac{k \left[\frac{4k_p}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{\kappa_0^2}{A^2}} + j \frac{4k_p \kappa_0}{\pi A^2} \right]}{(T_1 + T_2) \omega_0^2 - j(1 - T_1 T_2 \omega_0^2) \omega_0} \right]. \quad (8.82)$$

3. Используя изложенную выше методику, строим кривую $\tilde{J}_{н.э}(\omega_0, A)$ (рис. 8.42). Из построений, приведенных на рис. 8.42, следует, что при

$$A_0 < A_0 \text{ пор}$$

в системе не будет вынужденных движений с частотой $\omega_0 = 10$ 1/сек. При

$$A_0 > A_0 \text{ пор} \quad (8.83)$$

будут существовать вынужденные движения.

Проводя на рис. 8.42 окружности с различными радиусами $R=A_0$, определяем соответствующие значения A и φ_0 . По найденным таким образом значениям

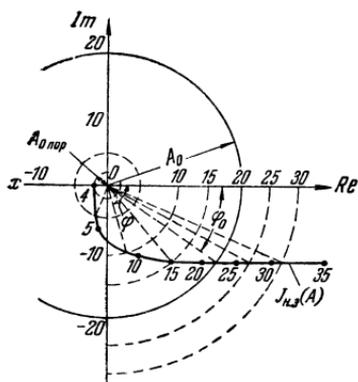


Рис. 8.42.

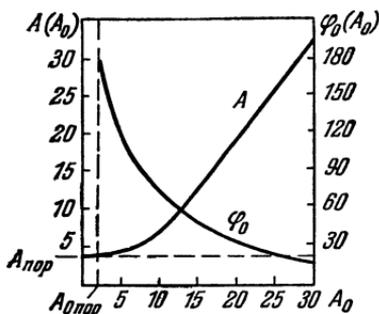


Рис. 8.43.

нетрудно построить кривые $A = A(A_0)$ и $\varphi_0 = \varphi_0(A_0)$, которые приведены на рис. 8.43.

3. Решение задачи синтеза. Допустим, что исследуется нелинейная система, к которой приложено внешнее гармоническое воздействие $f_0(t)$. Обычно, если, например, это следящая система, то от нее требуется воспроизведение внешнего воздействия с требуемой точностью. В этом случае недопустимо возникновение в рассматриваемой системе вынужденных движений с частотой, отличной от частоты внешнего воздействия. Предположим, что, проведя исследование на основе одного из изложенных выше методов, убедились в том, что при заданной амплитуде внешнего воздействия A_0 одночастотных вынужденных гармонических колебаний с частотой ω_0 в системе не существует. Как уже отмечалось выше, это не означает, что в системе не будет существовать вынужденных движений, отличных от гармонических с частотой ω_0 . Однако для нормальной работы исследуемой системы это недопустимо и требуется синтезировать линейное корректирующее устройство, при наличии которого в системе будут существовать вынужденные движения частоты ω_0 . Рассмотрим решение задачи синтеза, основываясь на изложенных выше методах Айзермана — Коченбургера и Е. П. Попова.

Синтез вынужденных движений на основе метода Айзермана — Коченбургера. Предположим, что, проведя геометрические построения, мы убедились, что при заданных параметрах линейной части системы, нелинейного элемента и амплитуде A_0 — вынужденных движений с требуемой частотой ω_0 , лежащей в некотором заранее заданном диапазоне $\omega_{01} \div \omega_{02}$, не существует

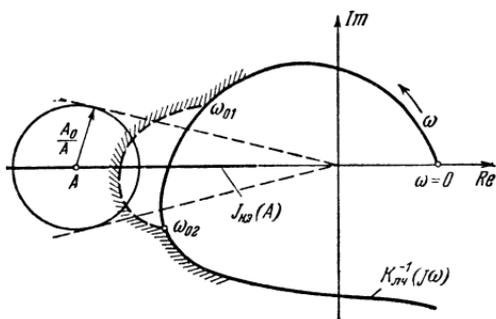


Рис. 8.44.

(рис. 8.44 и 8.45). Требуется синтезировать такое линейное корректирующее устройство, при наличии которого существуют вынужденные движения с частотой ω_0 .

Для этого необходимо скорректировать $K_{л.ч}^{-1}(j\omega)$ в диапазоне $\omega_{01} \div \omega_{02}$ так, как это отмечено на рис. 8.44 и 8.45 штриховкой. Используя построения, приведенные на рис. 8.45, задавая значения φ , можем получить логарифмическую амплитудно-частотную характеристику, которую должна иметь линейная часть системы после введения корректирующего устройства, называемую идеальной желаемой $L_{ж.и}(\omega)$ (рис. 8.46). В этом случае

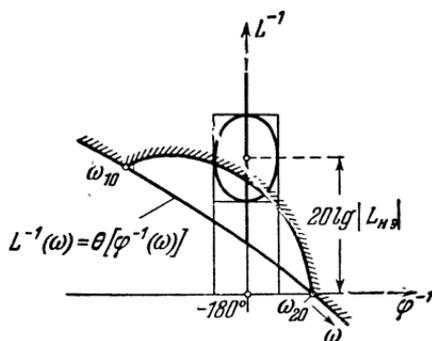


Рис. 8.45.

$$\varphi(\omega) = \varphi_{ж.и}(\omega).$$

В дальнейшем после нахождения $L_{\text{ж.и}}(\omega)$ задача выбора линейного корректирующего устройства аналогична рассмотренным выше задачам.

Синтез вынужденных движений на основе метода Е. П. Попова. Предположим, что в результате исследования оказалось, что при заданной амплитуде внешнего воздействия в системе не существует вынужденных

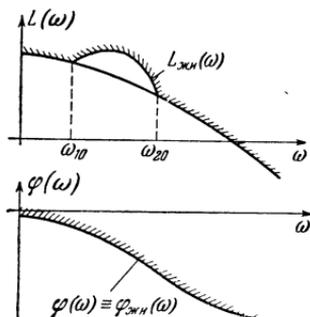


Рис. 8.46.

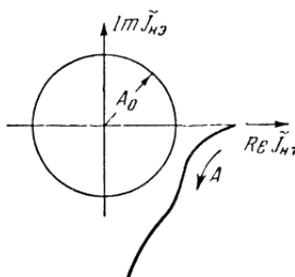


Рис. 8.47.

гармонических движений с частотой ω_0 (рис. 8.47, 8.48). Требуется синтезировать такое корректирующее устройство, при наличии которого в системе существовали бы

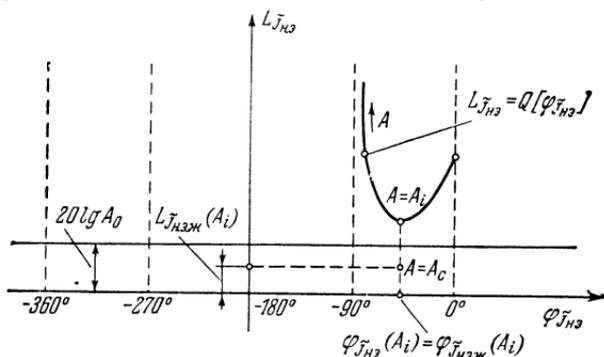


Рис. 8.48.

вынужденные гармонические движения с частотой, близкой к ω_0 .

Из построений, приведенных на рис. 8.48, видно, что если бы кривая $L_{\text{н.э}} = Q[\varphi_{\text{н.э}}]$ при $A=A_i$ проходила

через точку $L_{\tilde{J}_{н.э}}$, $\varphi_{\tilde{J}_{н.э}}$, то в системе существовали бы вынужденные движения частоты ω_0 .

Это означает, что необходимо ввести дополнительное линейное, либо нелинейное устройство, которое деформировало бы кривую $L_{\tilde{J}_{н.э}} = Q[\varphi_{\tilde{J}_{н.э}}]$ таким образом, чтобы она проходила через точки $L_{\tilde{J}_{н.э.ж}}$ и $\varphi_{\tilde{J}_{н.э.ж}}$. Допустим, что синтезируется линейное корректирующее устройство.

В этом случае необходимо найти $U_{л.ч.ж}(\omega_0)$ и $V_{л.ч.ж}(\omega_0)$, используя для этого соотношение

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \tilde{J}_{н.э.ж} + j \operatorname{Im} \tilde{J}_{н.э.ж} &= \\ &= A \{ 1 + [U_{л.ч.ж}(\omega_0) + \\ &+ j V_{л.ч.ж}(\omega_0)] [\operatorname{Re} J_{н.э}(A) + \\ &+ j \operatorname{Im} J_{н.э}(A)] \}. \end{aligned} \quad (8.84)$$

В полученном выражении (8.84) $\operatorname{Re} \tilde{J}_{н.э.ж}$ и $\operatorname{Im} \tilde{J}_{н.э.ж}$ известны, ибо известны значения $L_{\tilde{J}_{н.э.ж}}(A_i)$ и $\varphi_{\tilde{J}_{н.э.ж}}(A_i)$. Кроме

того, известно значение $A = A_i$, а также $\operatorname{Re} J_{н.э}(A_i)$ и $\operatorname{Im} J_{н.э}(A_i)$, ибо характеристика нелинейного элемента нам также задана.

Из (8.84) получаем, приравнивая действительные и мнимые части, следующие уравнения для определения $U_{л.ч.ж}(\omega_0)$ и $V_{л.ч.ж}(\omega_0)$:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \tilde{J}_{н.э}(A_i) &= 1 + U_{л.ч.ж}(\omega_0) \operatorname{Re} J_{н.э}(A_i) - \\ &\quad - V_{л.ч.ж}(\omega_0) \operatorname{Im} J_{н.э}(A_i), \\ \operatorname{Im} \tilde{J}_{н.э}(A_i) &= V_{л.ч.ж}(\omega_0) \operatorname{Re} J_{н.э}(A_i) + \\ &\quad + U_{л.ч.ж}(\omega_0) \operatorname{Im} J_{н.э}(A_i), \end{aligned} \right\} \quad (8.85)$$

откуда

$$V_{л.ч.ж}(\omega_0) = \frac{\operatorname{Im} J_{н.э} \cdot \operatorname{Re} J_{н.э} + \operatorname{Im} \tilde{J}_{н.э} - \operatorname{Re} \tilde{J}_{н.э} \operatorname{Im} J_{н.э}}{[\operatorname{Re} J_{н.э}]^2 + [\operatorname{Im} J_{н.э}]^2}, \quad (8.86)$$

$$U_{л.ч.ж}(\omega_0) = \frac{\operatorname{Re} \tilde{J}_{н.э} \operatorname{Re} J_{н.э} + \operatorname{Im} \tilde{J}_{н.э} \cdot \operatorname{Im} J_{н.э} - \operatorname{Re} J_{н.э}}{[\operatorname{Re} J_{н.э}]^2 + [\operatorname{Im} J_{н.э}]^2}. \quad (8.87)$$

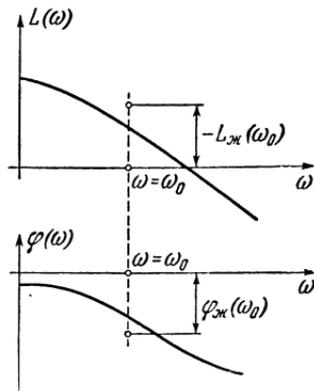


Рис. 8.49.

Определяем теперь

$$L_{\text{ж}}(\omega_0) = 40 \lg [V_{\text{л. ч. ж}}^2(\omega_0) + U_{\text{л. ч. ж}}^2(\omega_0)], \quad (8.88)$$

$$\varphi_{\text{ж}}(\omega_0) = \arctg \frac{V_{\text{л. ч. ж}}(\omega_0)}{U_{\text{л. ч. ж}}(\omega_0)}. \quad (8.89)$$

После вычисления значений $L_{\text{ж}}(\omega_0)$ и $\varphi_{\text{ж}}(\omega_0)$ задача сводится к нахождению корректирующего устройства, логарифмические амплитудно- и фазо-частотные характеристики которого проходили бы через точки $L_{\text{ж}}(\omega_0)$ и $\varphi_{\text{ж}}(\omega_0)$ (рис. 8.49).

§ 3. Устойчивость периодических движений в нелинейных системах

Ранее в данной главе были изложены различные приближенные способы исследования простых периодических движений в нелинейных системах, основанные на методе гармонического баланса. Определенные периодические движения будут соответствовать автоколебаниям, либо вынужденным колебаниям лишь в тех случаях, когда они устойчивы.

Обычно периодические движения считаются устойчивыми, если обеспечивается асимптотическая устойчивость в малом относительно определенного периодического движения $x_T(t) = A \sin \omega_0 t$, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [x_T(t) + \xi(t)] = x_T(t) \quad (8.90)$$

или

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0, \quad (8.91)$$

где $\xi(t)$ — малое отклонение относительно $x_T(t)$.

Для того чтобы найти дифференциальное уравнение относительно отклонения $\xi(t)$, позволяющее судить об устойчивости периодических движений, подставим в исходное дифференциальное уравнение нелинейной системы

$$\left(a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_n x \right) + \left(b_0 \frac{d^m y}{dt^m} + \dots + b_m y \right) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (8.92)$$

$$y = \Phi(x), \quad (8.93)$$

$$x(t) = x_T(t) + \xi(t), \quad \Phi(x_T + \xi),$$

разложив предварительно $\Phi(x_T + \xi)$ в ряд по степеням $\xi(t)$:

$$\Phi(x_T + \xi) = \Phi[x_T] + \left[\frac{d\Phi(x)}{dx} \right]_{x=x_T} \xi(t) + \dots \quad (8.94)$$

и отбросив все члены, содержащие $\xi(t)$ в степенях выше первой *).

Учитывая (8.94), получим следующее линейное дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами, которое определяет необходимое и достаточное условие устойчивости периодического движения:

$$\left(a_0 \frac{d^n \xi}{dt^n} + \dots + a_n \xi \right) + \left(b_0 \frac{d^m}{dt^m} + \dots + b_m \right) \left[\frac{d\Phi(x)}{dx} \right]_{x=x_T} \xi = 0. \quad (8.95)$$

В более общем случае для системы с нелинейной характеристикой

$$y = \Phi(x, \dot{x}) \quad (8.96)$$

исходное дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами имеет вид

$$\left(a_0 \frac{d^n \xi}{dt^n} + \dots + a_n \xi \right) + \left(b_0 \frac{d^m}{dt^m} + \dots + b_m \right) \times \\ \times \left\{ \left[\frac{d\Phi(x, \dot{x})}{dx} \right]_{\substack{x=x_T \\ \dot{x}=\dot{x}_T}} \xi(t) + \left[\frac{d\Phi(x, \dot{x})}{d\dot{x}} \right]_{\substack{x=x_T \\ \dot{x}=\dot{x}_T}} \dot{\xi}(t) \right\} = 0. \quad (8.97)$$

Отметим, что полученное уравнение не содержит члена $A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ и характеризует как устойчивость автоколебаний, так и вынужденных движений. Таким образом, устойчивость периодических движений сводится к исследованию устойчивости положения равновесия линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами.

*) В случае $y = \Phi(x, \dot{x})$ надо пользоваться следующим разложением:

$$\Phi[x_T + \xi; \dot{x}_T + \dot{\xi}] = \Phi[x_T, \dot{x}_T] + \\ + \left[\frac{d\Phi(x, \dot{x})}{dx} \right]_{\substack{x=x_T \\ \dot{x}=\dot{x}_T}} \xi(t) + \dots + \left[\frac{d\Phi(x, \dot{x})}{d\dot{x}} \right]_{\substack{x=x_T \\ \dot{x}=\dot{x}_T}} \dot{\xi}(t) + \dots$$

Следует отметить, что до настоящего времени отсутствуют эффективные методы, позволяющие исследовать устойчивость линейных уравнений с периодическими коэффициентами, хотя в этом направлении выполнен ряд интересных математических работ.

Исследование устойчивости линейных уравнений с периодическими коэффициентами в общем случае сводится к рассмотрению характеристического уравнения,

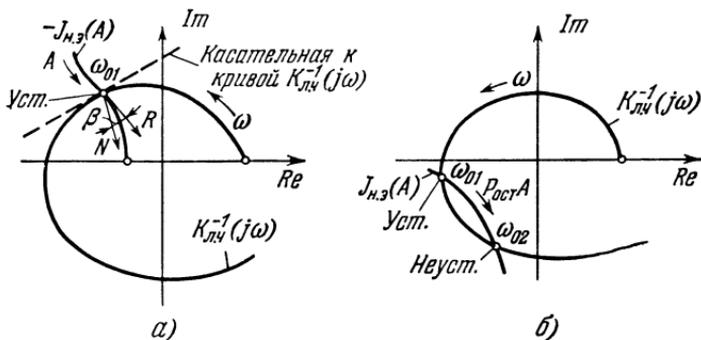


Рис. 8.50.

имеющего вид определителя бесконечного порядка, известного в литературе под названием обобщенного определителя Хилла (см. В. А. Тафт [3]). Этот определитель можно представить в виде конечной суммы трансцендентных выражений (см. В. А. Тафт [1—3]), однако коэффициенты этих выражений сами являются определителями бесконечного порядка. Только для некоторых частных случаев характеристическое уравнение удастся получить в замкнутом виде.

Поэтому в большинстве случаев при исследовании устойчивости периодических режимов прибегают к приближенным методам. Рассмотрим лишь некоторые из них.

Метод Л. С. Гольдфарба. Еще в 1947 г. Л. С. Гольдфарб [3], а затем и некоторые другие авторы предложили для исследования устойчивости периодических режимов следующий приближенный критерий *):

*) См. также М. А. Айзерман, Теория автоматического регулирования, изд-во «Наука», М., стр. 343—350, 1966.

Периодическое решение устойчиво, если точка $J_{н.э}(A+\Delta A)$ при $\Delta A > 0$ лежит внутри, а при $\Delta A < 0$ вне годографа обратной частотной характеристики линейной части системы $K_{л.ч}^{-1}(j\omega)$.

Используя сформулированный выше критерий, нетрудно показать, что в случаях, приведенных на рис. 8.50, а, б, периодические движения с частотой ω_{01} соответствуют устойчивым автоколебаниям.

В связи с тем, что внутренняя часть области $K_{л.ч}^{-1}(j\omega)$, заштрихованная на рис. 8.51, а, отображается в область, лежащую ниже кривой $L^{-1}(\omega) = Q[\varphi^{-1}(\omega)]$

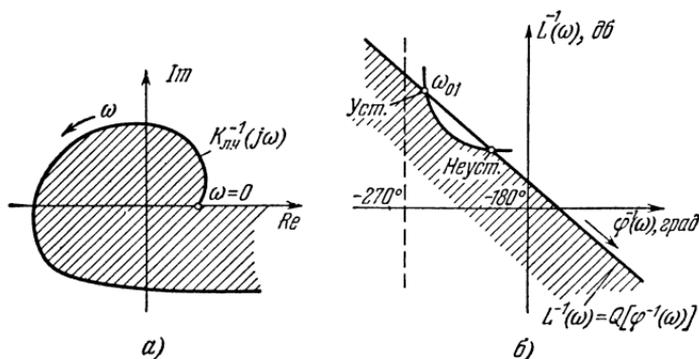


Рис. 8.51.

(рис. 8.51, б), нетрудно приведенный выше критерий сформулировать и в случае использования логарифмических частотных характеристик. Так, периодическое движение с частотой ω_{01} на рис. 8.51, б устойчиво.

Это условие устойчивости можно интерпретировать и по-другому. Обозначим через \mathbf{R} касательную к кривой $J_{н.э}(A)$ в точке ее пересечения с кривой $K_{л.ч}^{-1}(j\omega)$, а через \mathbf{N} — нормаль к кривой $K_{л.ч}^{-1}(j\omega)$ в той же точке, направленную внутрь области $K_{л.ч}^{-1}(j\omega)$ (рис. 8.50, а).

Тогда сформулированное выше условие устойчивости может быть аналитически записано в виде скалярного произведения двух векторов \mathbf{R} и \mathbf{N} :

$$(\mathbf{RN}) > 0.$$

Полученное неравенство означает, что угол β между векторами \mathbf{R} и \mathbf{N} должен быть меньше 90° .

В заключение отметим, что, как было показано М. А. Айзерманом, сформулированное выше условие является лишь необходимым условием устойчивости периодических движений в случае выполнения для исследуемой системы условий гипотезы авторезонанса и может привести к ошибкам в других случаях.

Критерии устойчивости периодических движений в случае выполнения условий гипотезы фильтра, к сожалению, еще не доведены до такой формы, чтобы ими можно было пользоваться практически.

Метод Е. П. Попова. Е. П. Поповым [1] было дано аналитическое условие, являющееся *необходимым* условием устойчивости периодических движений в случае выполнения гипотезы авто-

резонанса, вытекающее из сформулированного им же критерия.

Поясним вначале смысл этого критерия, а затем приведем его аналитическое выражение. Как было показано, уравнение кривой А. В. Михайлова для линеаризованной системы, соответствующей исследуемой нелинейной системе, которое использовалось для исследования периодических движений, может быть записано в следующем виде:

$$G_{л.с}(j\omega_0, A) = U_{л.с}(\omega_0, A) + jV_{л.с}(\omega_0, A). \quad (8.98)$$

Тогда критерий устойчивости может быть сформулирован так: *Полученное в результате построения кривой А. В. Михайлова для линеаризованной системы $G_{л.с}(j\omega_0, A)$ периодическое решение устойчиво, если кривая $G_{л.с}(j\omega_0, A + \Delta A)$ при $\Delta A > 0$ не охватывает, а при $\Delta A < 0$ охватывает начало координат плоскости $G_{л.с}(j\omega_0, A)$ (рис. 8.52).*

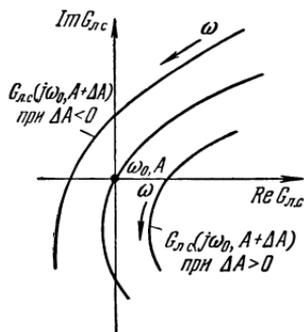


Рис. 8.52.

Аналитически сформулированный выше критерий можно записать в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial U_{\text{л.с}}}{\partial A}\right)_T \left(\frac{\partial V_{\text{л.с}}}{\partial \omega}\right)_T - \left(\frac{\partial U_{\text{л.с}}}{\partial \omega}\right)_T \left(\frac{\partial V_{\text{л.с}}}{\partial A}\right)_T < 0. \quad (8.99)$$

Индекс T , стоящий у каждой скобки в (8.99), означает, что после нахождения производных в них следует подставить значения $A=A_0$, $\omega=\omega_0$, соответствующие периодическому решению, устойчивость которого исследуется.

В заключение отметим, что для систем третьего и четвертого порядков указанные графические построения кривой $G_{\text{л.с}}(j\omega_0, A + \Delta A)$ проводить не следует. Для этого достаточно убедиться, что все коэффициенты уравнения $G_{\text{л.с}}(j\omega_0, A)$ положительны.

Метод Б. В. Булгакова. Б. В. Булгаковым был предложен критерий устойчивости найденного периодического решения, в основе которого лежит осреднение периодических коэффициентов дифференциального уравнения:

$$\left(a_0 \frac{d^n \xi}{dt^n} + \dots + a_n \xi\right) + \left(b_0 \frac{d^m}{dt^m} + \dots + b_m\right) \times \\ \times \left[\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_{\substack{x=x_T \\ \dot{x}=\dot{x}_T}} \xi(t) + \left(\frac{d\Phi}{d\dot{x}}\right)_{\substack{x=x_T \\ \dot{x}=\dot{x}_T}} \dot{\xi}(t) \right] = 0. \quad (8.100)$$

Частные производные от $\Phi(x, \dot{x})$ являются периодически изменяющимися во времени коэффициентами. Осредним эти коэффициенты:

$$k_T(\omega_0, A) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left(\frac{d\Phi(x, \dot{x})}{dx}\right)_{\substack{x=x_T \\ \dot{x}=\dot{x}_T}} d(\omega_0 t), \quad (8.101)$$

$$\dot{k}_T(\omega_0, A) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left(\frac{d\Phi(x, \dot{x})}{d\dot{x}}\right)_{\substack{x=x_T \\ \dot{x}=\dot{x}_T}} d(\omega_0 t), \quad (8.102)$$

где ω_0 — частота исследуемого периодического движения $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

На рис. 8.53 приведен геометрический смысл коэффициента k_T в случае нелинейной характеристики с насыщением. Тогда вместо уравнения (8.100) получим дифференциальное, а затем и соответствующее ему характеристическое уравнение некоторой линейной системы

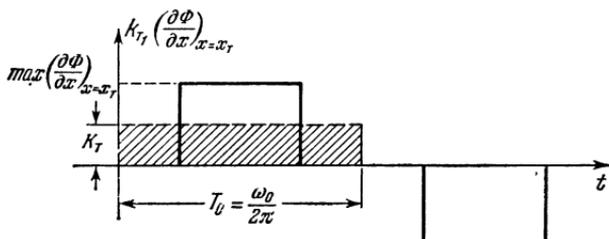


Рис. 8.53.

с постоянными параметрами, полученной в результате осреднения периодических коэффициентов:

$$P(p) + Q(p)[k_T(\omega_0, A) + \dot{k}_T(\omega_0, A)] = 0. \quad (8.10)$$

Полученное характеристическое уравнение (8.103) позволяет судить об устойчивости найденного периодического решения

$$x_T(t) = A \sin \omega_0 t$$

на основе использования критериев устойчивости линейных систем.

§ 4. Примеры исследования периодических режимов в нелинейных системах

Рассмотрим несколько примеров исследования периодических режимов в нелинейных системах.

Пример 1. Для следящей системы, структурная схема которой изображена на рис. 8.54, проведем исследование периодических движений на входе нелинейного элемента при учете люфта в редукторе на основе использования амплитудно-фазовой характеристики линейной части системы $K_{л.ч}(j\omega)$, изображенной в обычной и логарифмической (декартовой) системах координат. Построим зависимости $\omega_0 = \omega_0(a)$ и $A = A(a)$.

Линейная часть системы характеризуется передаточной функцией:

$$K_{л.ч}(p) = \frac{k_1 k_2 k_{эм} k_{дв} k_p}{p(T_y p + 1)(T_m p + 1)},$$

где $k_1 = 0,064 \text{ в/рад} = 3,6 \text{ в/град}$ — коэффициент передачи измерительного элемента; $k_2 = 46$ — коэффициент

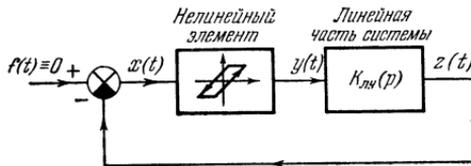


Рис. 8.54.

усиления усилителя; $k_{эм} = 3$ — коэффициент усиления электромашинного усилителя; $T_y = 0,0108 \text{ сек}$ — постоянная времени электромашинного усилителя; $k_{дв} = 55 \text{ град/вольт} \cdot \text{сек}$ — коэффициент усиления двигателя; $T_m = 0,17 \text{ сек}$ — электромеханическая постоянная времени двигателя; $k_p = 0,25$ — коэффициент передачи редуктора.

Нелинейный элемент имеет характеристику типа люфта (рис. 8.55) и характеризуется двумя параметрами a и $\beta = 1$.

Для определения параметров движений строим частотную характеристику линейной части системы $K_{л.ч}(j\omega)$ и на этой же плоскости в том же масштабе строим характеристику эквивалентного комплексного коэффициента нелинейного элемента — $\frac{1}{J_{н.э}(A)}$.

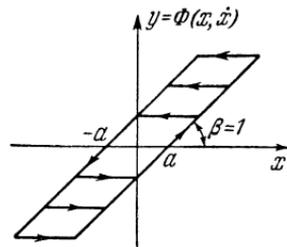


Рис. 8.55.

Указанные две характеристики пересекаются в двух точках M и H (рис. 8.56). Пересечение в точке H показано отдельно. Точке M соответствуют следующие параметры периодического решения: $\omega_{01} = 18$ и $\frac{A_1}{a} = 30$, а точке H — $\omega_{02} = 1,3$ и $\frac{A_2}{a} = 1,02$.

Для определения параметров периодических движений на основе использования логарифмических частотных характеристик строим $L(\omega) = Q[\varphi(\omega)]$, а также

$$L_{н.э} \left(\frac{A}{a} \right) = Q_{н.э} \left[\varphi_{н.э} \left(\frac{A}{a} \right) \right].$$

Характеристики $L_{н.э} \left(\frac{A}{a} \right)$ и $\varphi_{н.э} \left(\frac{A}{a} \right)$ приведены на рис. 8.57, а, б. Построив на плоскости L, φ характеристики, соответствующие линейной части и нелинейному

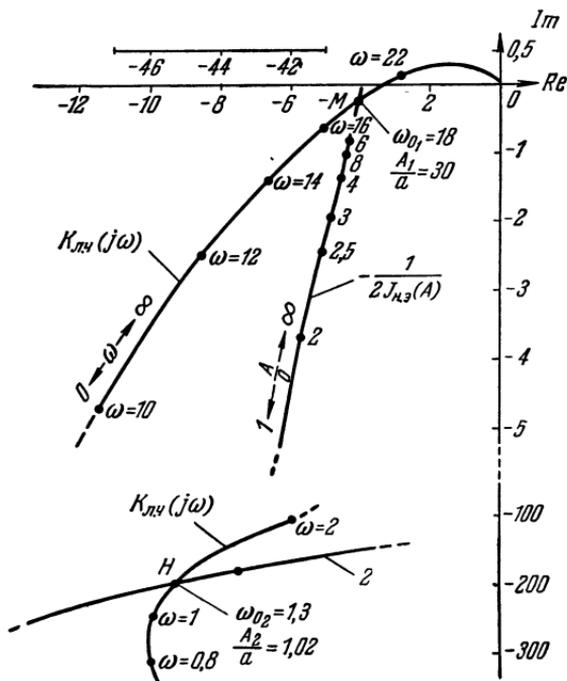


Рис. 8.56.

элементу (рис. 8.58), как параметры точек пересечения, получаем прежний результат, как и при использовании обычной частотной характеристики линейной части системы; для точки M получаем $\frac{A_1}{a} = 30$, $\omega_{01} = 18$ и для точки H — $\frac{A_2}{a} = 1,3$, $\omega_{02} = 1,02$.

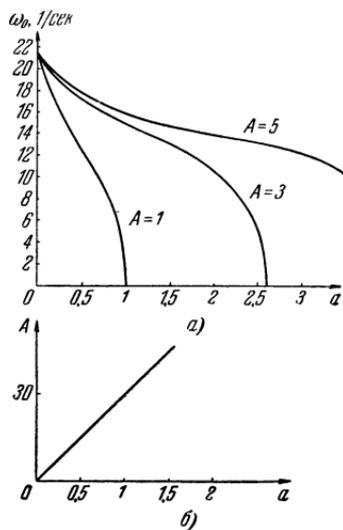


Рис. 8.59.

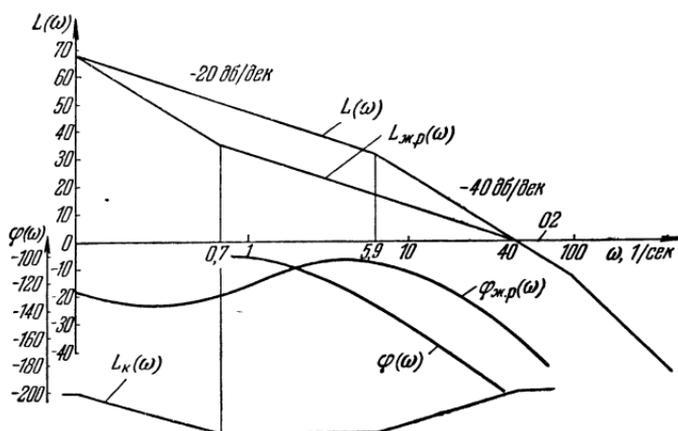


Рис. 8.60.

и $\varphi_{ж.р}(\omega)$ пересекаются с той частью $L_{н.э}\left(\frac{A}{a}\right) = Q_{н.э}\left[\varphi_{н.э}\left(\frac{A}{a}\right)\right]$, где $\frac{A}{a} > \frac{30}{25}$.

Последнее обстоятельство позволяет сформулировать требования $L_{ж.р}(\omega)$ и $\varphi_{ж.р}(\omega)$ линейной части системы.

На рис. 8.60 приведены логарифмические характеристики $L(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ исходной системы, логарифмические характеристики $L_{ж.р}(\omega)$ и $\varphi_{ж.р}(\omega)$ скорректированной системы, а также логарифмическая амплитудно-частотная характеристика последовательного корректирующего устройства

$$L_k(\omega) = L_{ж.р}(\omega) - L(\omega),$$

откуда

$$K_k(p) = \frac{(T_1 p + 1)(T_3 k p + 1)}{(T_2 k p + 1)(T_1 k p + 1)},$$

где $T_{2к} = 1,43$ сек; $T_{1к} = 10$ сек; $T_{3к} = 0,17$ сек; $T_{4к} = 0,026$ сек.

Из построения, приведенного на рис. 8.58, следует, что введение последовательного корректирующего устройства позволяет получить относительную амплитуду периодического движения на входе нелинейного элемента, равную $A/a = 1,12$, что и требовалось обеспечить.

**УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ
ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ**

Во всем предыдущем изложении предполагалось, что действующие на линейную систему внешние воздействия представляют собой некоторые заданные функции времени. Реальные внешние воздействия, действующие на системы автоматического управления, как правило, имеют случайный характер. В этих случаях как внешние воздействия, так и переменные, характеризующие динамические свойства систем управления, являются случайными функциями времени. Здесь целесообразно уже вводить в рассмотрение те или иные вероятностные характеристики в зависимости от выбранной статистической модели динамической системы управления. При исследовании статистических моделей динамических систем так же, как при исследовании моделей систем управления при заданных во времени воздействиях, возникает ряд задач исследования их динамических свойств и, в частности, их устойчивости. Прежде чем переходить к рассмотрению вопросов устойчивости статистических моделей нелинейных систем, дадим очень кратко некоторые общие сведения из теории случайных процессов, которые потребуются нам в дальнейшем для исследования динамических свойств статистических моделей нелинейных систем.

§ 1. Некоторые общие сведения из теории случайных процессов

1. Случайный процесс и его основные характеристики. Случайным процессом или случайной функцией называется совокупность случайных величин $x(t)$, зависящих от непрерывного параметра t . Интервалом изменения времени t является вся временная прямая $-\infty < t < \infty$. Таким образом, для каждого фиксирован-

ного значения времени t величина $x(t)$ является случайной величиной.

Случайный процесс $x(t)$ не зависит *определенным заранее известным образом* от времени t . Поэтому нельзя предсказать протекание единичного случайного процесса, но можно описать статистические свойства множества случайных процессов, протекающих в одинаковых условиях.

Плотности вероятности и их некоторые свойства. Рассмотрим основные статистические характеристики случайных процессов.

1. *Одномерная плотность вероятности или дифференциальная функция распределения вероятностей $W_1(x, t)$* является простейшим законом распределения и характеризует вероятность того, что в момент времени t случайная величина $x(t)$ находится в интервале $(x, x + dx)$. В зависимости от того, какой вид имеет выражение для плотности вероятности $W_1(x, t) = W(x)$, различают случайные величины с нормальным или гауссовым законом распределения, биномиальным законом распределения, распределением Пуассона и т. п. Большую роль в теории автоматического управления играет так называемый *нормальный закон распределения*, называемый также *законом Гаусса*. Выражение для плотности вероятности $W(x)$ в этом случае имеет следующий вид:

$$W(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}, \quad (9.1)$$

где m_x — математическое ожидание; σ_x — среднеквадратическое отклонение. Семейство кривых $W(x)$ при разных значениях σ_x приведено на рис. 9.1.

Случайные процессы в системах автоматического управления, как правило, можно характеризовать нормальным законом распределения (9.1) ввиду того что они порождаются большим количеством случайных факторов. Строгое доказательство этого утверждения можно дать на основе так называемой центральной предельной теоремы.

Зная распределения $W_1(x, t)$ для $x(t)$ при любом t , мы располагаем неполной характеристикой случайного

процесса $x(t)$, т. е. возможны случайные процессы, обладающие одинаковыми распределениями $W_1(x, t)$, но имеющие различные статистические соотношения между значениями $x(t_1)$ и $x(t_2)$, принимаемыми в разные моменты времени t_1 и t_2 . Более полной характеристикой

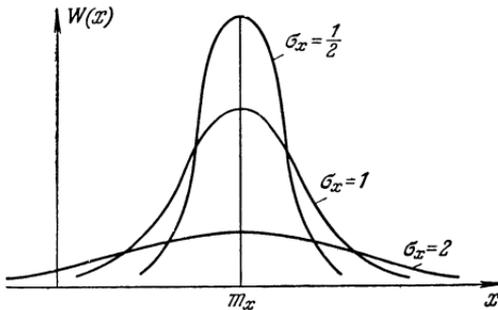


Рис. 9.1.

случайного процесса является двумерная плотность вероятности

$$W_2(x_1, t_1; x_2, t_2),$$

характеризующая вероятность того, что в момент времени $t=t_1$ случайная величина $x(t_1)$ находится в интервале $(x_1; x_1+dx_1)$, а в момент времени $t=t_2$ — в интервале $(x_2; x_2+dx_2)$.

Полной характеристикой случайного процесса является *многомерная плотность вероятности*

$$W(x_1, t_1; \dots x_n, t_n),$$

характеризующая вероятность того, что случайная величина $x_1=x(t_1)$ в момент времени $t=t_1$ находится в интервале (x_1, x_1+dx_1) , случайная величина $x(t_2)=x_2$ в момент времени $t=t_2$ находится в интервале (x_2, x_2+dx_2) , а случайная величина $x_n=x(t_n)$ в момент времени $t=t_n$ находится в интервале (x_n, x_n+dx_n) . Очевидно, что чем больше точек n , тем детальнее можно выяснить статистические свойства случайных процессов.

Можно показать, что n -мерная плотность вероятности обладает следующими свойствами:

$$\text{а) } W_n = W(x_1, t_1; \dots, x_n, t_n) \geq 0, \quad (9.2)$$

$$\text{б) } \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W_n dx_1 \dots dx_n}_{n \text{ раз}} = 1, \quad (9.3)$$

в) W_n — симметричная функция пар переменных

$$\text{г) } W_k = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W_n dx_{k+1} \dots dx_n}_{(n-k) \text{ раз}}. \quad (9.4)$$

Из (9.4) следует, что, зная n -мерную плотность вероятности, можно определить все k -мерные (при $k < n$).

Характеристические функции и их некоторые свойства. Вместо плотностей вероятности

$$W_1(t, x), W_2(t_1, x_1; t_2, x_2), \dots$$

для характеристики случайных процессов в отдельные моменты времени можно задать так называемые *характеристические функции*

$$f_{1x}(t, u), f_{2x}(t_1, u_1; t_2, u_2), \dots,$$

где

$$f_{1x}(t, u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} W_1(t, x) dx, \quad (9.5)$$

$$\begin{aligned} f_{2x}(t_1, u_1; t_2, u_2) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(u_1 x_1 + u_2 x_2)} W_2(t_1, x_1; t_2, x_2) dx_1 dx_2, \quad (9.6) \end{aligned}$$

.....

которые однозначно связаны с соответствующими функциями распределения W_k . Использование характеристических функций позволяет значительно упростить решение ряда конкретных задач. Приведем ряд свойств

б) *Марковский случайный процесс* имеет место в тех случаях, когда вероятность для системы находиться в определенном состоянии зависит от ее состояния лишь в предыдущий, например, бесконечно близкий момент, и не зависит от предыстории системы. Поэтому для того чтобы полностью описать марковский случайный процесс, надо знать *только две* функции — одномерную плотность вероятности W_1 и плотность условной вероятности U :

$$\begin{aligned} W_2(t_1, x_1; t_2, x_2) &= W_1(t_1, x_1) U(t_2, x_2 | t_1, x_1) = \dots \\ &\dots = W_1(t_1; x_1) U(t_n; x_n | t_{n-1}, x_{n-1}), \end{aligned} \quad (9.15)$$

где $U(t_n, x_n | t_{n-1}, x_{n-1})$ — вероятность того, что в момент времени t_n значение случайного процесса $x(t)$ находится в интервале $(x_n; x_n + dx_n)$ *при условии*, что в предшествующий момент времени он принимал значение x_{n-1} .

в) *Стационарный случайный процесс* характеризуется тем, что все функции плотности вероятности (а следовательно, и все характеристические функции) не зависят от начала отсчета во времени, т. е.

$$W_1(x_1, t_1) = W_1(x_1, t_1 + \tau), \quad (9.16)$$

$$W_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = W_2(x_1, t_1 + \tau; x_2, t_2 + \tau), \quad (9.17)$$

.....

при любом $\tau \geq 0$.

Из сформулированного выше определения вытекает, что одномерная плотность вероятности W_1 не зависит от времени, т. е.

$$W_1(x, t) = W_1(x), \quad (9.18)$$

а двумерная плотность вероятности зависит только от $\tau = t_2 - t_1$.

Моментные характеристики случайных процессов. Рассмотренные выше плотности вероятности являются наиболее полной характеристикой случайных процессов. Однако в ряде случаев для характеристики случайных процессов пользуются так называемыми *моментными характеристиками*. *Моментная характеристика или момент n -го порядка* случайного процесса $x(t)$ определяется

как математическое ожидание случайного процесса в моменты времени t_1, \dots, t_n :

$$\begin{aligned} m_n(t_1, t_2, \dots, t_n) &= M\{x(t_1)x(t_2)\dots x(t_n)\} = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n\text{-раз}} x_1 x_2 \dots x_n W_n(x_1, t_1; \dots, x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Момент первого порядка или среднее значение случайного процесса $x(t)$ определяется как

$$m_x(t) = M\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x W_1(x, t) dx = \bar{x}. \quad (9.20)$$

Стационарный случайный процесс называется эргодическим, если среднее значение по времени:

$$m_x = \bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt = \text{const} \quad (9.21)$$

равно его среднему значению по множеству, т. е.

$$\bar{x} = \bar{\bar{x}}.$$

Это свойство является следствием так называемой эргодической гипотезы, выдвинутой советским ученым А. Я. Хинчиным и доказанной лишь для некоторых случайных процессов (в этом случае следует говорить уже не о гипотезе, а об эргодической теореме).

Введем понятие центрированного случайного процесса

$$x^0(t) = x(t) - m_x(t), \quad (9.22)$$

где $m_x(t)$ — математическое ожидание (среднее значение) случайного процесса $x(t)$. Момент второго порядка случайного процесса $x(t)$ называется корреляционной функцией $R_x(t_1, t_2)$:

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= M\{x(t_1), x(t_2)\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)x(t_2) W_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Для стационарного эргодического случайного процесса корреляционная функция

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) x(t + \tau) dt, \quad (9.24)$$

где $\tau = t_2 - t_1$ служит мерой связи между значениями $x(t)$ и $x(t + \tau)$. Аналогично можно записать выражения и для моментов более высокого порядка. Однако наибольшее значение имеют моменты первого и второго порядков.

Наряду с моментом второго порядка для случайного процесса $x(t)$ (корреляционной функцией) вводится понятие момента второго порядка для двух случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$. Этот момент, называемый также взаимной корреляционной функцией $R_{xy}(t_1, t_2)$, определяется как математическое ожидание случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$ соответственно в моменты времени t_1 и t_2 :

$$\begin{aligned} R_{xy}(t_1, t_2) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1) y(t_2) W_2(x_1, t_1; y_2, t_2) dx_1 dy_2 = \\ &= M\{x(t_1) y(t_2)\}. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Для двух стационарных эргодических случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$ взаимная корреляционная функция определяется как среднее значение произведения случайных величин $x(t)$ и $y(t + \tau)$:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) y(t + \tau) dt \quad (9.26)$$

и служит мерой взаимной связи между значениями $x(t)$ и $y(t + \tau)$. Наряду с корреляционными функциями в теории вероятностей вводятся также понятия нормированных корреляционных функций, которые удобны в тех случаях, когда средние значения случайных процессов

$x(t)$ и $y(t)$ отличны от нуля. Нормированная корреляционная функция $r_x(\tau)$ определяется как

$$r_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)} = \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) x(t+\tau) dt}{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t) dt} \leq 1, \quad (9.27)$$

и соответственно нормированная взаимная корреляционная функция $r_{xy}(\tau)$ определяется как

$$r_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{\sqrt{R_x(0) R_y(0)}} = \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) y(t+\tau) dt}{\sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2 dt} \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} y^2 dt}}, \quad (9.28)$$

где

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2 dt = \sigma_x^2, \quad (9.29)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} y^2 dt = \sigma_y^2. \quad (9.30)$$

Здесь σ_x^2 , σ_y^2 называются соответственно дисперсиями стационарных случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$.

Дисперсия — среднее значение квадрата отклонения случайного процесса $x(t)$:

$$\sigma_x^2 = M\{x(t) - m_x\}^2 = M\{x^0(t)\}^2 \quad (9.31)$$

является важной характеристикой централизованного случайного процесса. Как следует из (9.31), она играет роль меры рассеяния процесса $x(t)$ вокруг своего среднего значения. Величина σ_x называется *стандартным*

отклонением случайного процесса $x(t)$. Можно показать, что корреляционная функция $R_{x^0}(\tau)$ централизованного процесса $x^0(t)$ просто выражается через корреляционную функцию случайного процесса $x(t)$:

$$\begin{aligned} R_{x^0}(\tau) &= M\{x^0(t)x^0(t+\tau)\} = \\ &= M\{[x(t) - m_x][x(t+\tau) - m_x]\} = \\ &= M[x(t)x(t+\tau)] - m_x M[x(t)] - \\ &\quad - m_x M[x(t+\tau)] + m_x^2 = R_x(\tau) - m_x^2. \end{aligned} \quad (9.32)$$

Наряду с корреляционными функциями важной характеристикой стационарного случайного процесса является так называемая *спектральная плотность*, которая определяется как

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X_T(-j\omega) X_T(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2, \quad (9.33)$$

где

$$X_T(j\omega) = \int_{-T}^{+T} e^{-j\omega t} x(t) dt. \quad (9.34)$$

Таким образом, спектральная плотность представляет собой спектральную функцию стационарного случайного процесса $x(t)$, определенного в интервале $-T < t < +T$. Очевидно, что для случайного процесса $x^0(t)$ при $-\infty < t < \infty$ спектральной функции не существует, так как $x(t)$ при этом не удовлетворяет условиям существования преобразования Фурье.

Как следует из (9.33), спектральная функция является четной функцией частоты ω и зависит только от абсолютной величины спектральной функции $X_T(j\omega)$. Физический смысл спектральной плотности заключается в том, что $S_{xx}(\omega)d\omega$ представляет собой среднюю мощность, выделяемую в электрической цепи, к которой приложено напряжение $x^0(t)$, на сопротивлении один Ом в диапазоне частот $(\omega, \omega+d\omega)$. Аналогично определяется взаимная спектральная плотность двух случайных функций $x(t)$ и $y(t)$:

$$S_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X_T(-j\omega) Y_T(j\omega), \quad (9.35)$$

где

$$X_T(j\omega) = \int_{-T}^{+T} e^{-j\omega t} x(t) dt, \quad (9.36)$$

$$Y_T(j\omega) = \int_{-T}^{+T} e^{-j\omega t} y(t) dt. \quad (9.37)$$

В отличие от собственной спектральной плотности, взаимная спектральная плотность $S_{xy}(j\omega)$ является комплексной функцией. Для взаимной спектральной плотности справедливо равенство

$$S_{xy}(j\omega) = S_{yx}(-j\omega). \quad (9.38)$$

В тех случаях, когда средние значения $x(t)$ и $y(t)$ не равны нулю, удобно ввести нормированные спектральные плотности. Так, собственная спектральная плотность в случае, когда $\bar{x} \neq 0$, может быть представлена в виде

$$S_{xx}(\omega) = (\bar{x})^2 \delta(\omega) + S(\omega), \quad (9.39)$$

где $\delta(\omega)$ — дельта-функция частоты ω . Тогда нормированная спектральная плотность будет определяться как

$$S_n(\omega) = \frac{S(\omega)}{\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega}. \quad (9.40)$$

Связь между корреляционными функциями и спектральными плотностями. Собственная спектральная плотность S_{xx} является изображением Фурье для корреляционной функции $R_x(\tau)$:

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (9.41)$$

или

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad (9.42)$$

$$S_{xx}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \quad (9.43)$$

Справедливо и обратное утверждение, что корреляционная функция является обратным изображением Фурье для спектральной плотности:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{xx}(\omega) \cos \omega\tau \, d\omega. \quad (9.44)$$

При $\tau = 0$ из (9.44) получаем

$$\sigma_x^2 = R_x(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{xx}(\omega) \, d\omega. \quad (9.45)$$

Совершенно аналогичным образом можно определить взаимную спектральную плотность случайных стационарных процессов $x(t)$ и $y(t)$:

$$S_{xy}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} \, d\tau \quad (9.46)$$

и

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(j\omega) e^{j\omega\tau} \, d\omega. \quad (9.47)$$

Приведенные выше соотношения являются основным результатом так называемой корреляционной теории стационарных случайных процессов А. Я. Хинчина (1938).

Во всем дальнейшем изложении будем исходить из корреляционной теории случайных стационарных процессов и считать, что тот или иной случайный процесс полностью нам известен, если определены первый и второй моменты случайного процесса (его математическое ожидание и дисперсия).

Выше приведены лишь основные конечные соотношения. Желющие могут ознакомиться с доказательством приведенных соотношений в соответствующей специальной литературе.

§ 2. Прохождение случайных процессов через линейную часть системы

Допустим, что случайный стационарный процесс $y(t) = y^0(t) + m_y$, характеристики которого нам известны, действует на входе устойчивой линейной части системы, характеризуемой передаточной функцией (рис. 9.2):

$$K_{л.ч}(p) = \frac{\mathcal{L}\{z(t)\}}{\mathcal{L}\{y(t)\}} = \frac{b_0 p^m + \dots + b_m}{a_0 p^n + \dots + a_n}. \quad (9.48)$$

Определим характеристики случайного стационарного процесса $z(t) = z^0(t) + m_z$: спектральные плотности и корреляционные функции на выходе линейной системы.

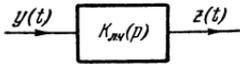


Рис. 9.2.

В связи с тем, что процессы на входе и выходе линейной системы $y(t)$ и $z(t)$ носят случайный характер, частотную характеристику линейной системы, соответствующую (9.48) можно, допуская определенную нестрогость, определить как предел отношения спектральных функций $Z_T(j\omega)$ и $Y_T(j\omega)$, т. е.

$$K_{л.ч}(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{Z_T(j\omega)}{Y_T(j\omega)}, \quad (9.49)$$

где

$$Y_T(j\omega) = \int_{-T}^T e^{-j\omega t} y_T(t) dt, \quad (9.50)$$

$$Z_T(j\omega) = \int_{-T}^T e^{-j\omega t} z_T(t) dt. \quad (9.51)$$

В соответствии с (9.33) спектральная плотность $S_{zz}(\omega)$ выходной величины линейной части системы $z(t)$ будет определяться следующим выражением:

$$S_{zz}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} Z_T(j\omega) Z_T(-j\omega). \quad (9.52)$$

Преобразуем выражение для $S_{zz}(\omega)$ к следующему виду:

$$S_{zz}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{Z_T(-j\omega)}{Y_T(-j\omega)} \cdot \frac{Z_T(j\omega)}{Y_T(j\omega)} \right] \times \\ \times \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} [Y_T(-j\omega) Y_T(j\omega)]. \quad (9.53)$$

Из (9.53) нетрудно заключить, что

$$S_{zz}(\omega) = |K_{л.ч}(j\omega)|^2 S_{yy}(\omega), \quad (9.54)$$

где $S_{yy}(\omega)$ — спектральная плотность случайного процесса $y(t)$, действующего на входе линейной части системы.

Таким образом, спектральная плотность $S_{zz}(\omega)$ выходной величины $z(t)$ устойчивой линейной части системы равна спектральной плотности $S_{yy}(\omega)$ входной величины $y(t)$, умноженной на квадрат модуля частотной характеристики линейной части системы.

Зная $S_{zz}(\omega)$ и используя (9.54), нетрудно найти дисперсию выходной величины линейной части системы

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{zz}(\omega) d\omega \quad (9.55)$$

или

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |K_{л.ч}(j\omega)|^2 S_{yy}(\omega) d\omega. \quad (9.56)$$

Можно также получить выражение для σ_z^2 через корреляционные функции.

Нетрудно также показать, что среднее значение m_z выходной величины линейной части системы равно

$$m_z = m_y \frac{b_m}{a_n}, \quad (9.57)$$

где $m_y = \text{const}$ — математическое ожидание входной величины линейной части системы.

Поступая аналогично, можно получить выражение для взаимной спектральной плотности

$$S_{yz}(j\omega) = K_{л.ч}(j\omega) S_{yy}(\omega). \quad (9.58)$$

Из (9.58) следует, что взаимная спектральная плотность входной и выходной величин линейной части системы равна спектральной плотности входной величины, умноженной на частотную характеристику.

§ 3. Прохождение случайных процессов через нелинейные элементы

Допустим, что на входе нелинейного элемента, характеризующегося нелинейной функцией (рис. 9.3)

$$y = \Phi(x), \quad (9.59)$$

действует стационарный случайный процесс $x(t)$ с нормальным распределением

$$x(t) = x^0(t) + m_x(t), \quad (9.60)$$

где $x^0(t)$ — центрированный случайный процесс, $m_x(t)$ — математическое ожидание случайного процесса.

Таким образом, задача заключается в том, чтобы по заданным характеристикам входного процесса $x(t)$

определить вероятностные характеристики (например, первый момент) случайного процесса на выходе нелинейного элемента. Зная нелинейную

характеристику $y = \Phi(x)$, запишем выражение для первого момента на выходе нелинейного элемента:

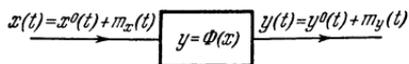


Рис. 9.3.

$$m_y(t) = M\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi[x(t)] W_1(x) dx. \quad (9.61)$$

Отметим, что для случайного входного процесса с нормальным распределением величина m_y определяется только величинами m_x и σ_x :

$$m_y = m_y(m_x, \sigma_x), \quad (9.62)$$

которые могут зависеть от времени.

Выражения для коэффициентов статистической линеаризации для некоторых типовых нелинейных элементов можно найти в приложении 8. В приложении 9

приведены соответствующие графики зависимостей $m_y(m_x, \sigma_x)$.

Из рассмотрения графиков зависимости $m_y(m_x, \sigma_x)$ можно сделать ряд выводов, являющихся общими для широкого класса нелинейных элементов.

1. Наличие случайной составляющей на входе приводит к сглаживанию характеристики нелинейного элемента.

Особенно ярко эффект сглаживания нелинейных характеристик имеет место в случае релейных характеристик.

2. При увеличении дисперсии процесса на входе увеличивается диапазон характеристики $m_y(m_x, \sigma_x)$, где она приближается к линейной. Следует отметить, что эффект линеаризации нелинейных характеристик случайной составляющей имеет ту же природу, что и хорошо известный эффект вибрационной линеаризации периодическим сигналом.

3. Если в качестве эффективного коэффициента усиления рассмотреть коэффициент

$$k_{н.э} = \frac{\partial m_y}{\partial m_x}, \quad (9.63)$$

то его значение уменьшается при увеличении дисперсии входного процесса, причем это характерно для всех нелинейных элементов, для которых коэффициент dy/dx падает с увеличением абсолютного значения входной величины.

4. В случае несимметричной характеристики нелинейного элемента в выходном сигнале появляется средняя составляющая даже в том случае, когда ее не было на входе. Об этом следует всегда помнить при исследовании систем с несимметричными нелинейными характеристиками при случайных воздействиях.

§ 4. Абсолютная устойчивость процессов в нелинейных системах автоматического управления при случайных воздействиях

1. Критерий устойчивости. Если известно, что внешнее воздействие $f_n^0(t)$ является ограниченной случайной функцией времени, то все сказанное выше относительно абсолютной устойчивости процессов в нелинейных

системах справедливо и в этом случае. В ряде случаев действующие на систему внешние воздействия представляют собой сумму некоторой медленно изменяющейся ограниченной функции времени $m_f(t)$, которую можно рассматривать как математическое ожидание внешнего воздействия $f_n^0(t)$, являющегося случайным процессом, и высокочастотного центрированного нормального стационарного случайного процесса $f_n^{00}(t)$, т. е.

$$f_n^0(t) = m_f(t) + f_n^{00}(t). \quad (9.64)$$

В дальнейшем будет предполагаться, что все координаты нелинейной системы имеют нормальное распределение для любого момента времени и могут быть так же, как и внешнее воздействие $f_n^0(t)$, представлены в следующем виде:

$$x(t) = m_x(t) + x^0(t), \quad (9.65)$$

$$y(t) = m_y(t) + y^0(t), \quad (9.66)$$

где $m_x(t)$ и $m_y(t)$ — соответственно математические ожидания случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$, а $x^0(t)$ и $y^0(t)$ — высокочастотные центрированные нормальные

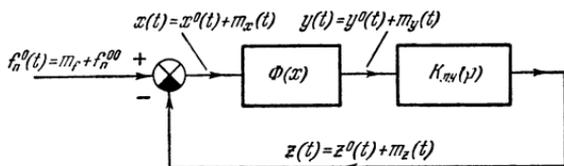


Рис. 9.4.

случайные составляющие. Это означает, что каждый из случайных процессов может быть охарактеризован в любой момент времени математическим ожиданием m и дисперсией σ^2 .

Найдем нелинейное интегральное уравнение системы (рис. 9.4) относительно математических ожиданий. Для этого используем уравнение данной нелинейной систе-

мы, записанное относительно изображений при нулевых начальных условиях:

$$x(p) = F_{\Pi}^{\circ}(p) - K_{\text{л. ч}}(p) \mathcal{L}\{\Phi[x(t)]\} \quad (9.67)$$

или

$$x(t) = m_f(t) - \int_0^{\infty} h'(t-\lambda) m_y(\lambda) d\lambda, \quad (9.68)$$

где

$$m_y(t) = \Phi[m_x(t) + x^0(t)] = m_y\{m_x, \sigma_x\}. \quad (9.69)$$

Характеристики зависимостей $m_y\{m_x, \sigma_x\}$ представляют собой результаты простейших преобразований случайных гауссовых процессов (рис. 9.5). Статистическая модель нелинейной системы, описываемая нелинейным интегральным уравнением (9.68) относительно математических ожиданий, приведена на рис. 9.6.



Рис. 9.5.

Рассматривая полученное относительно математических ожиданий нелинейное интегральное уравнение (9.68), видим, что если заменить в нем нелинейную функцию Φ на $m_y\{m_x; \sigma_x\}$, а математические ожидания от функций — самими функциями, то оно по существу

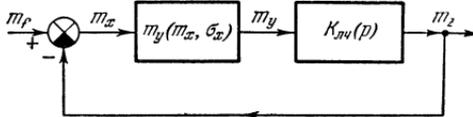


Рис. 9.6.

ничем не отличается от нелинейного интегрального уравнения, которое использовалось для доказательства частотного критерия абсолютной устойчивости процессов. Следовательно, достаточный частотный критерий абсолютной устойчивости можно распространить и на данный случай, т. е. можно сформулировать частотный критерий абсолютной устойчивости процессов для случая, когда на входе системы действует помеха, для которой справедлив нормальный закон распределения:

Для того чтобы нелинейная система автоматического управления, на которую действует внешнее воздействие, содержащее случайную составляющую

$$f_n^0(t) = m_f(t) + f_n^{00}(t),$$

причем

$$|m_f(t)| \leq R_f,$$

была абсолютно устойчивой относительно математических ожиданий, достаточно, чтобы при всех $\omega \geq 0$ выполнялось неравенство

$$\operatorname{Re} \frac{K_{л.ч}(j\omega)}{1 + rK_{л.ч}(j\omega)} + \frac{1}{k-r} > 0 \quad (9.70)$$

и производная нелинейной характеристики $m_y\{m_x, \sigma_x\}$ по m_x удовлетворяла неравенству

$$r < \frac{\partial m_y\{m_x, \sigma_x\}}{\partial m_x} < k. \quad (9.71)$$

Дисперсию σ_x^2 можно оценить посредством дисперсии внешнего воздействия, т. е.

$$\sigma_x^2 \leq k_\sigma^2 \sigma_f^2, \quad (9.72)$$

где k_σ — взаимная корреляционная функция переменных f и x . Тогда неравенство можно переписать следующим образом (если σ_x заменить его верхним значением):

$$r < \frac{\partial m_y\{m_x, k_\sigma \sigma_f\}}{\partial m_x} < k. \quad (9.73)$$

Таким образом, если при помощи ранее полученного критерия абсолютной устойчивости процессов определены значения $k = k_{пр}$ и $r = r_{пр}$, то можно утверждать, что при тех математических ожиданиях и дисперсиях, при которых производная характеристики $\frac{\partial m_y\{m_x, \sigma_x\}}{\partial m_x}$

лежит внутри полосы $(r_{пр}, k_{пр})$, система будет абсолютно устойчивой относительно математических ожиданий.

В том случае, когда известно, что $m_x = 0$, можно воспользоваться кривыми $\left\{ \frac{\partial m_y}{\partial m_x} \right\}_{m_x}$ для определения

тех дисперсий, при которых выполняется условие абсолютной устойчивости.

Если нам требуется по каким-либо соображениям расширить полосу (r, k) , то здесь полностью можно использовать методы синтеза корректирующих устройств, изложенные выше.

Таким образом, в результате обобщения критерия абсолютной устойчивости процессов здесь получены достаточные условия абсолютной устойчивости процессов в нелинейных системах в случае действия на них случайного внешнего воздействия, что позволило решить задачу об устойчивости в большом, при принятых предположениях о нормальном законе распределения всех переменных нелинейной системы.

2. Пример исследования абсолютной устойчивости процессов в нелинейной системе, работающей при наличии помех. При использовании статических систем автоматического управления стремятся выбрать коэффициент усиления разомкнутой системы как можно большим. Структура одной из таких линейных систем, допускающая выбор большого коэффициента усиления, подробно исследовалась в работах М. В. Меерова [1]. Проведем исследование этой системы при учете нелинейности

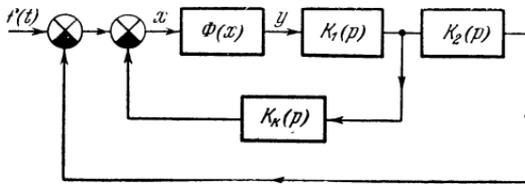


Рис. 9.7.

усилителя мощности в предположении, что на входе системы (рис. 9.7) действует внешнее воздействие $f(x)$, содержащее случайную составляющую:

$$f(t) = m_f(t) + f^{00}(t), \quad (9.74)$$

где

$$|m_f(t)| \leq R_f.$$

На рис. 9.7 обозначены: $\Phi(x)$ — нелинейная характеристика усилителя мощности (будем предполагать, что

нелинейная характеристика $y = \Phi(x)$ имеет вид, приведенный на рис. 9.8); $K_1(p)$, $K_2(p)$ и $K_K(p)$ — передаточные функции:

$$K_1(p) = \frac{k_1}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}, \quad (9.75)$$

$$K_2(p) = \frac{k_2}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}, \quad (9.76)$$

$$K_K(p) = \frac{T p}{T p + 1}, \quad (9.77)$$

где $k_1 = 40$; $k_2 = 15$; $T_1 = 0,01$ сек; $T_2 = 0,1$ сек; $T_3 = 0,34$ сек; $T_4 = 0,1$ сек; $T = 0,1$ сек.

Для данной системы, используя метод логарифмических частотных характеристик, проверим выполнение критерия абсолютной устойчивости процессов при отсутствии помех ($\sigma_f = 0$) и при $A \rightarrow \infty$ и определим, при каких дисперсиях σ_x^2 выполняются условия абсолютной устойчивости процессов.

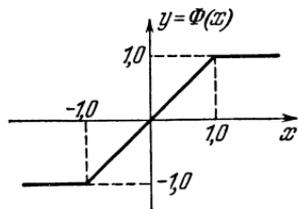


Рис. 9.8.

Для решения поставленной задачи:

1. Построим логарифмическую частотную характеристику линейной части системы в декартовой системе координат $L(\omega) = Q[\varphi(\omega)]$ (рис. 9.9), где

$$\left. \begin{aligned} L(\omega) &= 20 \log \text{mod} \{K_1(j\omega) [K_2(j\omega) + K_K(j\omega)], \} \\ \varphi(\omega) &= \arg \{K_1(j\omega) [K_2(j\omega) + K_K(j\omega)]. \} \end{aligned} \right\} \quad (9.78)$$

2. Из анализа рис. 9.9 следует, что при $A = \infty$ и $\sigma_f = 0$ достаточные условия абсолютной устойчивости процессов не выполняются.

Для выполнения этих условий необходимо уменьшить на 40,6 дБ коэффициент усиления k_1 прямой части цепи, охваченной корректирующим устройством. Однако в этом случае возрастает статическая ошибка системы.

3. При заданных выше значениях k_1 и k_2 и параметрах системы условия абсолютной устойчивости процессов при $\sigma_x = 0$ не выполняются: в данном случае

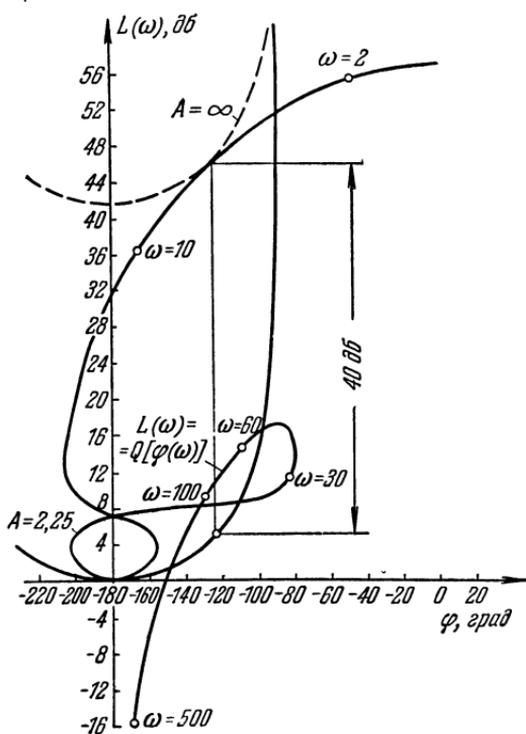


Рис. 9.9.

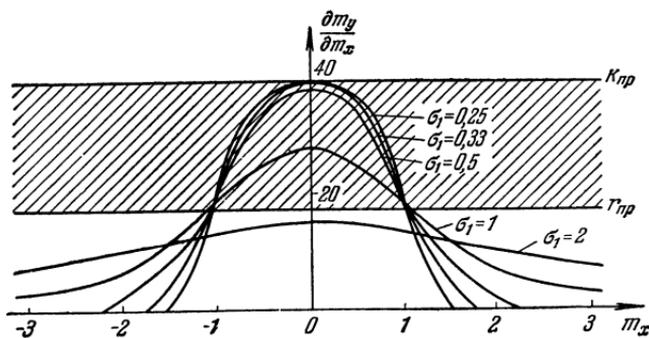


Рис. 9.10.

(рис. 9.10) $A=2,25$; $k_1 \text{ пр} = 40$ и $r_{\text{пр}} = \frac{40}{2,25} = 17,75$ и производная $\partial\Phi/\partial x$ не лежит внутри полосы $(17,75; 40)$. Условия устойчивости также не выполняются и при $\sigma_x > 0$, так как семейство характеристик $\partial t_y/\partial t_x$ при всех $\sigma_x > 0$ лежит вне полосы $(17,75; 40)$.

Для того чтобы обеспечить выполнение условий устойчивости при $\sigma_x \neq 0$, необходимо уменьшить k_1 (или $k_{н.э}$). Если уменьшить, например, $k_{н.э}$ в 40 раз, то можно обеспечить выполнение достаточных условий абсолютной устойчивости при наличии помех и определить,

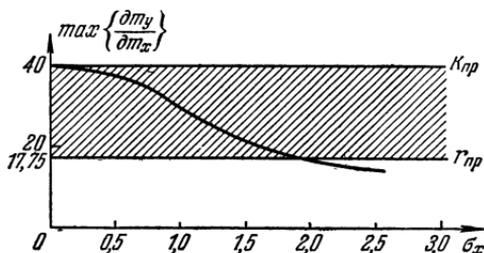


Рис. 9.11.

при каких t_x и σ_x эти условия выполняются. В том случае, когда $t_x = 0$ и $\sigma_x \neq 0$, целесообразно использовать кривую $[\partial t_y/\partial t_x]_{\max}$, построенную в функции σ_x (рис. 9.11) для определения значений σ_x , при которых выполняются условия устойчивости.

Таким образом, если рассматривать приведенную выше систему с учетом нелинейности при наличии помех, то, как было показано выше с позиции достаточного критерия абсолютной устойчивости, увеличение коэффициента k_1 *недопустимо*, т. е. в этом случае для уменьшения статической ошибки необходимо использовать другую структуру системы с другим способом коррекции.

ИССЛЕДОВАНИЕ КАЧЕСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ (МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ)

§ 1. Сущность метода

После исследования устойчивости нелинейной системы, на входе которой действует случайное внешнее воздействие, возникает вторая задача, связанная с определением статистических характеристик отдельных переменных замкнутой системы. Эта задача обычно называется исследованием точности или качества нелинейных систем при случайных воздействиях. Решение задач анализа в общем случае, т. е. когда внешнее воздействие и отдельные переменные системы характеризуются произвольными случайными функциями времени, представляет значительные трудности.

Обычно при исследовании точности нелинейных систем вводится предположение, что отдельные переменные системы характеризуются нормальным (гауссовым) распределением. В этом случае как внешнее воздействие $f(t)$, так и переменные системы полностью определены, если известны их математические ожидания m и дисперсии σ^2 . Обоснованием такого предположения для широкого класса нелинейных систем является наличие линейных звеньев, которые «приближают» распределения к нормальному*). Обычно при этом бывает достаточно знание математического ожидания m_x и дисперсии σ_x^2 одной из переменных, например, входной величины нелинейного элемента $x(t)$.

Зная m_x и σ_x^2 , не представляет большой трудности определить математические ожидания и дисперсии сигналов в интересующих нас точках системы.

При исследовании точности нелинейных систем наибольшее распространение получил так называемый

*) См. А. А. Первозванский [3].

метод статистической линеаризации. Основная идея метода статистической линеаризации заключается в том, что исходная нелинейная характеристика заменяется некоторыми коэффициентами линеаризации, которые в том или ином смысле статистически эквивалентны исходному нелинейному преобразованию.

Обычно требуется, чтобы выходные сигналы реального и линеаризованного нелинейного элемента имели достаточно близкие математические ожидания и корреляционные функции.

Существует несколько разновидностей метода статистической линеаризации. Метод статистической линеаризации был предложен независимо в 1954 г. в США Р. К. Бутоном [2] и в СССР И. Е. Казаковым [1—5].

В дальнейшем метод статистической линеаризации получил развитие в работах Е. П. Попова [9], А. А. Первозванского [1—3], И. С. Моросанова [4, 5] и многих других.

§ 2. Статистическая линеаризация нелинейных элементов

Рассмотрим нелинейную систему (рис. 10.1), на входе которой действует внешнее воздействие $f(t)$, характеризующееся нормальным законом распределения

$$f(t) = m_f(t) + F^0(t), \quad (10.1)$$

где $m_f(t)$ — математическое ожидание внешнего воздействия $f(t)$; $F^0(t)$ — центрированная случайная функция.

Тогда, если считать, что выполняется допущение о справедливости нормального закона распределения для всех переменных нелинейной системы, можно записать:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= m_x(t) + X^0(t), \\ y(t) &= m_y(t) + Y^0(t), \\ z(t) &= m_z(t) + Z^0(t). \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

Теперь представим переменную $y = \Phi(x)$ на выходе

нелинейного элемента (рис. 10.2) в виде

$$y(t) \approx S(t) = \Phi_0(m_x) + k_1 X^0(t), \quad (10.3)$$

где $\Phi_0(m_x)$ — математическое ожидание нелинейной функции $\Phi(x)$.

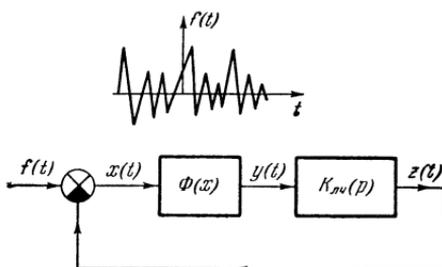


Рис. 10.1.

Для нелинейных безынерционных элементов, характеризуемых нечетными функциями

$$S(t) = k_0 m_x + k_1 X^0(t), \quad (10.4)$$

где k_0 — эквивалентный статистический коэффициент усиления нелинейного элемента по математическому ожиданию (по средней составляющей); k_1 — эквивалентный статистический коэффициент усиления нелинейного элемента по случайной составляющей.

Эквивалентные схемы прохождения случайного сигнала $x(t)$ через линеаризованный элемент показаны на рис. 10.3.

Таким образом, функция $S(t)$ аппроксимирует нелинейную функцию $y = \Phi(x)$ линеаризованной зависимостью, которая должна быть в некотором смысле статистически эквивалентна $y(t)$.

Как уже было отмечено, различные модификации метода статистической линеаризации отличаются способом вычисления коэффициентов k_0 и k_1 .

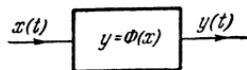


Рис. 10.2.

Первый способ вычисления коэффициентов k_0 и $k_1^{(1)}$. Первый метод вычисления коэффициентов k_0 и $k_1^{(1)}$, предложенный в 1954 г. Р. К. Бутоном и И. Е. Казаковым, состоит в выполнении условия

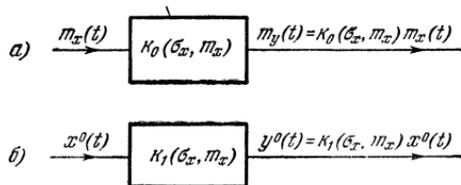


Рис. 10.3.

равенства математических ожиданий и дисперсий соответственно для $y(t)$ и $S(t)$, т. е.

$$\left. \begin{aligned} M\{y(t)\} &= M\{S(t)\}; \\ M\{[y(t) - m_y(t)]^2\} &= M\{[S(t) - m_S(t)]^2\}. \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

Подставляя в (10.5) выражения для $y(t)$ и $S(t)$, получим:

$$\left. \begin{aligned} m_y &= k_0 m_x, \\ \sigma_y &= k_1^{(1)} \sigma_x. \end{aligned} \right\} \quad (10.6)$$

Из (10.6) следует:

$$k_0 = \frac{m_y(t)}{m_x(t)}, \quad (10.7)$$

$$k_1^{(1)} = \pm \frac{\sigma_y(t)}{\sigma_x(t)} \quad (10.8)$$

или

$$k_0(\sigma_x, m_x) = \frac{1}{m_x} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) W_1(x, t) dx, \quad (10.9)$$

$$k_1^{(1)}(\sigma_x, m_x) = \pm \left\{ \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(x) W_1(x, t) dx - k_0^2 m_x^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (10.10)$$

где $W_1(x, t)$ — одномерная функция распределения плотности вероятности случайной функции $x(t)$.

Знаки в (10.8) и (10.10) следует выбирать такими, чтобы знаки $y(t)$ и $S(t)$ совпадали.

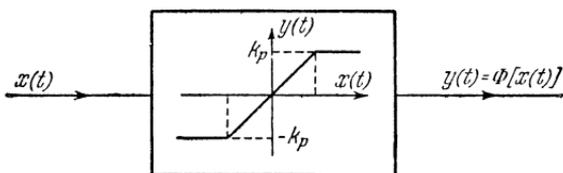


Рис. 10.4.

Пример. Вычислим статистический коэффициент $k_1^{(1)}$ для нелинейности типа насыщения (рис. 10.4)

$$y = \Phi(x) = \begin{cases} x & \text{при } |x| \leq k_p, \\ k_p & \text{при } |x| > k_p, \end{cases} \quad (10.11)$$

если $m_x \equiv 0$ и кривая плотности распределения $x(t)$ известна (рис. 10.5, а).

Среднее значение квадрата выходной величины нелинейного элемента (дисперсия σ_y^2)

$$\sigma_y^2 = M\{y^2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 W_1(y) dy. \quad (10.12)$$

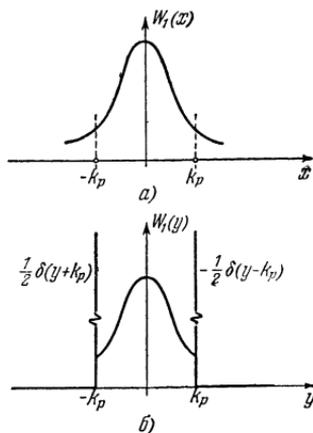


Рис. 10.5.

Вид одномерной функции распределения $W_1(y)$ плотности вероятности случайной функции на выходе нелинейного элемента показан на рис. 10.5, б.

Из рассмотрения рис. 10.5 следует, что

$$\text{при } \left. \begin{aligned} W_1(y) &= W_1(x) \\ -k_p &< x < k_p, \\ -k_p &< y < k_p, \\ W_1(y) &\equiv 0 \text{ при } |y| \geq k_p \end{aligned} \right\} \quad (10.13)$$

и, кроме того,

$$\int_{-k_p}^{+k_p} W_1(x) dx = \int_{-k_p}^{+k_p} W_1(y) dy. \quad (10.14)$$

В точках $y = \pm k_p$ функция $W_1(y)$ будет равна дельта-функции, т. е.

$$W_1(y) = \frac{1}{2} \delta(y \pm k_p) \quad \text{при} \quad y = \pm k_p. \quad (10.15)$$

Подставляя выражения для $W_1(y)$ вместо (10.12), получим

$$\sigma_y^2 = 2 \int_0^{k_p} x^2 W_1(x) dx + 2k_p^2 \left[\frac{1}{2} - \int_0^{k_p} W_1(x) dx \right], \quad (10.16)$$

где

$$W_1(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (10.17)$$

Подставляя выражение для $W_1(x)$ из (10.17) в (10.16), получим:

$$\sigma_y^2 = \frac{2}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_0^{k_p} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} dx + 2k_p^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_0^{k_p} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} dx \right]. \quad (10.18)$$

Обозначим

$$\bar{p} = \frac{x}{\sigma_x}.$$

Тогда выражение (10.18) можно переписать как

$$\sigma_y^2 = \frac{2\sigma_x^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{k_p/\sigma_x} \bar{p}^2 e^{-\frac{\bar{p}^2}{2}} d\bar{p} + 2k_p^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{k_p/\sigma_x} e^{-\frac{\bar{p}^2}{2}} d\bar{p} \right]. \quad (10.19)$$

После вычисления первого интеграла по частям, деления левой и правой частей на σ_x^2 и извлечения квадратного корня получим следующее выражение для $k_1^{(1)}$:

$$k_1^{(1)} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \left\{ -\sqrt{\frac{2k_p}{\pi\sigma_y}} e^{-\frac{k_p^2}{2\sigma_y^2}} + \frac{k_p^2}{\sigma_x^2} + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 - \frac{k_p^2}{\sigma_x^2}\right) \int_0^{k_p/\sigma_x} e^{-\frac{\bar{p}^2}{2}} d\bar{p} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (10.20)$$

Подставив численные значения в (10.20), можно построить кривую зависимость коэффициента $k_1^{(1)}$ от σ_x .

Второй способ вычисления коэффициентов k_0 и $k_1^{(2)}$. Второй метод вычисления коэффициентов k_0 и $k_1^{(2)}$ состоит в выполнении условия минимума математического ожидания квадрата разности $y(t)$ и $S(t)$, т. е.

$$\Delta_{yS} = M\{[y(t) - S(t)]^2\} = \min. \quad (10.21)$$

Подставляя в (10.21) выражения для $y(t)$ и $S(t)$, получим:

$$\Delta_{yS} = M\{[m_y(t) + Y^0(t) - k_0 m_x(t) - k_1 X^0(t)]^2\} = \min. \quad (10.22)$$

Возведем в квадрат выражение, стоящее в квадратных скобках:

$$[y(t) - S(t)]^2 = m_y^2(t) + \sigma_y^2(t) + k_0^2 m_x^2(t) + \\ + k_1^{(2)2} \sigma_x^2(t) - 2k_0 m_x m_y - 2k_1^{(2)} R_{yx}(t_1 t). \quad (10.23)$$

Для нахождения минимума величины Δ_{yS} находим частные производные по k_0 и $k_1^{(2)}$ и приравняем их нулю:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial [y(t) - S(t)]^2}{\partial k_0} &= 0, \\ \frac{\partial [y(t) - S(t)]^2}{\partial k_1^{(2)}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.24)$$

Из (10.24) после элементарных преобразований получаем выражения

$$k_0 = \frac{m_y(t)}{m_x(t)}, \quad (10.25)$$

$$k_1^{(2)} = \frac{R_{yx}(t_1 t)}{\sigma_x^2(t)}, \quad (10.26)$$

которые, как нетрудно показать, и определяют минимум Δ_{yS} .

Таким образом, коэффициенты статистической линеаризации k_0 и $k_1^{(2)}$ определяются следующими выражениями:

$$k_0 = \frac{1}{m_x} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) W_1(x, t) dx, \quad (10.27)$$

$$k_1^{(2)} = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) (x - m_x) W_1(x, t) dx, \quad (10.28)$$

где $W_1(x, t)$ — одномерная функция распределения плотности вероятности случайной функции $x(t)$.

Пример. Вычислим коэффициент статистической линеаризации $k_1^{(2)}$ при $m_x \equiv 0$ для релейного элемента с характеристикой

$$y = \Phi(x) = k_p \operatorname{sign} x = \begin{cases} +k_p & \text{при } x > 0, \\ -k_p & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (10.29)$$

В соответствии с (10.28) выражение для коэффициента $k_1^{(2)}$ имеет следующий вид:

$$k_1^{(2)} = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) x W_1(x, t) dx, \quad (10.30)$$

где

$$W_1(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$$

или, после постановки $W_1(x)$ в (10.30)

$$k_1^{(2)} = \frac{k_p}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} x \left(\frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \right) x dx = \\ = \frac{2k_p}{\sigma_x^3 \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k_p}{\sigma_x}. \quad (10.31)$$

Третий способ вычисления коэффициентов $k_1^{(3)}$. Расчеты показывают, что вычисление коэффициента k_1 по первому способу дает верхнее значение корреляционной функции, а по второму — нижнее значение.

Поэтому более равномерное приближение корреляционной функции получается, если использовать третий способ вычисления коэффициента $k_1^{(3)}$, равный полусумме коэффициентов

$$k_1^{(3)} = \frac{1}{2} (k_1^{(1)} + k_1^{(2)}). \quad (10.32)$$

Статистические коэффициенты усиления для типовых нелинейных характеристик. Используя выражения для статистических коэффициентов усиления k_0 , $k_1^{(1)}$ и $k_1^{(2)}$, можно вычислить их значения для конкретных типовых нелинейных характеристик.

Соответствующие выражения для $k_0(m_x, \sigma_x)$, $k_1^{(1)}(m_x, \sigma_x)$ и $k_1^{(2)}(m_x, \sigma_x)$ приведены в приложении 8.

§ 3. Исследование качества (точности) нелинейных систем на основе метода статистической линеаризации

При изложении различных способов определения статистических коэффициентов линеаризации нелинейных элементов предполагалось, что математическое ожидание m_x и дисперсия σ_x^2 на входе нелинейного элемента уже определены. В действительности же при исследовании качества нелинейной системы обычно

известны: статистические характеристики входного воздействия $f(t)$; характеристика нелинейного элемента $y = \Phi(x)$, а следовательно, и статистические коэффициенты линеаризации нелинейности k_0 и k_1 , которые в общем случае являются функциями m_x и σ_x ; передаточная

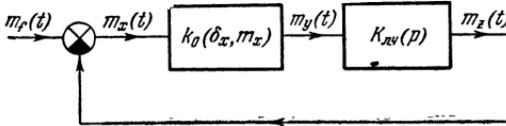


Рис. 10.6.

функция $K_{л.ч}(p)$ или частотная характеристика $K_{л.ч}(j\omega)$ линейной части системы.

Теперь рассмотрим методику, позволяющую определять математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x^2 на входе нелинейного элемента в замкнутой нелинейной системе.

Если использовать статистическую линеаризацию нелинейного элемента, то в этом случае вместо нелинейной системы (см. рис. 10.1) следует рассматривать ее

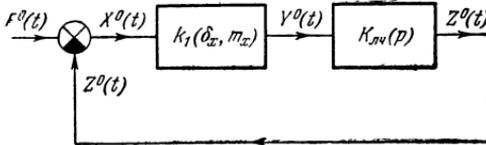


Рис. 10.7.

статистическую модель, которая распадается на две — одну относительно математических ожиданий (рис. 10.6) и вторую — относительно центрированных случайных функций (рис. 10.7).

Модель системы (рис. 10.6) относительно математического ожидания m_x описывается следующей передаточной функцией:

$$\mathcal{L}\{m_x(t)\} = \frac{1}{1 + k_0(\sigma_x, m_x) K_{л.ч}(p)} \mathcal{L}\{m_f(t)\}. \quad (10.33)$$

В связи с тем, что все переменные нелинейной системы — случайные стационарные функции и нас интересует установившийся режим, т. е.

$$m_x = \text{const},$$

$$m_f = \text{const},$$

то вместо (10.33) можно записать

$$m_x = \frac{m_f}{1 + k_0(\sigma_x, m_x) K_{л.ч}(0)}. \quad (10.34)$$

Одного уравнения (10.34) для определения в общем случае m_x и σ_x^2 недостаточно, поэтому запишем еще уравнение для дисперсий σ_x^2 , используя для этого модель относительно центрированных случайных величин (рис. 10.7):

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega, \quad (10.35)$$

где $S_{xx}(\omega)$ — спектральная плотность ошибки $X^0(t)$, которая определяется следующим выражением:

$$S_{xx}(\omega) = \left| \frac{1}{1 + k_1(\sigma_x, m_x) K_{л.ч}(j\omega)} \right|^2 S_{ff}(\omega), \quad (10.36)$$

где $S_{ff}(\omega)$ — спектральная плотность входного воздействия. Подставляя выражение для $S_{xx}(\omega)$ в (10.35), получим:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{1 + k_1(\sigma_x, m_x) K_{л.ч}(j\omega)} \right|^2 S_{ff}(\omega) d\omega. \quad (10.37)$$

Интеграл (10.37) может быть вычислен при помощи формул, приведенных ранее в приложении для интегральных квадратичных оценок. Используя полученные уравнения (10.34) и (10.37), можно определить искомые значения m_x и σ_x^2 . Обычно в тех случаях, когда $m_x \neq 0$, для определения m_x и σ_x^2 приходится использовать метод последовательных приближений.

В тех случаях, когда в нелинейной системе $m_x \equiv 0$, для определения σ_x^2 достаточно использовать лишь одно уравнение (10.37).

§ 4. Примеры исследования качества нелинейных систем

Пример 1. Определим дисперсию на входе нелинейного элемента σ_x^2 для релейной системы, структурная схема которой изображена на рис. 10.8*), используя

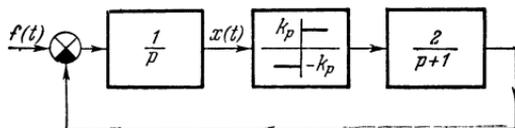


Рис. 10.8.

вая выражение для $k_1^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k_p}{\sigma_x}$ при $k_p=3$ и спектральную плотность входного воздействия

$$S_{ff}(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

при $m_f \equiv 0$.

Для определения σ_x^2 поступим следующим образом:

1. Определяем передаточную функцию замкнутой статистической модели нелинейной системы, структурная

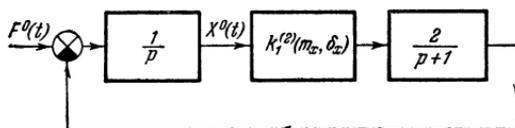


Рис. 10.9.

схема которой относительно $X^0(t)$ приведена на рис. 10.9:

$$K_s(p) = \frac{\mathcal{L}\{X^0(t)\}}{\mathcal{L}\{F^0(t)\}} = \frac{\frac{1}{p}}{1 + k_1^{(2)}(\sigma_x) \frac{2}{p(p+1)}}. \quad (10.38)$$

2. Определяем спектральную плотность ошибки

$$S_{xx}(\omega) = \left| \frac{j\omega + 1}{j\omega(j\omega + 1) + 2k_1^{(2)}(\sigma_x)} \right| \frac{1}{1 + \omega^2}. \quad (10.39)$$

*) См. Дж. Тэлэр, М. Пестель [1], стр. 266.

3. Подставляя $S_{xx}(\omega)$ в выражение для σ_x^2 и используя формулы для вычисления интеграла приложения 10, определяем дисперсию входной величины нелинейного элемента

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{[2k_1^{(2)}(\sigma_x) - \omega^2]^2 + \omega^2} = \frac{1}{4k_1^{(2)}(\sigma_x)} = \frac{\sigma_x}{4\sqrt{\frac{2}{\pi}}}, \quad (10.40)$$

откуда получаем среднеквадратичное значение входной величины нелинейного элемента

$$\sigma_x = \frac{\sqrt{\pi}}{12\sqrt{2}}$$

и его дисперсию

$$\sigma_x^2 = \frac{3,14}{24} \approx 0,12.$$

Пример 2. Вычислим дисперсию на входе нелинейного элемента σ_x^2 для нелинейной системы, структурная схема которой приведена на рис. 10.10, используя

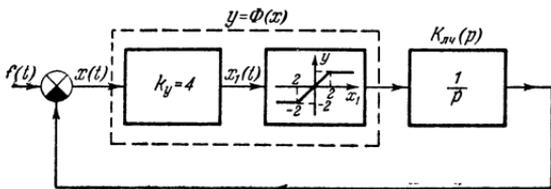


Рис. 10.10.

выражение для $k_1^{(2)}\sigma_x^2$, график которого приведен на рис. 10.11, и спектральную функцию входного воздействия

$$S_{ff}(\omega) = \frac{(1,7)^2}{1 + \omega^2} \quad (10.41)$$

при $m_f \equiv 0$.

Для определения дисперсии σ_x^2 :

1. Определяем передаточную функцию замкнутой статистической модели нелинейной системы относительно

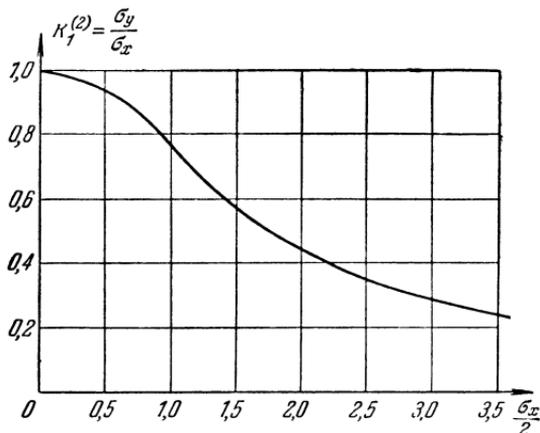


Рис. 10.11.

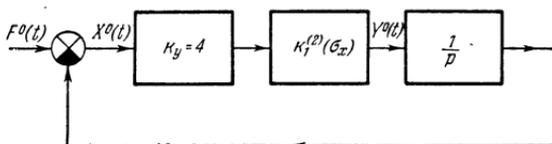


Рис. 10.12.

$X^0(t)$, структурная схема которой приведена на рис. 10.12:

$$K_s(p) = \frac{\mathcal{L}\{X^0(t)\}}{\mathcal{L}\{F^0(t)\}} = \frac{4p}{p + 4k_1^2(\sigma_x)}. \quad (10.42)$$

2. Определяем спектральную функцию $S_{xx}(\omega)$:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{4\omega^2}{\omega^2 + 16[k_1^{(2)}(\sigma_x)]^2} \frac{3}{1 + \omega^2}. \quad (10.43)$$

3. Определяем дисперсию σ_x^2 :

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega \quad (10.44)$$

или

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{12\omega^2 d\omega}{\omega^4 + \{1 + 16[k_1^{(2)}(\sigma_x)]^2\} \omega^2 + 1}. \quad (10.45)$$

Вычисление (10.45) дает

$$\sigma_x = \frac{4,82}{\sqrt{1 + 4k_1^{(2)}(\sigma_x)}}. \quad (10.46)$$

Используя (10.46) и кривую $k_1^{(2)}(\sigma_x)$, графически определяем:

$$\sigma_x = 2,5.$$

Пример 3*). Для нелинейной системы, структурная схема которой приведена на рис. 10.13, найдем

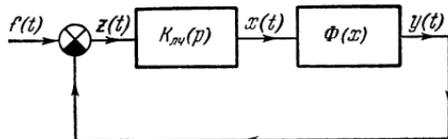


Рис. 10.13.

математическое ожидание и дисперсию на выходе линейной части системы m_x и σ_x^2 , если линейная часть системы характеризуется передаточной функцией

$$K_{л.ч}(p) = \frac{1}{p+1}, \quad (10.47)$$

а нелинейный элемент — характеристикой, изображенной на рис. 10.14.

Внешнее воздействие, действующее на нелинейную систему, имеет спектральную плотность

$$S_{ff}(\omega) = \frac{\sigma_f^2}{\pi} \frac{\beta}{\beta^2 + \omega^2}, \quad (10.48)$$

где

$$\sigma_f = 1,0, \quad \beta = 0,5.$$

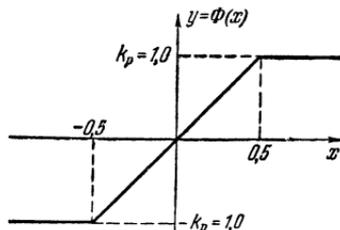


Рис. 10.14.

Для определения искомых m_x и σ_x^2 поступим следующим образом:

*) См. И. Е. Казаков, Б. Г. Доступов [1], стр. 224—226.

1. Найдем выражения для статистических коэффициентов k_0 и $k_1^{(3)} = \frac{1}{2} [k_1^{(1)} + k_p^{(2)}]$:

$$k_0 = \frac{k_p}{m_x} \left\{ (1 + m_1) \Phi_K \left(\frac{1 + m_1}{\sigma_1} \right) - (1 - m_1) \Phi_K \left(\frac{1 - m_1}{\sigma_1} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right)^2} - e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right)^2} \right] \right\}, \quad (10.49)$$

$$k_1^{(1)} = \frac{k_p}{\sigma_x} \left\{ 1 - \frac{k_0 m}{k_p^2} + (m_1^2 + \sigma_1^2 - 1) \left[\Phi_K \left(\frac{1 + m_1}{\sigma_1} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \Phi_K \left(\frac{1 - m_1}{\sigma_1} \right) \right] - \frac{\sigma_1 (1 - m_1)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right)^2} - \right. \\ \left. - \frac{\sigma_1 (1 + m_1)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right)^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (10.50)$$

$$k_1^{(2)} = \frac{k_p}{\sigma_x} \sigma_1 \left[\Phi_K \left(\frac{1 + m_1}{\sigma_1} \right) + \Phi_K \left(\frac{1 - m_1}{\sigma_1} \right) \right], \quad (10.51)$$

где $m_1 = 2mx$, $\sigma_1 = 2\sigma_x$, $\Phi_K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функция Крампа, числовые значения которой приведены в приложении 10.

2. Найдем выражение для математического ожидания на выходе линейной части системы

$$m_x = \frac{K_{л.ч}(0) mf}{1 + k_0(\sigma_x, m_x) K_{л.ч}(0)} = \frac{kmf}{1 + kk_0(\sigma_x, m_x)}, \quad (10.52)$$

а также для дисперсии σ_x^2 :

$$\sigma_x^2 = 2 \int_0^\infty \frac{k^2}{T^2 \omega^2 + [1 + kk_1^{(3)}(m_x, \sigma_x)]^2} \cdot \frac{\sigma_f^2 \beta}{\pi (\beta^2 + \omega^2)} d\omega \quad (10.53)$$

или после вычисления интеграла (10.53)

$$\sigma_x^2 = \frac{k^2 \sigma_f^2}{[1 + kk_1^{(3)}(m_x, \sigma_k)] [1 + kk_1^{(3)}(m_x, \sigma_x) + T\beta]}. \quad (10.54)$$

Таким образом, для определения m_x и σ_x получаем систему двух уравнений:

$$m_x = \frac{0,5}{1 + k_0(m_x, \sigma_x)}, \quad (10.55)$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma_f^2}{[1 + k_1^{(3)}(m_x, \sigma_x)][1 + k_1(m_x, \sigma_x) + 0,5]}.$$

Решим систему уравнений (10.55) методом последовательных приближений.

Для этого зададимся значениями коэффициентов $k_0 = k_1^{(3)} = 2,0$. Определяем $m_x = 0,167$ и $\sigma_x = 0,308$. Во втором приближении определяем $k_0 = 1,8$ и $k_1 = 1,6$ и вычисляем соответствующие этим значениям $m_x = 0,178$ и $\sigma_x = 0,352$. Нетрудно показать, что в третьем приближении значения $m_x = 0,178$ и $\sigma_x = 0,352$. Поэтому ограничимся найденными значениями m_x и σ_x во втором приближении. На этом задачу можно считать решенной.

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

При исследовании нелинейных систем в ряде случаев оказывается недостаточным произвести оценку их показателей качества, используя косвенные методы, и требуется непосредственно построить кривую переходного процесса. Ниже излагается метод приближенного вычисления переходных процессов в дискретных точках,*) который при правильно выбранном интервале интегрирования позволяет получить достаточно высокую точность.

§ 1. Метод приближенного вычисления переходных процессов в нелинейных системах автоматического управления с одним нелинейным элементом

Основные рекуррентные соотношения. Как уже указывалось, нелинейную систему автоматического управления с одним нелинейным элементом можно описать нелинейным интегральным уравнением, приведенным в канонической форме:

$$x(t) = \varphi(t) - \int_0^t k(t-\lambda) x(\lambda) d\lambda - \int_0^t h(t-\lambda) \Phi[x(\lambda)] d\lambda, \quad (11.1)$$

где

$$\varphi(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{a_0} F(p) \frac{1}{p^r} \right\}, \quad (11.2)$$

$$k(t) = \frac{1}{a_0} \left[a_1 + a_2 t + \dots + a_r \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \right], \quad (11.3)$$

$$h(t) = \frac{1}{a_0} \left[b_0 \frac{t^{r-q-1}}{(r-q-1)!} + \dots + b_q \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \right]; \quad (11.4)$$

*) См. Наумов Б. Н. [7—9], И. А. Орурк [1, 2].

здесь q — степень числителя передаточной функции линейной части системы, r — степень знаменателя передаточной функции линейной части системы.

Нелинейное интегральное уравнение (11.1) может быть решено приближенно, если заменить интегралы суммами. При использовании для приближенного вычисления интегралов при выбранном интервале $\Delta t = T$ прямоугольной аппроксимации вместо (7.1) получим

$$x_n = \Phi_n - T[k_0 x_n + k_1 x x_{n-1} + \dots + k_{n-1} x_1 + k_n x_0] - \\ - T[h_0 \Phi_n + h_1 \Phi_{n-1} + \dots + h_{n-1} \Phi_1 + h_n \Phi_0], \quad (11.5)$$

где

$$x_n = x(nT), \quad \Phi_n = \Phi(nT),$$

$$k_n = k(nT), \quad h_n = h(nT), \quad \Phi_n = \Phi[x(nT)], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Если разность

$$r - q \geq 1, \quad (11.6)$$

из (11.4) следует, что $h_0 \equiv 0$, и выражение (11.5) для x_n после подстановки $k_0 = \frac{a_1}{a_0}$ можно записать в виде:

$$x_n \left(1 + T \frac{a_1}{a_0}\right) = \Phi_n - T[k_1 x_{n-1} + \dots + k_{n-1} x_1 + k_n x_0] - \\ - T[h_1 \Phi_{n-1} + \dots + h_{n-1} \Phi_1 + h_n \Phi_0], \quad (11.7)$$

или

$$x_n = \frac{\Phi_n}{\alpha_{\text{пр}}} - \frac{1}{\alpha_{\text{пр}}} [\Gamma_{k_1} x_{n-1} + \dots + \Gamma_{k_{n-1}} x_1 + \Gamma_{k_n} x_0] - \\ - \frac{1}{\alpha_{\text{пр}}} [\Gamma_{h_1} \Phi_{n-1} + \dots + \Gamma_{h_{n-1}} \Phi_1 + \Gamma_{h_n} \Phi_0], \quad (11.8)$$

где

$$\alpha_{\text{пр}} = 1 + T \frac{a_1}{a_0},$$

$$\Gamma_{k_i} = Tk(iT), \quad \Gamma_{h_i} = Th(iT), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

В тех случаях, когда условие (11.6) не выполняется, при вычислении каждого дискретного значения искомой переменной необходимо решить нелинейное алгебраическое уравнение вида

$$x_n = c_n - D_n \Phi[x_n], \quad (11.9)$$

где $n=1, 2, 3, \dots$; c_n и D_n — известные числа. Таким образом, система рекуррентных соотношений (11.8) позволяет последовательно при выбранном интервале T вычислять значения искомой переменной в дискретных точках. При вычислении значений Γ_{k_i} и Γ_{h_i} ($i=1, 2, 3, \dots$) полезно воспользоваться таблицами степенных функций, приведенными в приложении 11. Структурная схема «эквивалентной дискретной системы» приведена на рис. 11.1.

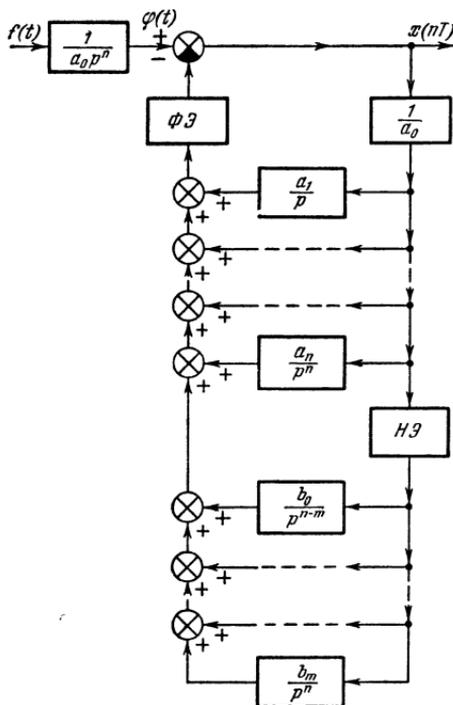


Рис. 11.1.

В данном случае формирующий элемент осуществляет преобразование непрерывной функции на его входе в ступенчатую на выходе (рис. 11.2).

Если в (11.1) для приближенного вычисления интеграла воспользоваться формулой трапеций, то в этом случае формирующий элемент эквивалентной дискретной системы осуществляет кусочно-линейное преобразование

входного сигнала (рис. 11.3), и вместо (11.5) можно записать:

$$x_n = \Phi_n - T \left[\frac{k_0 x_n}{2} + k_1 x_{n-1} + \dots + k_{n-1} x_1 + k_n \frac{x_0}{2} \right] - T \left[\frac{h_0}{2} \Phi_n + h_1 \Phi_{n-1} + \dots + h_{n-1} \Phi_1 + h_n \frac{\Phi_0}{2} \right],$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots). \quad (11.10)$$

Как и в предыдущем случае при

$$r - q \geq 1, \quad (11.11)$$

Прием, позволяющий устранить необходимость решения нелинейного алгебраического уравнения. Как было отмечено выше, если не выполняется неравенство

$$n - m \geq 1,$$

то при вычислении текущих значений x_n ($n=1, 2, 3 \dots$) приходится решать нелинейное алгебраическое уравнение вида

$$x_n = c_n - D_n \Phi(x_n). \quad (11.14)$$

Упрощение вычислительной процедуры состоит в следующем. Перепишем уравнение (7.1) относительно



Рис. 11.3.

изображений, предварительно поделив левую и правую части на p :

$$\begin{aligned} \frac{x(p)}{p} = & \frac{1}{a_0 p} F(p) - \frac{1}{p^r} - \frac{1}{a_0} \left(\frac{a_1}{p^2} + \frac{a_2}{p^3} + \dots + \frac{a_r}{p^{r+1}} \right) x(p) - \\ & - \frac{1}{a_0} \left(b_0 \frac{1}{p^{r+1-q}} + \frac{b_1}{p^{r+2-q}} + \dots + \frac{b_q}{p^{r+1}} \right). \end{aligned} \quad (11.15)$$

Этому выражению соответствует нелинейное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \int_0^t x(\lambda) d\lambda = & \bar{\varphi}(t) - \int_0^t \bar{k}(t-\lambda) x(\lambda) d\lambda - \\ & - \int_0^t \bar{h}(t-\lambda) \Phi[x(\lambda)] d\lambda, \end{aligned} \quad (11.16)$$

где

$$\bar{\varphi}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F(p)}{a_0 p^{r+1}} \right\}, \quad (11.17)$$

$$\begin{aligned} \bar{k}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{a_0} \left[\frac{a_1}{p^2} + \frac{a_2}{p^3} + \dots + \frac{a_r}{p^{r+1}} \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{a_0} \left(a_1 t + a_2 \frac{t^2}{2!} + \dots + a_r \frac{t^r}{r!} \right), \end{aligned} \quad (11.18)$$

$$\begin{aligned} \bar{h}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{a_0} \left(\frac{b_0}{p^{n+1-m}} + \dots + \frac{b_q}{p^{r+1}} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{a_0} \left[b_0 \frac{t^{r-q}}{(r-q)!} + \dots + b_m \frac{t^r}{r!} \right]. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Структурная схема нелинейной системы автоматического управления, соответствующая уравнению (11.15),

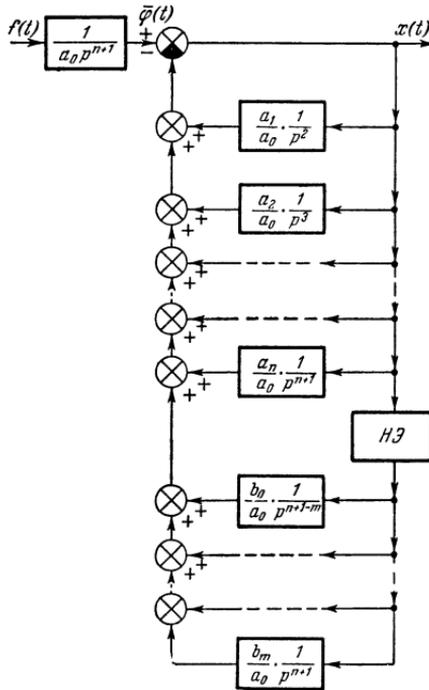


Рис. 11.4.

приведена на рис. 11.4. Нетрудно получить выражение для приближенного решения этого нелинейного

интегрального уравнения, используя для этого формулы прямоугольников и трапеций. Соответствующие рекуррентные соотношения, позволяющие последовательно вычислить дискретные значения искомой переменной x_n , принимают следующий вид:

Формула прямоугольников

$$a_0 T [x_n + x_{n-1} + \dots + x_0] = \bar{\varphi}_n - [\bar{\Gamma}_{k_1} x_{n-1} + \dots + \bar{\Gamma}_{k_n} x_0] - \\ - [\bar{\Gamma}_{h_1} \Phi_{n-1} + \dots + \bar{\Gamma}_{h_n} \Phi_0], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.20)$$

или

$$x_n = \frac{\bar{\varphi}_n}{a_0 T} - a_0 T (x_{n-1} + \dots + x_0) - \\ - \frac{1}{a_0 T} (\bar{\Gamma}_{k_1} x_{n-1} + \dots + \bar{\Gamma}_{k_n} x_0) - \\ - \frac{1}{a_0 T} [\bar{\Gamma}_{h_1} \Phi_{n-1} + \dots + \bar{\Gamma}_{h_n} \Phi_0], \quad (11.21)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$, T — выбранный интервал интегрирования; $x_n = x(nT)$,

$$\bar{\varphi}_n = \bar{\varphi}(nT), \quad \bar{\Gamma}_{k_n} = T \bar{k}(nT),$$

$$\bar{\Gamma}_{h_n} = T \bar{h}(nT), \quad \Phi_n = \Phi[x(nT)].$$

Формула трапеций

$$x_n = \frac{2\bar{\varphi}_n}{a_0 T} - a_0 T \left(x_{n-1} + \dots + \frac{x_0}{2} \right) - \\ - \frac{2}{a_0 T} \left(\bar{\Gamma}_{k_1} x_{n-1} + \dots + \bar{\Gamma}_{k_n} \frac{x_0}{2} \right) - \\ - \frac{2}{a_0 T} \left(\bar{\Gamma}_{h_1} \Phi_{n-1} + \dots + \bar{\Gamma}_{h_n} \frac{\Phi_0}{2} \right). \quad (11.22)$$

Структурная схема дискретной системы, эквивалентной (11.21) и (11.22), приведена на рис. 11.5.

Методика вычислений при помощи полученных рекуррентных соотношений. Рассмотрим методику приближенного вычисления переходных процессов в нелинейных системах автоматического управления с одним

нелинейным элементом, используя для этого рекуррентное соотношение (7.22):

$$\alpha'_{пр} x_n = \varphi_n - \left[\Gamma_{k_1} x_{n-1} + \dots + \Gamma_{k_{n-1}} x_1 + \Gamma_{k_n} \frac{x_0}{2} \right] - \left[\Gamma_{h_1} \Phi_{n-1} + \dots + \Gamma_{h_{n-1}} \Phi_1 + \Gamma_{h_n} \frac{\Phi_0}{2} \right], \quad (11.23)$$

$$n = 1, 2, 3 \dots$$

Прежде чем переходить к вычислению дискретных значений процесса x_n ($n = 1, 2, 3 \dots$), необходимо

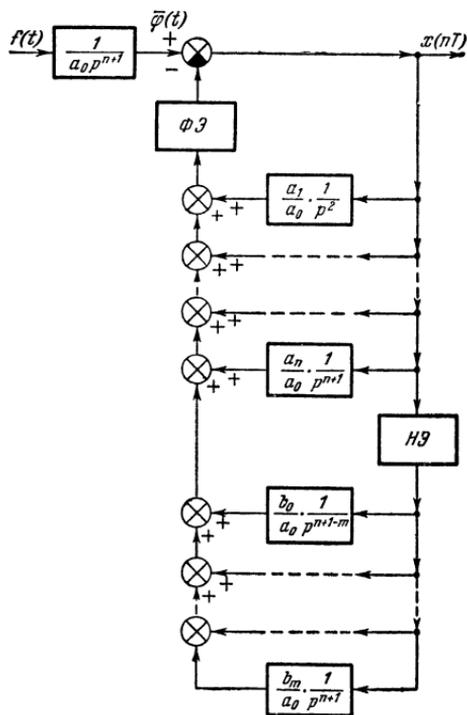


Рис. 11.5.

выбрав шаг интегрирования, определить дискретные значения φ_n и $\alpha'_{пр}$, а также значения $\Gamma_{k_n} = Tk(nT)$ и $\Gamma_{h_n} = Th(nT)$, используя для этого таблицы степенных функций, приведенные в приложении 11.

Т а б л и ц а 11

n	x_n	Φ_n	$\Gamma_{h, 1}$	$\Gamma_{h, 2}$	$\Gamma_{h, 3}$	$\Gamma_{h, 4}$
0	x_0	$\frac{\Phi_0}{2}$	$\Gamma_{h, 2} \frac{\Phi_0}{2}$	$\Gamma_{h, 2} \frac{\Phi_0}{2}$	$\Gamma_{h, 3} \frac{\Phi_0}{2}$	$\Gamma_{h, 4} \frac{\Phi_0}{2}$
1	x_1	Φ_1	$\sum'_{1, 1}$	$\Gamma_{h, 1} \Phi_1$	$\Gamma_{h, 2} \Phi_1$	$\Gamma_{h, 3} \Phi_1$
2	x_2	Φ_2		$\sum'_{1, 2}$	$\Gamma_{h, 1} \Phi_2$	$\Gamma_{h, 2} \Phi_2$
3	x_3	Φ_2			$\sum'_{1, 3}$	$\Gamma_{h, 1} \Phi_3$
4	x_4	Φ_4				$\sum'_{1, 4}$

Затем можно перейти к вычислению дискретных значений процесса x_n ($n=1, 2, 3, \dots$), используя для этого две специальные типовые расчетные таблицы 11 и 12, которые по существу являются удобной формой записи рекуррентных соотношений (11.21):

$$\alpha'_{пр} x_1 = \varphi_1 - \frac{\Gamma_{k_1}}{2} x_0 - \frac{\Gamma_{h_1}}{2} \Phi_0,$$

$$\alpha'_{пр} x_2 = \varphi_2 - \left(\Gamma_{k_1} x_1 + \Gamma_{k_2} \frac{x_0}{2} \right) - \left(\Gamma_{h_1} x_1 + \Gamma_{h_2} \frac{x_0}{2} \right),$$

(11.24)

$$\alpha'_{пр} x_n = \varphi_n - \left(\Gamma_{k_1} x_{n-1} + \dots + \Gamma_{k_{n-1}} x_1 + \Gamma_{k_n} \frac{x_0}{2} \right) -$$

$$- \left(\Gamma_{h_1} \Phi_{n-1} + \Gamma_{h_2} \Phi_{n-2} + \dots + \Gamma_{h_{n-1}} \Phi_1 + \Gamma_{h_n} \frac{\Phi_0}{2} \right)$$

или

$$\alpha'_{пр} x_n = \varphi_n - \sum'_{1, n-1} - \sum'_{2, n-1}, \quad (11.25)$$

где

$$\sum'_{1, n-1} = \Gamma_{k_1} x_{n-1} + \dots + \Gamma_{k_{n-1}} x_1 + \Gamma_{k_n} \frac{x_0}{2}, \quad (11.26)$$

$$\sum'_{2, n-1} = \Gamma_{h_1} \Phi_{n-1} + \dots + \Gamma_{h_{n-1}} \Phi_1 + \Gamma_{h_n} \frac{\Phi_0}{2}. \quad (11.27)$$

Таблица 12

n	$\alpha'_{\text{пр}} x_n$	x_n	$\Gamma_{k,1}$	$\Gamma_{k,2}$	$\Gamma_{k,3}$	$\Gamma_{k,4}$
0		$\frac{x_0}{2}$	$\Gamma_{k,1} \frac{x_0}{2}$	$\Gamma_{k,2} \frac{x_0}{2}$	$\Gamma_{k,3} \frac{x_0}{2}$	$\Gamma_{k,4} \frac{x_0}{2}$
1	$\alpha'_{\text{пр}} x_1$	x_1	$\begin{matrix} \Sigma'_{2,1} \\ \Phi_1 - \Sigma_{1,1} - \Sigma_{2,1} = \\ = \alpha_T x_1 \end{matrix}$	$\Gamma_{k,1} x_1$	$\Gamma_{k,2} x_1$	$\Gamma_{k,3} x_1$
2	$\alpha'_{\text{пр}} x_2$	x_2		$\begin{matrix} \Sigma'_{2,2} \\ \Phi_2 - \Sigma_{1,2} - \Sigma_{2,2} = \\ = \alpha_T x_2 \end{matrix}$	$\Gamma_{k,1} x_2$	$\Gamma_{k,2} x_2$
3	$\alpha'_{\text{пр}} x_3$	x_3			$\begin{matrix} \Sigma'_{2,3} \\ \Phi_3 - \Sigma_{1,3} - \Sigma_{2,3} = \\ = \alpha_T x_3 \end{matrix}$	$\Gamma_{k,1} x_3$
4	$\alpha'_{\text{пр}} x_4$	x_4				$\begin{matrix} \Sigma'_{2,4} \\ \Phi_4 - \Sigma_{1,4} - \Sigma_{2,4} = \\ = \alpha_T x_4 \end{matrix}$

Используя расчетную таблицу 11, последовательно вычисляем значения Φ_n , а затем $\sum'_{1, n-1}$ ($n = 1, 2, 3 \dots$). Используя расчетную таблицу 11, вычисляем вначале значения $\alpha'_{np} x_n$:

$$\alpha'_{np} x_n = \Phi_n - \sum'_{1, n-1} - \sum'_{2, n-1}, \quad (11.28)$$

а затем искомые значения x_n .

Примеры приближенного вычисления переходных процессов в системах с одним нелинейным элементом.

Система автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока. В качестве первого примера

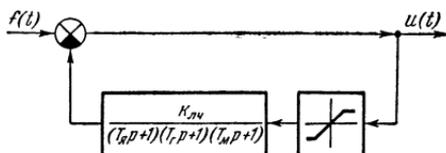


Рис. 11.6.

рассмотрим приближенное вычисление переходного процесса в системе автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока, структурная схема которой приведена на рис. 11.6 для случая, когда начальные условия — нулевые, а $u_0(t) = 1(t)$.

Как было показано в гл. I, нелинейное интегральное уравнение данной системы, записанное в канонической форме относительно напряжения ошибки, имеет следующий вид:

$$u(t) = \int_0^t \omega_f(t - \lambda) f(\lambda) d\lambda - \int_0^t h(t - \lambda) \Phi[u(\lambda)] d\lambda - \int_0^t k(t - \lambda) u(\lambda) d\lambda, \quad (11.29)$$

где

$$\omega_f(t) = \delta(t) + \frac{T_m T_\alpha + T_m T_\Gamma + T_\Gamma T_\alpha}{T_m T_\alpha T_\Gamma} + \frac{T_\Gamma + T_m + T_\alpha}{T_m T_\alpha T_\Gamma} t + \frac{t^2}{2 T_m T_\alpha T_\Gamma}, \quad (11.30)$$

$\delta(t)$ — дельта-функция,

$$h(t) = \frac{k_{л.ч}}{2T_M T_{я} T_{\Gamma}} t^2, \quad (11.31)$$

$$k(t) = \frac{T_M T_{я} + T_M T_{\Gamma}}{T_M T_{я} T_{\Gamma}} + \frac{T_M + T_{\Gamma}}{T_{я} T_M T_{\Gamma}} t + \frac{t^2}{2T_M T_{я} T_{\Gamma}}. \quad (11.32)$$

Вычислим кривую переходного процесса при $T_M = 0,1$ сек, $T_{я} = 0,001$ сек, $T_{\Gamma} = 0,005$ сек, $k_{л.ч} = 15$, записав предварительно рекуррентное соотношение, позволяющее последовательно вычислять приближенные значения $u_n = u(nT)$ при выбранном интервале $T = 0,04$ сек:

$$u_n = \varphi_n - \left[\frac{\Gamma_{h_0}}{2} \Phi_n + \Gamma_{h_1} + \dots + \Gamma_{h_{n-1}} \Phi_1 + \Phi_0 \frac{\Gamma_{h_n}}{2} \right] - \left[\frac{\Gamma_{k_0}}{2} u_n + \Gamma_{k_1} u_{n-1} + \dots + \Gamma_{k_{n-1}} u_1 + \Gamma_{k_n} \frac{u_0}{2} \right], \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (11.33)$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_0^t \omega_f(t - \lambda) f(\lambda) d\lambda = \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p} + \frac{a_1}{a_0} \frac{1}{p^2} + \frac{a_2}{a_0} \frac{1}{p^3} + \frac{1}{a_0} \frac{1}{p^4} \right\} = \\ &= 1 + \frac{T_M T_{я} + T_M T_{\Gamma} + T_{\Gamma} T_{я}}{T_M T_{я} T_{\Gamma}} t + \frac{T_{\Gamma} + T_M + T_{я}}{2T_M T_{я} T_{\Gamma}} t^2 + \frac{t^3}{6T_M T_{я} T_{\Gamma}}. \end{aligned} \quad (11.34)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi_n &= 1 + \frac{T_M T_{я} + T_M T_{\Gamma} + T_{\Gamma} T_{я}}{T_M T_{я} T_{\Gamma}} nT + \\ &+ \frac{T_{\Gamma} + T_M + T_{я}}{2T_M T_{я} T_{\Gamma}} n^2 T^2 + \frac{n^3 T^3}{6T_M T_{я} T_{\Gamma}}, \end{aligned} \quad (11.35)$$

$$\Gamma_{h_n} = \frac{k_{л.ч} n^2 T^3}{2T_M T_{я} T_{\Gamma}}, \quad (11.36)$$

$$\Gamma_{k_n} = \frac{T_M T_{я} + T_M T_{\Gamma} + T_{я} T_{\Gamma}}{T_{я} T_{\Gamma} T_M} T + \frac{T_{\Gamma} + T_M + T_{я}}{T_M T_{я} T_{\Gamma}} nT^2 + \frac{n^2 T^3}{2T_M T_{я} T_{\Gamma}}. \quad (11.37)$$

После элементарных преобразований выражение (11.33) можно переписать так:

$$\alpha u_n = \varphi_n - \left[\Gamma_{h_1} \Phi_{n-1} + \dots + \Gamma_{h_{n-1}} \Phi_1 + \Gamma_{h_n} \frac{\Phi_0}{2} \right] - \\ - \left[\Gamma_{k_1} u_{n-1} + \dots + \Gamma_{k_{n-1}} u_1 + \Gamma_{k_n} \frac{u_0}{2} \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (11.38)$$

$$\alpha = 1 + \frac{\Gamma_{k_0}}{2}. \quad (11.39)$$

Структурная схема дискретной системы, эквивалентная рекуррентному соотношению (11.38), приведена на рис. 11.7.

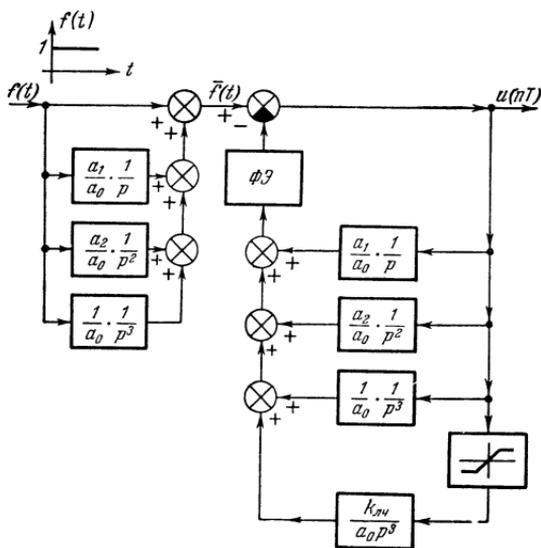


Рис. 11.7.

Теперь для вычисления переходного процесса $u_n = u(nT)$ поступим следующим образом. Воспользовавшись таблицами степенных функций, приведенных в приложении 11, вычислим значения φ_n , Γ_{h_n} , Γ_{k_n} и затем используя одновременно две типовые расчетные таблицы, вычисляем дискретные значения ошибки $u(nT)$. Вычисления при помощи приближенного метода

практически совпадают с результатами моделирования (рис. 11.8).

Позиционная следящая система. В качестве второго примера рассмотрим приближенное вычисление переходного процесса в позиционной следящей системе, структурная схема которой была приведена ранее в гл. I для



Рис. 11.8.

случая, когда начальные условия — нулевые, а $u_0(t) = 1(t)$, T_y и $T_{я}$ малы и ими можно пренебречь. Нелинейное интегральное уравнение системы, записанное в канонической форме относительно напряжения ошибки, имеет следующий вид:

$$u(t) = \int_0^t \omega_f(t - \lambda) f(\lambda) d\lambda - \int_0^t h(t - \lambda) \Phi[u(\lambda)] d\lambda - \int_0^t k(t - \lambda) u(\lambda) d\lambda, \quad (11.40)$$

где

$$\omega_f(t) = \int_0^t \omega_f(t - \lambda) f(\lambda) d\lambda = 1 + \frac{T_K + T_M}{T_M T_K} t + \frac{1}{2 T_M T_K} t^2, \quad (11.41)$$

$$h(t) = \frac{k_{л.ч}}{2 T_M T_K} t^2, \quad (11.42)$$

$$k(t) = \frac{T_M + T_K}{T_M T_K} + \frac{1}{T_K T_M} t. \quad (11.43)$$

Запишем рекуррентное соотношение, позволяющее приближенно вычислять дискретные значения напряжения ошибки u_n при выбранном интервале T :

$$u_n = \varphi_n - \left[\frac{\Gamma_{h_0}}{2} \Phi_n + \Gamma_{h_1} \Phi_{n-1} + \dots \right. \\ \left. \dots + \Gamma_{h_{n-1}} \Phi_1 + \frac{\Gamma_{h_n}}{2} \Phi_0 \right] - \left[\frac{\Gamma_{k_0}}{2} u_n + \right. \\ \left. + \Gamma_{k_1} u_{n-1} + \dots + \Gamma_{k_{n-1}} + \frac{\Gamma_{k_n}}{2} u_0 \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.44)$$

Принимая во внимание, что $\Gamma_{h_0} = 0$, $u_0 = 1$, $\Phi_0 = 0,5$ и обозначая

$$\alpha = 1 + \frac{\Gamma_{k_0}}{2}, \quad (11.45)$$

получим

$$\alpha u_n = \varphi_n - \left[\Gamma_{h_1} \Phi_{n-1} + \dots + \Gamma_{h_{n-1}} \Phi_1 + \frac{\Gamma_{h_n}}{2} \Phi_0 \right] - \\ - \left[\Gamma_{k_1} u_{n-1} + \dots + \Gamma_{k_{n-1}} u_1 + \frac{\Gamma_{k_n}}{2} u_0 \right], \quad (11.46)$$

$$\varphi_n = 1 + \frac{T_K + T_M}{T_K T_M} nT + \frac{n^2 T^2}{2 T_M T_K}, \quad (11.47)$$

$$\Gamma_{h_n} = \frac{k_{л.ч}}{2 T_K T_M} n^2 T^3, \quad (11.48)$$

$$\Gamma_{k_n} = \frac{T_K + T_M}{T_K T_M} T + \frac{n T^2}{T_K T_M}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.49)$$

Вычислив предварительно дискретные значения φ_n , Γ_{h_n} и Γ_{k_n} при $T_M = 0,069$ сек, $T_K = 0,01$ сек, $k_{л.ч} = 10$, используя одновременно две типовые расчетные таблицы, последовательно определяем искомые приближенные дискретные значения напряжения ошибки u_n .

Структурная схема дискретной системы, эквивалентной рекуррентному соотношению (7.47), приведена на

рис. 11.9. На рис. 11.10 изображен график переходного процесса, вычисленный при $T = 4 \cdot 10^{-2}$ сек.

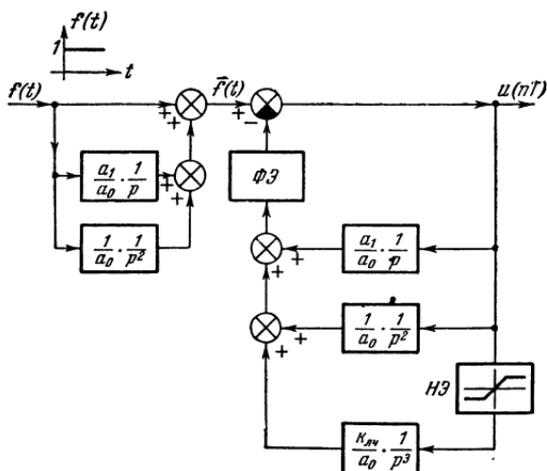


Рис. 11.9.

Пример вычисления переходного процесса в нелинейной системе при условии $r - q < 1$. Допустим, что

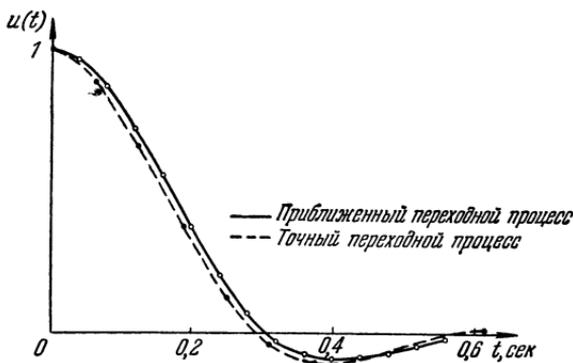


Рис. 11.10.

нелинейная система описывается нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка

$$\frac{du}{dt} + u^2 = 1(t), \quad t \geq 0, \quad (11.50)$$

с нулевыми начальными условиями. Точное решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$u(t) = \tanh t. \quad (11.51)$$

Найдем приближенное решение этого уравнения. Обозначим

$$u^2(t) = z(t) \quad (11.52)$$

и, подвергая левую и правую части уравнения (11.52) преобразованию Лапласа, получим

$$pU(p) + Z(p) = \frac{1}{p} \quad (11.53)$$

или

$$U(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} Z(p). \quad (11.54)$$

Нелинейное интегральное уравнение, записанное в канонической форме, имеет следующий вид:

$$u(t) = \varphi(t) - \int_0^t h(t-\lambda) z(\lambda) d\lambda, \quad (11.55)$$

$$\varphi(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2} \right\} = t, \quad (11.56)$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \right\} = 1(t). \quad (11.57)$$

Структурная схема, соответствующая (11.54), приведена на рис. 11.11. Рекуррентное соотношение,

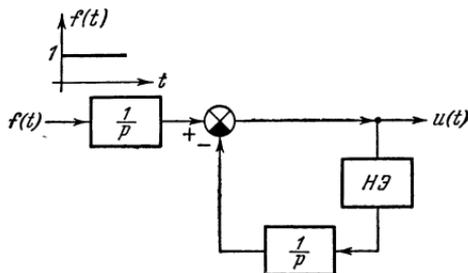


Рис. 11.11.

позволяющее получить приближенные значения u_n в дискретных точках при выбранном интервале T , соответ-

ствующее нелинейному интегральному уравнению (11.55), имеет следующий вид:

$$u_n = \varphi_n - \left(\frac{\Gamma_{h_0}}{2} u_n^2 + \Gamma_{h_1} u_{n-1}^2 + \dots + \Gamma_{h_1} u_1^2 + u_0^2 \frac{\Gamma_{h_0}}{2} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (11.58)$$

$$\varphi_n = nT, \quad (11.59)$$

$$\Gamma_{h_n} = T. \quad (11.60)$$

Структурная схема дискретной системы, эквивалентной (11.58), приведена на рис. 11.12.

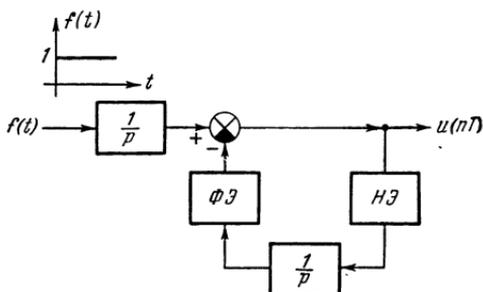


Рис. 11.12.

Из полученного рекуррентного соотношения следует, что для вычисления значений u_n каждый раз необходимо решать квадратное уравнение вида

$$u_n = c_n - D_n u_n^2, \quad (11.61)$$

$$c_n = \varphi_n - T [u_{n-1}^2 + \dots + u_1^2], \quad (11.62)$$

$$D_n = \frac{T}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (11.63)$$

Чтобы не решать (11.61), воспользуемся изложенным выше приемом, разделив предварительно левую и правую части (11.54) на p . Тогда получим

$$\frac{U(p)}{p} = \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^2} Z(p), \quad (11.64)$$

$$\bar{u}(t) = \int_0^t u(\lambda) d\lambda = \bar{\varphi}(t) - \int_0^t \bar{h}(t - \lambda) z(\lambda) d\lambda, \quad (11.65)$$

где

$$\bar{\varphi}(t) = \frac{t^2}{2}, \quad (11.66)$$

$$\bar{h}(t) = t. \quad (11.67)$$

Рекуррентное соотношение, соответствующее (11.65),

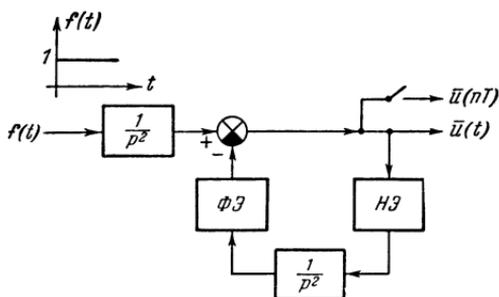


Рис. 11.13.

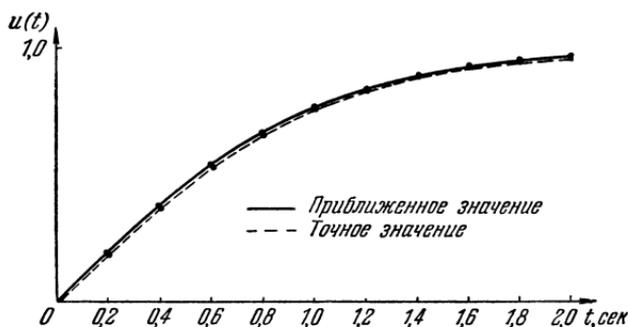


Рис. 11.14.

принимает вид:

$$\begin{aligned} u_n &= T \left(\frac{u_n}{2} + u_{n-1} + \dots + u_1 \right) = \\ &= \bar{\varphi}_n - (\Gamma_{h_{n-1}} u_{n-1}^2 + \dots + \Gamma_{h_1} u_1^2), \end{aligned} \quad (11.68)$$

где

$$\bar{\varphi}_n = \frac{n^2 T^3}{2}, \quad (11.69)$$

$$\Gamma_{h_n} = nT^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.70)$$

Структурная схема дискретной системы, эквивалентной (11.70), приведена на рис. 11.13.

Нетрудно видеть, что теперь для вычисления значений u_n не требуется решать нелинейных алгебраических уравнений (11.61).

На рис. 11.14 изображены графики точного и приближенного значений переходного процесса.

§ 2. Нелинейные системы автоматического управления с запаздыванием

Рекуррентные соотношения. Предположим, что нелинейная система содержит элемент чистого запаздывания

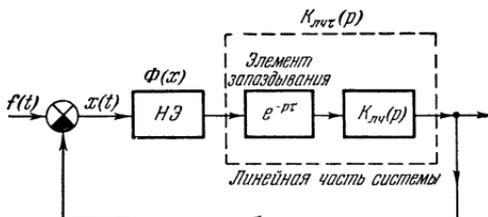


Рис. 11.15.

и что передаточная функция линейной части системы (рис. 11.15) будет

$$K_{\text{л. ч } \tau}(p) = e^{-p\tau} K_{\text{л. ч}}(p). \quad (11.71)$$

Нетрудно показать, что в данном случае нелинейное интегральное уравнение нелинейной системы автоматического управления имеет следующий вид:

$$x(t) = \varphi(t) - \int_0^t k(t-\lambda) x(\lambda) d\lambda - \int_0^t h(t-\lambda-\tau) \Phi[x(\lambda)] d\lambda. \quad (11.72)$$

Следовательно, интегральное уравнение нелинейной системы с запаздыванием отличается от интегрального уравнения системы без запаздывания лишь тем, что функция $h(\tau)$ смещается вправо на величину времени

запаздывания τ

$$h(t - \tau) = \left[\frac{b_0}{a_0} \frac{(t - \tau)^{r-q-1}}{(r-q-1)!} + \dots + \frac{b_q}{a_0} \frac{(t - \tau)^{r-1}}{(r-1)!} \right]. \quad (11.73)$$

При приближенном вычислении переходных процессов в системах с запаздыванием следует выбирать интервал интегрирования T кратным τ :

$$\tau = \mu T, \quad (11.74)$$

где μ — целое положительное число.

При $\mu = 1$ приближенное выражение для вычисления x_n исходя из формулы трапеций имеет вид:

$$x_n = \frac{\Phi_n}{\alpha'_{\text{пр}}} - \frac{1}{\alpha'_{\text{пр}}} \left(\Gamma_{k_1} x_{n-1} + \dots + \Gamma_{k_{n-1}} x_1 + \Gamma_{k_n} \frac{x_0}{2} \right) - \\ - \frac{1}{\alpha'_{\text{пр}}} \left(\Gamma_{h\tau_0} \frac{\Phi_n}{2} + \Gamma_{h\tau_1} \Phi_{n-1} + \dots + \Gamma_{h\tau_{n-1}} \Phi_1 + \Gamma_{h\tau_n} \frac{\Phi_0}{2} \right), \quad (11.75)$$

где

$$\alpha'_{\text{пр}} = 1 + \frac{T}{2} \frac{a_1}{a_0}, \quad (11.76)$$

$$\Gamma_{h\tau_n} = Th(nT - T), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.77)$$

Так как в данном случае при $\mu = 1$, $\Gamma_{h\tau_0} = \Gamma_{h\tau_1} = 0$, то выражение (11.76) упрощается и принимает вид:

$$x_n = \frac{\Phi_n}{\alpha'_{\text{пр}}} - \frac{1}{\alpha'_{\text{пр}}} \left(\Gamma_{k_1} x_{n-1} + \dots + \Gamma_{k_{n-1}} x_1 + \Gamma_{k_n} \frac{x_0}{2} \right) - \\ - \frac{1}{\alpha'_{\text{пр}}} \left(\Gamma_{h\tau_2} \Phi_{n-2} + \dots + \Gamma_{h\tau_{n-1}} \Phi_1 + \Gamma_{h\tau_n} \frac{\Phi_0}{2} \right). \quad (11.78)$$

Следовательно, в тех случаях, когда элемент с постоянным запаздыванием можно отнести к линейной части системы (рис. 11.15), нам не приходится решать нелинейное алгебраическое уравнение вида (11.62) даже в случае, когда $r = q \leq 1$, и вычисления значительно упрощаются.

Пример вычисления переходного процесса в нелинейной системе с запаздыванием. Рассмотрим вычисление переходного процесса в нелинейной системе автоматического управления с запаздыванием, структурная схема которой была приведена нами ранее в гл. I, при $u_0(t) = 1(t)$ и ненулевых начальных условиях. Нелинейное интегральное уравнение для данной системы, записанное в канонической форме, имеет следующий вид:

$$u_2(t) = \varphi(t) - \int_0^t h(t-\lambda) \Phi[u_2(\lambda)] d\lambda - \\ - \int_0^t k(t-\lambda) u_2(\lambda) d\lambda, \quad (11.79)$$

где

$$\varphi(t) = 1 + \frac{a_1}{a_0} t + \frac{t^2}{2a_0}, \quad (11.80)$$

$$h(t) = \frac{b_0}{a_0} \frac{(t-\tau)^2}{2} + \frac{b_1}{a_0} (t-\tau), \quad (11.81)$$

$$k(t) = \frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{a_0} t. \quad (11.82)$$

Рекуррентное соотношение, полученное в результате замены операции интегрирования в (11.79) суммированием по правилу трапеций и позволяющее вычислять приближенные значения $u_2(nT)$, может быть записано в следующем виде ($\tau = 4$ сек, $\mu = 2$, $T = \frac{\tau}{\mu} = 2$ сек):

$$u_{2n} = \varphi_n - \left[\frac{\Gamma_{h_0}}{2} \Phi_n + \Gamma_{h_1} \Phi_{n-1} + \dots + \Gamma_{h_{n-1}} \Phi_1 + \frac{\Gamma_{h_0}}{2} \Phi_0 \right] - \\ - \left[\frac{\Gamma_{k_0}}{2} u_{2,n} + \Gamma_{k_1} u_{2,n-1} + \dots + \Gamma_{k_{n-1}} u_{2,1} + \frac{\Gamma_{k_n}}{2} u_{2,0} \right], \quad (11.83)$$

$$u_{2,n} = u_2(nT); \quad \Phi_n = \Phi[u_2(nT)],$$

где

$$\varphi_n = 1 + \frac{a_1}{a_0} nT + \frac{n^2 T^2}{2a_0}; \quad (11.84)$$

$$\Gamma_{h_n} = \frac{b_0}{a_0} \frac{(nT - 2T)^2}{2} T + \frac{b_1}{a_0} T (nT - 2T); \quad (11.85)$$

$$\Gamma_{k_n} = T \frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{a_0} nT^2; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.86)$$

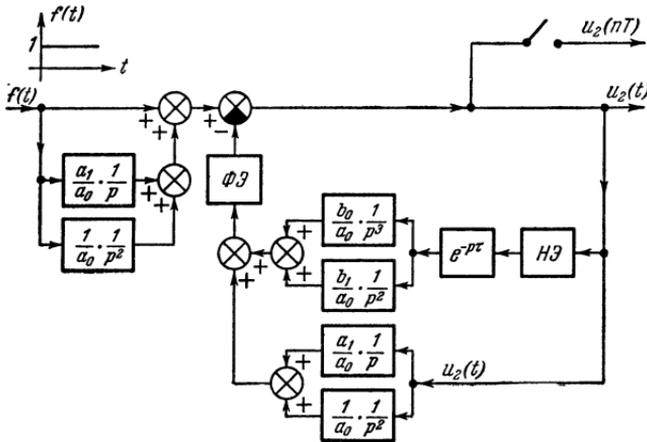


Рис. 11.16.

Очевидно, что

$$\Gamma_{h_0} = \Gamma_{h_1} = \Gamma_{h_2} = 0,$$

и поэтому рекуррентное соотношение может быть преобразовано к виду

$$\begin{aligned} \alpha'_{np} u_{2,n} = \varphi_n - & \left[\Gamma_{h_3} \Phi_{n-3} + \Gamma_{h_4} \Phi_{n-4} + \dots \right. \\ & \left. \dots + \Gamma_{h_{n-1}} \Phi_1 + \Gamma_{h_n} \frac{\Phi_0}{2} \right] - \left[\Gamma_{k_1} u_{2,n-1} + \dots \right. \\ & \left. \dots + \Gamma_{k_{n-1}} u_{2,1} + \Gamma_{k_n} \frac{u_{2,0}}{2} \right], \quad (11.87) \end{aligned}$$

где

$$\alpha'_{np} = 1 + \frac{\Gamma_{k_0}}{2}. \quad (11.88)$$

Структурная схема дискретной системы, эквивалентная рекуррентному соотношению (11.83), приведена на

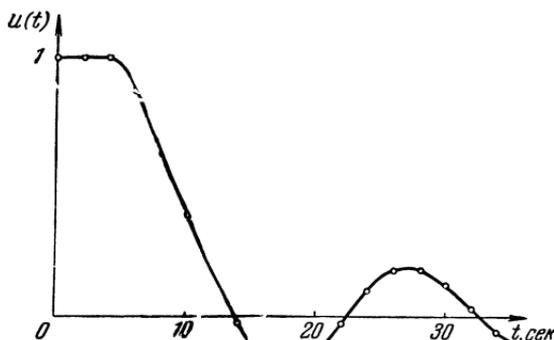


Рис. 11.17.

рис. 11.16, а на рис. 11.17 приведен график переходного процесса, вычисленный при $T=2$ сек.

§ 3. Нелинейные системы автоматического управления с несколькими нелинейными элементами

Изложенный метод легко обобщается на системы автоматического управления с несколькими нелинейными элементами.

Рассмотрим это на примере системы с двумя нелинейными элементами, которая характеризуется следующими нелинейными интегральными уравнениями:

$$x(t) = f(t) - x(t), \quad (11.89)$$

$$y(t) = \int_0^t h_2(t-\lambda) \Phi_2[x_2(\lambda)] d\lambda - \int_0^t k_2(t-\lambda) y(\lambda) d\lambda, \quad (11.90)$$

$$x_2(t) = \int_0^t h_1(t-\lambda) \Phi_1[x(\lambda)] dx - \int_0^t k_1(t-\lambda) x_2(\lambda) dx, \quad (11.91)$$

где

$$h_1(t) = \frac{b_0}{a_r} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} + \dots + \frac{b_q}{a_r} \frac{t^{r-q-1}}{(r-q-1)!}, \quad (11.92)$$

$$k_1(t) = \frac{a_1}{a_r} \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} + \dots + \frac{a_{r-1}}{a_r}, \quad (11.93)$$

$$h_2(t) = \frac{c_0}{a_l} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + \dots + \frac{c_m}{a_l} \frac{t^{l-m-1}}{(l-m-1)!}, \quad (11.94)$$

$$k_2(t) = \frac{a_1}{a_l} \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \dots + \frac{a_{l-1}}{a_l}. \quad (11.95)$$

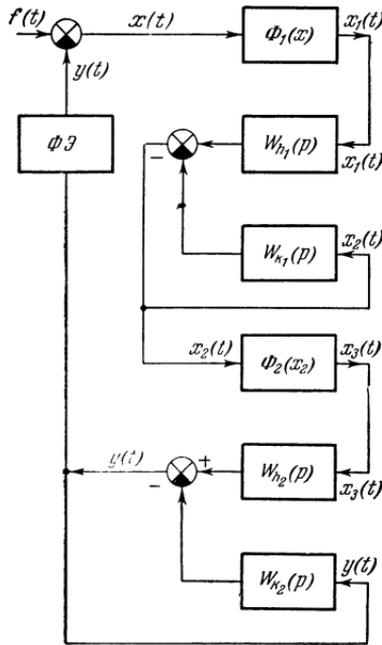


Рис. 11.18.

Нетрудно теперь получить рекуррентные соотношения для приближенного вычисления дискретных значений $x_{2,n}$, y_n и x_n :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\Gamma_{k,0}}{2}\right) x_{2,n} &= \\ &= \left[\Gamma_{n1,1} \Phi_{1,n-1} + \dots + \Gamma_{h1,n-1} \Phi_{1,1} + \Gamma_{h1,n} \frac{\Phi_{1,0}}{2} \right] + \\ &+ \left[\Gamma_{k1,1} x_{2,n-1} + \dots + \Gamma_{k1,n-1} x_{2,1} + \Gamma_{k1,n} \frac{x_{2,0}}{2} \right], \quad (11.96) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\Gamma_{k,0}}{2}\right) y_n = & \\ = & \left[\Gamma_{h2,1} \Phi_{2,n-1} + \dots + \Gamma_{h2,n-1} \Phi_{2,1} + \Gamma_{h2,n} \frac{\Phi_{2,0}}{2} \right] - \\ & - \left[\Gamma_{k2,1} y_{n-1} + \dots + \Gamma_{k2,n-1} y_1 + \Gamma_{k2,n} \frac{y_0}{2} \right], \quad (11.97) \end{aligned}$$

$$x_n = \dot{f}_n - y_n, \quad (11.98)$$

где

$$\Gamma_{h_i, n} = T \omega_i(nT),$$

$$\Gamma_{k_i, n} = T k_i(nT); \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Структурная схема эквивалентной дискретной системы, соответствующей (11.97), (11.98) и (11.99), приведена на рис. 11.18.

§ 4. Некоторые соображения об использовании методов приближенного вычисления переходных процессов для программирования на ЭВМ

Как было показано выше, изложенный метод приближенного вычисления переходных процессов позволяет довольно просто и единообразно вычислять дискретные значения искомым переменных. В некоторых случаях этот метод позволяет также значительно быстрее, по сравнению со многими из существующих косвенных методов, определять показатели качества переходных процессов в нелинейных системах. Кроме того, изложенный выше метод может применяться для синтеза нелинейных скоростных обратных связей позиционных следящих систем *).

Обычно при решении задач исследования систем автоматического управления с применением ЭВМ необходимо использовать один из дискретных методов приближенного решения дифференциальных уравнений. Чаще всего для этого применяются ставшие классическими методы Рунге — Кутты, Адамса и т. п. При этом исходные уравнения представляются в виде системы дифференциальных уравнений первого или второго порядка, и

*) См. Б. Н. Наумов [2, 4, 6].

затем используется один из вышеуказанных методов. В последнее время рядом авторов было показано, что ряд дискретных методов и, в частности, так называемый метод z -форм ^{*}), позволяет значительно сократить объем и время вычислений при исследовании систем автоматического управления на ЭВМ. В этих случаях нет необходимости представлять исходные уравнения в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка и каждое из них решать на основе методов Рунге — Кутта, Адамса и т. п.

В связи с тем, что рассмотренный нами выше канонический метод близок по своей идее и числу операций к методу z -форм, аналогичный эффект повышения скорости вычислений можно получить при использовании канонического метода для исследования динамики систем автоматического управления на цифровых вычислительных машинах.

^{*}) См. С. Талер, Р. Боксер [1].

КРАТКИЙ ОБЗОР РАБОТ ПО ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Необходимость создания нелинейной теории автоматического управления возникла уже на первых шагах промышленного использования систем автоматического регулирования, т. е. еще в XIX и начале XX века.

Одной из первых теоретических работ по исследованию нелинейных систем была работа создателя классической теории автоматического регулирования И. А. Вышнеградского «О регуляторах прямого действия», опубликованная в 1878 г.

Первые работы, положившие начало теории нелинейных систем, носили чисто математический характер и принадлежали крупнейшим математикам конца XIX и начала XX века А. М. Ляпунову и А. Пуанкаре. Работы А. М. Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения», опубликованная в 1892 г., и А. Пуанкаре «К вопросу о кривых, определяемых дифференциальными уравнениями», опубликованная в 1881 г., до настоящего времени лежат в основе большинства методов исследования устойчивости и периодических режимов в нелинейных системах автоматического управления.

В конце XIX и начале XX века появился также ряд математических работ Г. Флоке [1, 2], М. Кенига [1, 2], С. Латта [1], которые впоследствии были использованы для решения задач теории устойчивости, периодических режимов.

В этот период были опубликованы ставшие теперь классическими работы А. Гуковского [1], А. Леоте [1, 2], Р. Прелля [1], А. Пфарра [1], в которых были рассмотрены различные аналитические и графические модификации методов припасовывания.

Однако основы современной теории нелинейных систем автоматического управления были заложены лишь в 30-е годы XX века и получили существенное развитие в последующие годы.

Настоящий обзор ставит своей целью в краткой форме ознакомить специалистов, работающих в области теории и практического использования систем автоматического управления, с основными этапами и результатами работ в области теории нелинейных систем.

Автор не ставил задачу дать исчерпывающий обзор теории нелинейных систем, что, по-видимому, и не представляется возможным. Поэтому затрагивались в основном вопросы, выходящие за рамки настоящей монографии.

Исследование нелинейных систем низкого порядка методы фазовой плоскости и точечных отображений

В 20-х годах группа советских физиков, возглавлявшаяся академиком Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси, провела большую работу по постановке и решению нелинейных задач теории колебаний, возникавших в связи с быстрым развитием радиотехники.

Особая роль в становлении и развитии теории нелинейных колебаний и ее использовании для исследования нелинейных систем автоматического регулирования принадлежит академику А. А. Андронову и созданной им школе. Обзор работ А. А. Андропова по теории автоматического регулирования был дан в докладе Г. С. Горелика [1], представленном им в 1953 г. II-му Всесоюзному совещанию по автоматическому регулированию.

Работа А. А. Андропова [1], основанная на математической теории выдающегося французского ученого А. Пуанкаре [1], явилась началом целого направления в теории нелинейных систем, связанного с использованием фазовой плоскости и фазового пространства. Впервые фазовый портрет системы был использован еще в работе А. Леона для исследования системы регулирования с двумя нелинейными элементами, описываемыми дифференциальным уравнением второго порядка.

А. А. Андронов ввел широко применяющийся теперь термин «автоколебания», определив их как процесс, отображаемый на фазовой плоскости устойчивым предельным циклом, а также ввел совместно с академиком Л. С. Понтрягиным понятие о «грубости» систем [1].

Метод фазового пространства был существенно развит в работах А. А. Андропова, Н. Н. Баутина [1—6], Н. Н. Баутина и А. А. Андропова [1—10], Н. Н. Баутина и Г. С. Горелика [1] на примерах исследования сложных нелинейных систем. В 1937 г. вышла в свет книга А. А. Андропова и С. Э. Хайкина «Теория колебаний» [1], сыгравшая огромную роль в становлении и развитии теории нелинейных систем*).

В этой книге был изложен развитый А. А. Андроновым и А. Г. Майером [1—4] так называемый метод точечных отображений, который оказался весьма плодотворным при исследовании динамики систем с кусочно-линейными характеристиками. (Впервые основные идеи метода точечных отображений были изложены в работах А. Пуанкаре [1] и Г. Биркгофа [1].)

Метод точечных отображений позволил с исчерпывающей полнотой решить ряд классических задач. Были исследованы всевозможные движения в релейной системе третьего порядка. Впервые были получены условия существования в релейной системе автоматического управления автоколебаний с участками скользящего режима. Решение задачи было доведено до построения границ устойчивости в плоскости параметров исследуемой системы. Позже в работах А. А. Андропова, Н. Н. Баутина и Г. С. Горелика [1, 2] было показано, что этот метод может служить эффективным аппаратом при исследовании систем с несколькими нелинейными характеристиками.

*) В написании книги участвовал также А. А. Витт, который сыграл значительную роль в развитии теории нелинейных колебаний. Во втором издании 1959 г. его фамилия была указана в числе других авторов этой книги (см. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин [1]).

В дальнейшем метод точечных отображений был развит Ю. И. Неймарком [1—9] в применении к исследованию релейных систем автоматического управления. В частности, в работах [2, 3, 5—7] было показано, что в системах, линейная часть которых описывается уравнением выше второго порядка, наряду с простыми автоколебаниями могут существовать и сколь угодно сложные колебания, а также автоколебания с частичными скользящими участками движения.

Сразу же после своего опубликования метод фазовой плоскости и точечных отображений находит дальнейшее применение и развитие в работах А. С. Алексеева [1—3], С. И. Бернштейна [1—3], Н. В. Бутенина [4—6], Н. С. Горской и В. В. Петрова [1], С. В. Емельянова [1—4], Н. А. Железцова [1], В. В. Казакевича [1—3], И. К. Киселева [1], В. А. Кривоцуцкого [1], И. Н. Крутовой [1—3], Н. М. Маркевича [1], В. В. Петрова [1—3], В. В. Петрова и В. Ю. Рутковского [1, 2], В. В. Петрова и Г. М. Уланова [1—8], К. Ф. Теодорчика [1], А. А. Фельдбаума [7, 8] и многих других.

Идеи, рожденные А. А. Андроновым, нашли свое отражение и в работах зарубежных ученых Г. Вейсса [1], Р. Е. Калмана [1—3], Я. Ку [1—21], Я. Ку и Ч. Чена [1], Д. Мак-Дональда [1], Л. Мак-Кола [1], Н. Минорского [1], И. Флюгге-Лотц [2, 3, 5], а также в серии работ Флюгге-Лотц, написанных совместно с В. С. Вюншем [1], Т. Ишикава [1—3], К. Клоттером [1], Г. Е. Линдбергом [1, 2], Г. Титусом [1, 2] и др. Большой вклад в развитие теории нелинейных колебаний был внесен французскими учеными в работах Е. Коттона [1, 2], А. Льенарда [1], Ж. Хаага [1—14], Т. Фогеля [1—14], И. Гумовского [1—12], а в последнее время в работах К. Мира [1—4], Э. Рибери [1—5] и других.

Интересные результаты, полученные Я. Ку и И. Флюгге-Лотц, позволили на основе метода фазового пространства провести исследование нелинейных систем выше второго порядка. Редукция трехмерного и четырехмерного фазового пространства к двум плоскостям позволила Я. Ку рассмотреть некоторые свойства нелинейных систем, описываемых уравнениями третьего и четвертого порядка.

Влияние трения на динамические свойства нелинейных следящих систем второго порядка было детально изучено в работах М. Пестеля и Дж. Тэлера [1, 2].

В ряде случаев структура нелинейных систем (некоторых типов простейших двухкаскадных сервомеханизмов) может быть представлена в виде системы второго порядка с несколькими, в том числе неоднозначными характеристиками. В работах В. В. Петрова и Г. М. Уланова [1—8] и В. В. Казакевича [1—3] было показано, что в этих случаях удобно исследовать динамику таких систем с использованием метода многолистной фазовой плоскости и метода точечных отображений для таких неоднозначных характеристик как люфт, гистерезис, сухое трение и т. п.

Метод фазовой плоскости позволил также провести детальное исследование различных типов релейных систем автоматического управления. Ю. И. Неймарком [5] и А. С. Алексеевым [1—3] было показано, что в релейных системах с запаздыванием могут иметь

место сложные автоколебания. Н. А. Фуфаевым [1—3] были всесторонне исследованы всевозможные типы движений, существующие в вибрационном звене, движение которого описывается уравнением третьего порядка. Н. А. Фуфаевым были изучены также сложные периодические движения, отображаемые в фазовом пространстве многооборотными и многократными циклами, и т. п. Следует также отметить, что использование метода фазовой плоскости впервые позволило А. М. Хопкину [1], Д. Мак-Дональду [1], А. А. Фельдбауму [1—3] выявить существование оптимальных движений в простейших релейных системах, а также решить ряд задач анализа и синтеза оптимального управления еще до того, как были разработаны метод динамического программирования и принцип максимума Понтрягина.

Метод фазовой плоскости является до настоящего времени одним из немногих методов, позволяющих выбирать параметры и структуру релейных систем, в которых возможно существование скользящих режимов. Скользящие режимы широко используются в системах с переменной структурой, основы теории и применения которых даны в работах С. В. Емельянова [1—6]. Дальнейшее развитие теории и принципов построения систем с переменной структурой изложено в работах С. В. Емельянова и В. А. Тарана [1—8], М. А. Берманта и С. В. Емельянова [1—3], Е. А. Барбашина, В. А. Табуевой, Р. М. Эйдинова [1], Е. И. Герашенко [1, 2], Е. Б. Дудина [1, 2], Б. Н. Петрова, С. В. Емельянова, В. И. Уткина [1] и других авторов. Система с переменной структурой, не использующая скользящего режима, рассматривалась в работе В. А. Масленникова [1], а теоретическое обоснование подобной системы было дано в работе А. М. Летова [12]. Один класс систем с переменной структурой, не использующих скользящего режима, рассматривался Б. Н. Наумовым [6].

Следует отметить, что в последнее время на основе метода точечных отображений Р. А. Нелепиным [1—21] был разработан метод сечений пространства параметров, позволивший провести исследование систем высокого порядка. Суть метода состоит в том, что нелинейная автоматическая система высокого порядка изучается в условиях специально выбираемых сечений пространства ее параметров (коэффициентов). Для этих сечений исходная система неособым линейным преобразованием переменных преобразуется к новой системе, исследование которой сводится к последовательному изучению ряда подсистем низких порядков.

Исследование нелинейных систем произвольного порядка. Устойчивость нелинейных систем

Одной из основных проблем, возникающих при исследовании динамики нелинейных систем, является проблема устойчивости. Строгая теория устойчивости движения динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, была создана еще в 1892 г. выдающимся русским ученым А. М. Ляпуновым в его работе «Общая задача об устойчивости движения» [1]. А. М. Ляпунову принадлежат основные теоремы, решающие проблему устойчивости в тех или иных случаях.

Однако наибольшее значение для исследования устойчивости нелинейных систем имеет так называемый второй (прямой) метод Ляпунова, основанный на использовании некоторой функции, называемой функцией Ляпунова. В своей работе А. М. Ляпунов указал способ построения такой функции лишь для линейных систем. Основная трудность в использовании прямого метода для нелинейных систем заключается в нахождении функции Ляпунова. Вообще говоря, можно подобрать несколько различных вариантов функции Ляпунова для одной и той же исследуемой нелинейной системы, каждая из которых даст свои условия устойчивости. Поэтому в подавляющем большинстве случаев второй метод Ляпунова позволяет получить лишь достаточные условия устойчивости.

Отметим, что в теории автоматического управления идеи Ляпунова не использовались в течение шестидесяти лет после опубликования его выдающейся работы [1]. Основной причиной этого являются трудности нахождения функции Ляпунова. Только в 30-х годах начал проявляться интерес к проблеме устойчивости нелинейных систем на основе теорем А. М. Ляпунова. Эта теория впоследствии развивалась в работах математиков советской школы: Г. Н. Дубошина [1], Н. А. Еругина [1—6], Б. А. Ершова [1], В. И. Зубова [1—3], Г. В. Каменкова [1—4], Н. Н. Красовского [1, 2], А. М. Летова [8, 9], А. И. Лурье [1—11], И. Г. Малкина [3, 6—10], К. П. Персидского [1—3], В. А. Плисса [2], Н. Г. Четаева [1—4], В. А. Якубовича [1—8] и других.

Многие из математических методов теории устойчивости изложены в недавно опубликованной книге Б. П. Демидовича [1].

Прикладные задачи этой теории применительно к системам автоматического регулирования решались в работах А. И. Лурье [1, 5, 7—11], Н. Д. Мойсеева [1—3], А. М. Летова [4—9, 13, 17], М. А. Айзермана [1, 2], В. А. Троицкого [2], Н. Н. Красовского [2], Б. С. Разумихина [1—6], Ю. И. Алимова [1, 3], Е. А. Барбашина [1], Е. Н. Розенвассера [1—4], М. А. Айзермана и Ф. Р. Гантмахера [10—12], К. А. Карачарова и А. Г. Пилютника [1], Я. З. Цыпкина [2, 8, 16—18] и многих других.

Большое число работ по устойчивости нелинейных систем было опубликовано и зарубежными учеными: Я. Ку [5, 7, 9, 13, 16—21], Я. Курцвейлем [1], С. Лефшецем [1], И. Л. Массера [1, 2], В. Ханом [1], Т. Иошизава [1], Я. Кудревичем [1—3], В. М. Поповым [1—5, 7—11], Ж. П. Ла-Саллем и С. Лефшецем [1], Д. Д. Родденом [1], Дж. Виллемсом [1], Р. В. Броккетом [1], Д. Инверсоном [1], З. В. Реказинусом и Д. Р. Роуландом [1], Г. Зеймсом и П. Л. Фальбом [1].

Научная литература по теории устойчивости нелинейных систем чрезвычайно обширна и по этим вопросам в СССР был опубликован ряд обзоров А. М. Леговым [13, 14], А. М. Леговым и А. И. Лурье [1], А. М. Лукомской [1], А. И. Лурье [11], М. А. Айзерманом и Ф. Р. Гантмахером [11], Е. С. Пятницким [1] и другими авторами.

За рубежом такие обзоры были опубликованы: Г. Антосиевичем [1], Р. Е. Калманом и И. Е. Бертрамом [1], В. Капланом [1], И. Л. Массера [2], В. Ханом [1], Г. Хиггинсом [1], Л. Чезари [1].

Существует большое число понятий устойчивости. Известно, например, понятие технической или практической устойчивости

(устойчивость на конечном интервале времени), устойчивости по Лангранжу, гиперустойчивости, условной устойчивости и т. д. Однако наиболее плодотворным применительно к нелинейным системам оказалось понятие асимптотической устойчивости по Ляпунову, лежащее в основе понятия абсолютной устойчивости, которое было впервые введено в 1944 г. в работе А. И. Лурье и В. Н. Постникова [1].

Введенное понятие абсолютной устойчивости и предложенный метод ее исследования имели большое значение для развития теории нелинейных систем на основе второго метода Ляпунова.

Это направление сразу же после опубликования работы А. И. Лурье и В. Н. Постникова [1] привлекло к себе внимание многих специалистов по теории автоматического управления в СССР и за рубежом оригинальностью постановки задачи об устойчивости и методом ее решения.

В дальнейшем был выполнен ряд работ в направлении развития предложенного метода и его использования для решения ряда практических задач. Так, А. М. Летовым [12] было показано, что получаемые условия устойчивости являются в ряде случаев не только достаточными, но и необходимыми. Л. И. Куприяновой [1], А. М. Летовым [7, 12, 18], А. И. Лурье [8, 10], Б. С. Разумихиным [1—4, 6] были получены также условия устойчивости для различных типов объектов управления, когда уравнение объекта имеет нулевые корни, корни с положительной действительной частью, соответствующие неустойчивому объекту, запаздывание, а также для случаев, когда система содержит два регулируемых органа (см. А. М. Летов [9], А. М. Летов и А. П. Дувакин [1]), а затем и n регулируемых органов.

А. М. Летовым [12, 17, 18] были разработаны критерии устойчивости, сводящие задачу исследования устойчивости к исследованию нескольких пар разрешающих уравнений; методы исследования устойчивости нелинейных систем при учете нагрузки.

При исследовании асимптотической устойчивости релейных систем приходится иметь дело с разрывными характеристиками. Критерий асимптотической устойчивости релейных систем, полученный Я. З. Цыпкиным [2, 5, 7] вначале из физических соображений, получил в дальнейшем строгое математическое обоснование в работах Д. В. Аносова [1], В. Г. Болтянского и Л. С. Понтрягина [1] и С. Д. Киняпина и Ю. И. Неймарка [1], и, таким образом, первый метод А. М. Ляпунова был обобщен на определенный класс нелинейных систем, имеющих разрывные характеристики.

А. Х. Гелигом [1—5], Б. С. Разумихиным [1—6] методы исследования устойчивости на основе второго метода Ляпунова были также обобщены на некоторые нелинейные системы с распределенными параметрами и с запаздыванием, а также на нелинейные системы с характеристиками, имеющими разрывы первого рода.

Следует также отметить ряд интересных результатов, полученных в этом направлении Н. Г. Четаевым [2—4] и И. Г. Малкиным [3, 6—10], многие из которых имеют пока теоретический характер и не нашли еще большого практического применения при исследовании устойчивости нелинейных систем управления. И. Г. Малкин предложил несколько более общий вид функции Ляпунова по сравнению с тем, как это было предложено в работе А. И. Лурье и В. Н. Пост-

никова [1], в результате чего упрощается вид условий устойчивости. Несколько видоизмененный метод Малкина в последнее время использовался Ю. И. Алимовым [1, 2] для исследования устойчивости нелинейных систем «в большом».

В 1946 г. М. А. Айзерманом [1] задача об абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейной системы была рассмотрена для случая, когда нелинейная характеристика целиком лежит в конечном угле. Для решения задачи использовалась функция Ляпунова в виде квадратичной формы от основных переменных. В 1949 г. М. А. Айзерманом [10] была поставлена следующая задача: совпадает ли для систем произвольного порядка значение k , определяющее «ляпунов угол», в котором лежит нелинейная характеристика, т. е. когда обеспечивается выполнение достаточных условий абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейной системы с одной нелинейной характеристикой, найденных при помощи второго метода Ляпунова со значением k , определяемым с помощью критериев устойчивости линейных систем заменой нелинейной характеристики линейной («гурвитцев угол»). Эта задача вызвала большой интерес. В 1958 г. В. А. Плиссом [2] был построен математический пример системы третьего порядка, для которой «ляпунов угол» составляет лишь часть «гурвитцева угла».

В последние годы широкое распространение получили частотные методы исследования абсолютной устойчивости.

В 1959 г. была опубликована работа румынского ученого В. М. Попова [1], в которой он показал, что для исследования абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейных систем могут быть использованы частотные представления. Доказанный им критерий получил название критерия Попова.

Работы В. М. Попова [1—12] послужили началом целой серии теоретических работ. В работе А. Б. Бергена и М. А. Шапиро [1] критерий Попова был обобщен на случай, когда линейная часть системы условно устойчива. Я. З. Цыпкин [15, 16, 18] распространил критерий Попова на нелинейные импульсные системы. В 1963 г. Р. Е. Калманом [1] была установлена связь между вторым методом Ляпунова и критерием Попова. После опубликования работы В. М. Попова это новое направление в дальнейшем развивалось рядом советских и зарубежных авторов.

В. А. Якубовичем [2] критерий Попова был распространен на случай неоднозначных нелинейностей, В. М. Поповым и А. Халанаем [1] — на системы с запаздыванием, А. Х. Гелигом [1—7] — на нелинейные системы с распределенными параметрами и с неединственным положением равновесия, а в работе Я. З. Цыпкина [18] — для исследования асимптотической устойчивости «в большом» реальных систем автоматического управления.

Метод, основанный на использовании специальных матричных неравенств для систем с одной нелинейностью, позволил В. А. Якубовичу [1—8] получить частотное условие абсолютной устойчивости положения равновесия, улучшающее для ряда случаев условия устойчивости, вытекающие из критерия Попова. В. М. Поповым [3] и В. А. Якубовичем [7], Е. И. Джури и В. В. Ли [1] были получены также достаточные частотные условия абсолютной устойчивости

положения равновесия для нелинейных систем, содержащих несколько нелинейных элементов.

Критерий Попова позволяет определять достаточные условия абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейных систем автоматического управления, т. е. условия устойчивости систем при ненулевых начальных условиях. Очень часто на входе нелинейных систем автоматического управления действуют внешние воздействия, представляющие собой ограниченные функции времени. Критерий абсолютной устойчивости нелинейных систем при учете действующих на них внешних воздействий имеют большое практическое значение. Как следует из работ И. Г. Малкина [8] и А. И. Летова [12, 18], второй метод Ляпунова, в принципе, может быть применен и в этом случае, однако возникающие при этом практические трудности пока не позволили получить результаты, пригодные для инженерной практики.

В 1964 г. в работах В. А. Якубовича [5], Б. Н. Наумова и Я. З. Цыпкина [1] критерий Попова был обобщен на случай абсолютной устойчивости процессов, который вначале в работе Я. З. Цыпкина [17] был доказан для нелинейных импульсных систем. Следует также отметить, что аналогичный результат был получен в работах К. С. Нарендра и Р. М. Голдвина [1] и И. В. Сандберга [1—3]. В работе Р. В. Броккета и В. В. Ли [1] было получено достаточное частотное условие неустойчивости процессов в нелинейных системах.

В работах Б. Н. Наумова, Я. З. Цыпкина [1] и Б. Н. Наумова [10—12] был изложен метод синтеза корректирующих устройств, основанный на использовании логарифмических частотных характеристик.

Условие абсолютной устойчивости положения равновесия в системе с нелинейной нестационарной характеристикой вне связи с абсолютной устойчивостью процессов было получено раньше (чем был доказан критерий абсолютной устойчивости процессов) в работах Е. Н. Розенвассера [3] и В. А. Якубовича [1, 3].

В работе К. Лефевра и Ж. Ришале [1] был проведен сравнительный анализ различных достаточных критериев устойчивости для нелинейных систем с нестационарной характеристикой с критериями устойчивости для линейных систем с переменными во времени коэффициентами. Эти критерии были опубликованы в работах Н. Д. Бершада [1], Дж. Дж. Бонджиорно [1—3], В. Кули, Р. Кларка, Р. Букнера [1], К. Лефевра [1], Ж. Ришале и К. Лефевра [1], а критерии для нестационарных нелинейных систем получены в диссертации А. Дж. Роля [1].

В работах Б. Н. Наумова [10—12] предложено использование метода логарифмических частотных характеристик для решения задачи анализа и синтеза нелинейных систем с абсолютно устойчивым положением равновесия, а также для нелинейных систем с переменным параметром.

Часто системы автоматического управления работают при наличии помех, которые, как показано в работах В. С. Пугачева [1], А. А. Первозванского [1], в ряде случаев могут привести к неустойчивости, хотя при отсутствии помех они устойчивы. Как известно,

при малой величине отношения сигнал — помеха происходит линеаризация нелинейных характеристик. В этих случаях систему можно рассматривать как линейную и исследовать систему (в том числе устойчивость) на основе использования линейных методов (см. Е. П. Попов [15, 17] и А. А. Первозванский [1]). Большинство же реальных нелинейных систем работает при небольшом уровне помех, т. е. при большой величине отношения сигнал — помеха; в этих случаях необходимо применять методы нелинейной теории.

Впервые задача теоретического исследования динамики нелинейных систем при случайных воздействиях была поставлена академиком Л. И. Мандельштамом. К сожалению, число работ, посвященных исследованию устойчивости нелинейных систем, работающих при наличии помех, очень невелико.

Здесь в первую очередь следует отметить опубликованную еще в 1933 г. работу А. А. Андропова, А. А. Витта и Л. С. Понтрягина [1], в которой они поставили задачу выделения из множества движений нелинейной динамической системы те ее движения, которые при наличии случайных помех осуществляются с наибольшей вероятностью.

Работы, связанные с исследованием устойчивости в нелинейных системах при наличии помех, были опубликованы Т. Сато [1], который получил достаточное условие абсолютной устойчивости на основе второго метода А. М. Ляпунова. Статистическое рассмотрение процессов в нелинейных динамических системах при случайных начальных условиях и отсутствии постоянно действующих случайных сил было дано в работах А. А. Красовского [5—8].

Если известно, что действующие на входе нелинейной системы помехи ограничены по модулю, то в этом случае для суждения об устойчивости можно непосредственно использовать критерий абсолютной устойчивости процессов. В работах Б. Н. Наумова [10—11] критерий абсолютной устойчивости процессов был также обобщен на случай, когда на входе нелинейной системы действует некоторый сигнал, ограниченный по модулю (математическое ожидание входного сигнала), и помеха, на которую условие ограничения по модулю не накладываются, в предположении, что для помехи справедлив нормальный закон распределения.

Автоколебания и вынужденные движения в нелинейных системах

Проблема периодических движений в нелинейных системах уже давно привлекла к себе внимание исследователей. Известно, например, (см. М. А. Айзерман [5]), что отысканию периодических режимов был посвящен второй мемуар И. А. Вышнеградского 1878 г. [1], в котором исследовалась релейная система. Исследование автоколебательной системы регулирования было проведено также А. Леоте [1; 2], который почти одновременно с работами А. Пуанкаре [1] по качественной теории дифференциальных уравнений использовал *геометрический образ*, который сейчас называется *предельным циклом*, для изображения периодического режима на фазовой плоскости. Результаты А. Леоте были продолжены известным польским

математиком А. Гуковским [1], который, видимо, был первым, кто исследовал скользящие режимы.

Проблема исследования автоколебаний и вынужденных движений, условий их возникновения и существования была в центре внимания многих советских исследователей еще в 30-х годах (вначале в связи с решением задач радиотехники). Впервые на автоколебательный характер процессов, происходящих в некоторых системах автоматического регулирования, и на связь явлений возникновения периодических режимов в таких системах с общей теорией нелинейных колебаний обратил внимание в 1938 г. Г. Н. Никольский [2].

При исследовании периодических режимов в нелинейных системах наибольшее распространение получили различные модификации методов, в основе которых лежит предположение о гармоническом характере процессов. Поэтому в первых работах, опубликованных в 30—40-х годах, посвященных анализу периодических движений, лежали методы исследования автоколебаний, имеющих форму, близкую к периодической, перенесенные в теорию автоматического регулирования из радиотехники. Это так называемые методы малого параметра (метод А. Пуанкаре [2]), метод медленно меняющихся коэффициентов (метод Б. Ван-дер-Поля [1]), которые были изложены в работах А. А. Андропова [1], А. А. Андропова и Л. И. Мандельштама [1], Б. В. Булгакова [1—4], А. М. Летова [1], И. Г. Малкина [1], Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси [1, 2].

Метод малого параметра был впервые опубликован в 1892 г. французским математиком А. Пуанкаре [2] в связи с его исследованиями в области небесной механики, а также А. М. Ляпуновым [1] (у А. М. Ляпунова нет малого параметра в явной форме; но по существу все его результаты полностью совпадают с результатами работ А. Пуанкаре). Поэтому метод малого параметра следует правильно называть методом Ляпунова — Пуанкаре.

Развитие методов малого параметра и медленно меняющихся коэффициентов в основном связано с работами А. А. Андропова и А. А. Витта [1, 2], А. Г. Майера [1], К. Ф. Теодорчика [2, 3], И. Г. Малкина [1, 2, 4, 5, 11], А. И. Лурье [3, 5, 11], Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [1, 2], А. М. Летова [2, 3, 11], М. А. Айзермана [3, 4, 8].

Обзор результатов, полученных при развитии метода Пуанкаре — Ляпунова, и возможностей его использования были опубликованы в работах И. Г. Малкина [11] и А. М. Летова [11].

В связи с тем, что в общем виде решить задачу нахождения периодического решения на основе указанных методов не удается, были предложены различные приближенные методы. В основе таких методов, разработанных Б. В. Булгаковым [1—6] и А. И. Лурье [1, 3, 5, 11] и позволяющих приближенно найти периодическое решение, лежит предположение о том, что амплитуда и фаза искомого периодического решения являются медленно меняющимися функциями времени, что позволяет для каждого отдельно взятого периода считать их постоянными и заменить средними значениями за период. Здесь следует отметить большую роль, которую сыграли работы Б. В. Булгакова [1—6]. Б. В. Булгаковым были разработаны два метода, которые основаны на методе малого параметра и методе медленно меняющихся коэффициентов. Одной из заслуг

Б. В. Булгакова является то, что он разработал один из вариантов метода малого параметра, когда нелинейная функция может быть задана графически, что позволяет избежать большого числа промежуточных вычислений [5, 6].

Несколько позже А. И. Лурье [11], А. И. Лурье и А. И. Чекмаевым [1] был предложен несколько иной, чем у Б. В. Булгакова, метод, базирующийся на тех же теоретических основах и позволяющий исследовать периодические движения в более простых по структуре нелинейных системах автоматического управления. Метод Б. В. Булгакова лег в основу исследований ряда авторов по динамике конкретных нелинейных систем. Так, Е. Н. Мирославлевым [1] на основе метода Булгакова была исследована нелинейная система, описываемая дифференциальными уравнением пятого порядка при учете нелинейной характеристики сервомотора.

Метод Ляпунова — Пуанкаре с использованием канонической формы дифференциальных уравнений применялся для исследования автоколебаний в нелинейной системе с несколькими регулирующими органами В. А. Троицким [1]. Одна из разновидностей метода малого параметра для определения автоколебаний в пневматических регуляторах использовалась Л. А. Залманзоном [1, 2]. Следует, однако, отметить, что разработанные в 30—40-х годах методы исследования периодических режимов, основанные на методе малого параметра и медленно меняющихся коэффициентов, в последующие годы не нашли широкого практического применения из-за своей сложности.

Примерно в 40—50-х годах В. А. Котельниковым [1], Л. С. Гольдфарбом [1—12], В. Оппельтом [1], Р. Коченбургером [1, 2], Ж. Д. Лозбом [1], Е. П. Поповым [1—7, 12—24], Л. А. Заде [1] были опубликованы работы, в которых исследование периодических режимов в нелинейных системах было проведено на основе метода гармонического баланса (гармонической линеаризации, описывающей функции).

Теоретические основы и математическое обоснование метода гармонического баланса было дано в работах академиков Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [1, 2]. Благодаря этим основополагающим работам метод гармонического баланса в последующие годы нашел большое практическое распространение для исследования периодических и вынужденных движений в нелинейных системах, описываемых уравнениями произвольного порядка.

Л. С. Гольдфарбом была предложена весьма удобная графическая форма исследования периодических режимов в нелинейных системах, основанная на использовании частотной характеристики линейной части системы и эквивалентного комплексного коэффициента усиления. Я. З. Цыпкиным [20], Даусом [1], М. З. Коловским [1] были разработаны приближенные методы нахождения эквивалентного комплексного коэффициента усиления для тех случаев, когда характеристика нелинейного элемента задана графически. Ряд этих методов изложен в книге П. Наслена [1].

Дж. Э. Гибсон и Э. К. Тада [1], Я. Шомло [7] и Г. Шлитт [1] разработали способы определения нелинейности по виду ее эквивалентного комплексного коэффициента усиления.

А. И. Лурье [11], А. И. Лурье и А. И. Чекмаревым [1] и В. А. Боднером [1—3] было показано, что применение известного метода Б. Г. Галеркина приводит к тем же результатам, что и метод гармонического баланса.

А. Д. Джоплингом, Р. А. Джонсоном [1] был предложен метод эллиптической линеаризации.

Метод Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, получивший в 50-е годы также название метода гармонической линеаризации, был существенно развит Е. П. Поповым [1—7, 12—24]. Вначале Е. П. Поповым [1] была предложена несколько иная форма определения параметров автоколебаний, основанная на использовании кривой А. В. Михайлова. Затем для уточнения первого приближения Е. П. Поповым [2] был разработан приближенный метод определения высших гармоник (см. также Ф. Клаузер [1]). Сущность метода Е. П. Попова [2] и И. П. Пальтова [1] состоит в том, что путем введения специальной формы приближенного решения, удается обойти трудности, обычно приводящие к практически неразрешимой бесконечной системе уравнений. Это позволяет Е. П. Попову [3], в частности для систем с несимметричными нелинейностями, исследовать автоколебания при помощи метода разделения уравнений на две приближенные системы. Кроме того, Е. П. Поповым были даны выражения, уточняющие первое приближение в методе гармонического баланса. Для ряда систем с нечетными симметричными характеристиками было показано, что первое приближение может дать неверный результат и что только учет третьей гармоники решения позволяет получить результат, близко совпадающий с реальным. В 1959 г. этот метод определения высших гармоник получил дальнейшее развитие в работе Е. П. Попова [18] для исследования периодических движений в системах с несимметричными нелинейными характеристиками, а также для случаев, когда на входе нелинейных систем действует постоянное или медленно меняющееся внешнее воздействие. Для определения последующих приближений была указана возможность построения итерационного процесса. В работе Я. З. Цыпкина [7] была показана возможность исследования периодических режимов в нелинейных системах с однозначными нелинейными характеристиками на основе кривой D -разбиения по одному и двум параметрам. В работе Б. Н. Наумова [1] было исследовано влияние воздействий по производным на частоту и амплитуду автоколебаний. Ю. И. Топчевым [1] и Ю. А. Бутко и Ю. О. Штеренбергом [1] был предложен способ определения периодических режимов в системах с одной и двумя нелинейностями на основе использования логарифмических характеристик линейной части системы. В дальнейшем метод гармонического баланса был использован Е. К. Круг и О. М. Мининой [1] для исследования автоколебаний в системе, содержащей неустойчивый элемент, где было проведено сравнение точных результатов, полученных на основе метода припасовывания с исследованием, проведенным на основе метода гармонического баланса. Метод гармонического баланса был распространен Э. М. Наджафовым [1] на системы, содержащие несколько нелинейных элементов, М. В. Стариковой [1] — на системы с несимметричными нелинейными характеристиками, Б. Н. Петро-

вым и М. В. Стариковой [1, 2], Е. П. Поповым [22] и К. К. Жильцовым [1] — на системы с логическими элементами, Е. Л. Урманом [1] и Д. П. Петелиным [1] — для исследования условий синхронизации синхронных машин и исследования автоколебаний в системах регулирования синхронного двигателя, С. А. Черниковым [1—3] — для исследования гироскопических систем, Н. А. Сметаниным [1] — на системы с переменной структурой и т. д.

М. А. Айзерманом [3], Р. Коченбургером [1, 2], Е. П. Поповым [5,7], Е. П. Поповым и И. П. Пальтовым [1] метод гармонического баланса был обобщен на случай исследования вынужденных движений при действии на входе нелинейной системы периодического входного воздействия. Здесь был предложен ряд графических модификаций этого метода с использованием амплитудно-фазовых характеристик линейной части системы и кривой Михайлова.

Работы ряда авторов посвящены вопросам устойчивости периодических режимов. Трудности аналитического исследования устойчивости периодических режимов породили ряд приближенных методов.

Еще в 1947 г. Л. С. Гольдфарбом был предложен приближенный метод исследования устойчивости периодических режимов. В 1953 г. Е. П. Поповым получено аналитическое выражение необходимого условия устойчивости для приближенного исследования периодического движения гармонической формы. Для практического использования найденного условия устойчивости можно использовать кривую Михайлова.

И. М. Смирновой [1—3] был предложен графический прием определения устойчивости вынужденных колебаний в том случае, когда числитель передаточной функции линейной части системы равен постоянной величине и система содержит малый параметр.

Исследование устойчивости периодических режимов в общем случае сводится к рассмотрению характеристического уравнения, имеющего вид определителя бесконечного порядка, известного в литературе под названием обобщенного определителя Хилла. В работах В. А. Тафта [1—3] было показано, что этот определитель можно представить в виде конечной суммы трансцендентных уравнений; однако коэффициенты этих выражений сами являются определителями бесконечного порядка. Как было показано Я. З. Цыпкиным и И. В. Пышкиным [1] и И. В. Пышкиным [1], только для некоторых случаев кусочно-линейных нелинейностей характеристическое уравнение можно получить в замкнутом виде. Этим и объясняется, что в большинстве случаев практически прибегают к нестрогим приближенным способам, применение которых часто оказывается достаточным.

Первоначально многие авторы, в том числе Б. В. Булгаков [1—6], А. М. Летов [1, 2, 11] и А. И. Лурье [1, 3, 5, 11], для нахождения условий устойчивости периодического движения пользовались осреднением периодических коэффициентов. Используя метод усреднения коэффициентов в форме Б. В. Булгакова, А. М. Летовым [1—3] были получены необходимые и достаточные условия устойчивости найденного приближенного периодического движения.

В своей основополагающей работе Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов [2] указали способ для уточнения результатов первого приближения, получаемого в результате пренебрежения высшими гармониками. В последующие годы ряд советских и зарубежных авторов рассматривали вопросы, связанные с уточнением первого приближения, несмотря на трудности вычислительного характера, которые связаны, в основном, с увязкой баланса по многим гармоникам. Это обычно приводит к необходимости решения сложной системы нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений.

В конце 50-х годов М. А. Айзерманом и Ф. Р. Гантмахером [5—10], Л. А. Гусевым [1] был разработан точный метод определения периодических режимов в форме полных рядов Фурье в нелинейных системах произвольного порядка — вначале для нелинейных характеристик, которые могут быть составлены из отрезков двух прямых, а затем и для произвольных кусочно-линейных характеристик. Решение задачи доведено авторами до уравнения периодов. Показано, что задача сводится к решению системы трансцендентных уравнений (уравнений периодов), определяющих времена движения по каждому из участков нелинейной характеристики в пределах периода.

Были рассмотрены также возможности применения вычислительных машин для решения уравнений периодов.

В 1965—68 годах был опубликован ряд работ Я. Шомло [1—7], в которых предложен оригинальный способ нахождения эквивалентного комплексного коэффициента усиления для кусочно-линейных характеристик. Дан метод уточнения первого приближения, доведенный до машинных программ, записанных на алгоритмическом языке АЛГОЛ.

Ю. И. Топчевым [1—2] на основе метода гармонического баланса была разработана методика анализа нелинейных систем при учете высших гармоник.

Е. Д. Гарбером [1], Е. Д. Гарбером и Е. Н. Розенвассером [1], Е. Н. Розенвассером [5, 7, 23], Ю. А. Рябовым [1], исходя из интегральных уравнений нелинейной системы, был получен ряд оценок влияния отбрасываемых гармоник в случае систем с одной нелинейной характеристикой, а затем Е. Н. Розенвассером [7] и для систем со многими нелинейностями.

Существенный интерес представляют работы, посвященные исследованию нелинейных систем при случайных воздействиях.

Если в нелинейной системе возможны автоколебания, то наличие случайных возмущений может привести к изменению параметров автоколебаний, либо к их срыву, в связи с чем задача исследования нелинейных автоколебательных систем при наличии случайных воздействий представляет большой практический интерес. Для ее решения большое распространение получили различные модификации метода статистической линеаризации (см. А. А. Первозванский [1, 2], Е. П. Попов и И. П. Пальтов [1], И. С. Морсанов [1—5], К. А. Пупков [1], И. Е. Казаков и Б. Г. Доступов [1], Р. А. Панков и А. А. Самойлов [1], Дж. Э. Гибсон и Р. Сридхар [1], А. К. Махаланобис и А. К. Нас [3]).

Релейные системы автоматического регулирования представляют наиболее распространенный и давно применяемый тип нелинейных систем автоматического управления. Специфика релейных систем не только проявляется в их поведении, но часто приводит и к своеобразию методов их исследования.

Одной из первых работ по теории релейных систем является работа Г. Л. Хазена [1], опубликованная в 1934 г. Основное внимание разработке точных методов исследования периодических режимов в релейных системах было уделено в начале 50-х годов, когда в этом направлении советские и зарубежные ученые получили ряд существенных результатов.

Большое значение для развития теории релейных систем имели работы А. И. Лурье [1—3], который в 1947 г. разработал точный метод анализа автоколебаний и их устойчивости. Этот метод опирается на метод приспособывания и каноническую форму записи исходных дифференциальных уравнений. В результате автор получил так называемое уравнение периодов, положительный корень которого и определяет полупериод искомого простого периодического решения. А. И. Лурье [1, 3] было проведено также исследование локальной устойчивости найденного периодического решения.

В 1950 г. Я. З. Цыпкиным [2, 4—6, 9—12, 15] для исследования автоколебаний в релейных системах, не имеющих переключений внутри периода, был разработан точный метод, основанный на использовании частотных представлений. Аналогичный метод был разработан Б. Гамелем [1, 2] во Франции, о котором стало известно сравнительно недавно после опубликования книги Ж. Жилия, П. Декольна и М. Пелегрена [1]. Однако доказательство и форма метода Б. Гамеля отличны от метода Я. З. Цыпкина. Метод Я. З. Цыпкина был развит и использован для исследования различных релейных систем в работах Н. А. Королева [1, 2], Л. П. Кузьмина [1], А. А. Славина [1, 2] и В. И. Тверовского [1—5].

В 1952 г. Я. З. Цыпкин [4, 8] обобщил этот метод на исследование вынужденных движений в релейных системах. Я. З. Цыпкиным [2, 3, 4] был предложен также метод исследования локальной устойчивости найденных периодических решений, который сводится к исследованию устойчивости некоторой эквивалентной импульсной системы, имеющей ту же линейную часть, что и исходная релейная система, но содержащееся в ней реле заменено соответствующим импульсным элементом.

Позже Я. З. Цыпкиным в монографии [8] были изложены результаты, позволяющие исследовать случаи несимметричных сложных автоколебательных режимов, и приведены условия локальной устойчивости в этих случаях.

В 1953 г. Ю. И. Неймарком [3, 4, 6] была разработана общая теория как простейших симметричных, так и сложных периодических режимов в релейных системах произвольного порядка. Предложенный метод исследования автоколебаний и их устойчивости основан на изучении точечного преобразования многомерного гильбертова пространства в самое себя. Конкретное выражение для уравнений периодов получено в работах Ю. И. Неймарка [3, 6] для систем без запаздывания, а также в работах Ю. И. Неймарка [5],

Ю. И. Неймарка и И. М. Кубланова [1] для систем с произвольным числом и расположением запаздывающих элементов.

Аналогичный подход был использован при определении периодических режимов для релейных систем при внешнем периодическом воздействии. Для всех перечисленных случаев (автоколебания и вынужденные движения, наличие или отсутствие запаздывания в системе, режим произвольного сложного типа) была решена также задача локальной устойчивости периодического режима.

Примерно одновременно с вышеупомянутым методом П. В. Бромберг [3, 4] был предложен другой метод, основанный на использовании теории матриц. Для исследования простейших симметричных периодических режимов в релейных системах и их устойчивости указан способ составления уравнения периодов и нахождения условий локальной устойчивости.

Симметричные периодические движения в многокаскадной следящей системе были рассмотрены в работе Ю. И. Неймарка и Л. П. Шильникова [1], а численные методы отыскания периодических движений — в работе Ю. И. Неймарка [1]. Использование метода приспособивания для исследования релейных систем рассматривалось в работах Б. А. Рябова [1—3].

В работах К. С. Бобова [1, 2], С. И. Бернштейна [1—3], В. А. Бесекерского [1], Н. В. Бутенина [6], А. А. Красовского [2], И. Н. Крутовой [1—3], В. С. Кулебакина [1, 2], Г. С. Поспелова [1—3], Б. И. Рубина [1] были рассмотрены вопросы, связанные с наличием внутреннего высокочастотного автоколебательного контура, который может привести к эффекту вибрационной линеаризации системы, к устранению трения и т. п. Наиболее полные результаты в этом направлении были получены в работе Г. С. Поспелова [1], где в очень ясной форме приведены точное и приближенное решения задачи о вибрационной линеаризации простейшей релейной следящей системы. Г. С. Поспеловым [2, 3] были получены также существенные результаты, связанные с задачей нахождения огибающей выходных колебаний релейных систем, когда ко входу системы приложена непрерывная медленно меняющаяся составляющая и высокочастотные колебания.

Строгое математическое обоснование факта линеаризации за счет внешнего высокочастотного периодического воздействия было дано в работе Н. Н. Боголюбова [1].

Вопросам, связанным с некоторыми специальными режимами релейных систем, которые получили название скользящих или пульсирующих, посвящена работа Г. Н. Никольского [1], в которой показана возможность существования скользящих режимов и их физический смысл. Эти режимы рассматривались также в работах С. Г. Герасимова [1, 2], Ю. В. Долголенко [1—5], И. П. Дудниковой [2], Ю. Г. Корнилова [1], В. Д. Миронова [1], Ю. И. Неймарка [8, 9], А. М. Поповского [1]. Решение задачи об условиях существования непрерывных скользящих режимов в системе непрямого регулирования было дано в работах Ю. В. Долголенко [1—5], а также в работах М. А. Айзермана и Ф. Р. Гантмахера [1—4, 9] в связи с исследованием нелинейных систем с кусочно-линейными характеристиками.

Качество переходных процессов в нелинейных системах

Во многих практических случаях недостаточно обеспечить устойчивость нелинейных систем — важно также получить информацию о качестве переходных процессов, вызванных внешними воздействиями (задача анализа), и уметь так изменить параметры и, если нужно, структуру системы, чтобы получить переходные процессы, удовлетворяющие тем или иным критериям (задача синтеза).

Косвенные методы оценки качества переходных процессов в нелинейных системах можно разбить на следующие основные группы (хотя, как будет видно из дальнейшего, каждую из них нельзя расшатривать изолированно).

К первой группе косвенных методов оценки качества переходных процессов следует отнести методы, основанные на понятии степени устойчивости. Эта группа методов получила существенное развитие главным образом применительно к линейным системам автоматического управления благодаря работам П. В. Бромберга [2], Н. Кастерса и Дж. Мура [1], А. А. Красовского [1, 3], А. Леонарда [1, 2], Ф. А. Михайлова [1], Н. Н. Мясникова [2], Б. Н. Петрова [1], А. М. Рубинчика [1, 2], А. А. Фельдбаума [3, 6], Я. З. Цыпкина [1], Э. Г. Удермана [1].

Понятие степени устойчивости линейных систем было введено в 1945 г. в работе Я. З. Цыпкина и П. В. Бромберга [1].

Б. Н. Наумовым и Я. З. Цыпкиным [1], В. А. Якубовичем [5, 6] по аналогии с линейными системами получены достаточные условия, при выполнении которых переходные процессы в нелинейных системах, вызванные ненулевыми начальными условиями, будут иметь степень устойчивости не менее заданной. При этом будут выполняться также условия абсолютной устойчивости положения равновесия и процессов в нелинейных системах.

В работах Б. Н. Наумова и Я. З. Цыпкина [1], Б. Н. Наумова [10] разработаны методы анализа и синтеза корректирующих устройств, при введении которых в систему выполняются достаточные условия абсолютной устойчивости и, кроме того, отклонения от положения равновесия (процессов) имеют степень устойчивости не менее заданной.

Важные оценки переходных процессов в абсолютно устойчивых нелинейных системах получены Р. Ивенсом [1].

В работах Г. Н. Дубошина [1], Б. А. Ершова [2], В. И. Зубова [1], А. М. Летова [8, 10, 16], Н. Г. Четаева [1, 2] развивалось направление, тесно связанное со вторым методом Ляпунова и понятием наименьшего характеристического числа, применительно к нелинейным системам. Эти работы связаны также с понятием степени устойчивости и основаны на идее Н. Г. Четаева, изложенной применительно к линейным системам в работах Н. Г. Четаева [1, 2] и А. М. Летова [8, 10].

Ко второй группе косвенных методов относятся методы, основанные на интегральных оценках качества переходных процессов. Как известно, при этом формируются некоторые функции от

регулируемой координаты, величина интеграла от которых и позволяет судить о качестве переходного процесса в системе.

Так же, как и первая группа методов, интегральные методы получили существенное развитие главным образом применительно к исследованию качества линейных систем. Идея использования квадратичных оценок для некоторых радиотехнических задач принадлежит Л. И. Мандельштаму и Н. Д. Папалекси [1, 3], которые более 50 лет назад разработали способ вычислений этих оценок. А. А. Харкевич [1] применил квадратичный критерий при выборе параметров осциллятора. В 1941 г. Б. В. Раушенбах [1] предложил использовать интеграл от модуля ошибки при решении задачи о продольной устойчивости самолета. В работах В. С. Кулебакина [3, 4] и А. В. Римского-Корсакова [1] было предложено использовать интегральные оценки для оценки качества систем.

Первой работой, в которой интегральные оценки использовались для суждения о качестве переходных процессов в системах регулирования, была работа А. Холла [1].

В работах А. А. Фельдбаума [1, 2] установлена связь интегральных оценок с вариационным подходом и показана возможность вычисления интегральных оценок для нелинейных систем автоматического управления, для которых известны функции Ляпунова. Интегральные методы оценки качества в связи со вторым методом Ляпунова были рассмотрены также в работе А. М. Летова [16] и Ю. М. Плишкина [1].

В. М. Попов [6] для нелинейных систем с абсолютно устойчивым положением равновесия дал верхнюю оценку интегрального квадратичного критерия относительно его значения для систем, полученных заменой нелинейного звена линейным, исходя из рассмотрения нелинейного интегрального уравнения системы.

Третью группу методов оценки качества переходных процессов составляют методы, основанные на использовании метода гармонического баланса. Это направление развивалось в работах А. А. Воронова [2] и Е. П. Попова [13, 21, 26].

Весьма важное значение имеет исследование качества нелинейных систем при случайных воздействиях.

Задача исследования точности (качества) нелинейных динамических систем, находящихся под воздействием случайных внешних возмущений, может быть сформулирована как задача определения законов вероятностного распределения координат системы для любых моментов времени.

Одной из первых работ, посвященных исследованию нелинейных систем при случайных воздействиях, является работа А. А. Андропова, А. А. Витта и Л. С. Понтрягина [1], опубликованная в 1933 году. В этой работе была рассмотрена система (в общем случае нелинейная) описываемая системой дифференциальных уравнений первого порядка, находящаяся под воздействием случайных стационарных возмущений (белых шумов). В результате проведенного исследования получены статистические характеристики фазовых траекторий системы. В 1944 году В. С. Пугачевым [1] была рассмотрена задача поведения динамической системы, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений при учете

внешних воздействий, представляющих собой белые шумы. Для ее решения были применены методы, основанные на использовании характеристических функций и моментов.

В работах Б. Г. Доступова [1], Б. Г. Доступова и В. С. Пугачева [1] были получены результаты, основанные на разложении интегралов, характеризующих поведение нелинейной системы, в степенные или тригонометрические ряды по случайным параметрам, что позволяет приближенно исследовать нелинейные замкнутые системы. В работах Б. Г. Доступова [2, 3], А. Я. Андриенко [1], А. Я. Андриенко, Б. Н. Петрова и Ю. П. Портнова-Соколова [1] разработаны методы оценки точности нелинейных систем при случайных воздействиях, основанные на введении эквивалентных возмущений. В работах В. С. Пугачева [2], Б. Г. Доступова [1] и И. Е. Казакова [1, 2] при исследовании точности нелинейных систем использовался метод линеаризации, основанный на разложении интегралов в ряды Тейлора.

Из нелинейных задач в настоящее время достаточно детально рассмотрены лишь задачи преобразования случайных сигналов безынерционными нелинейными элементами и разомкнутыми динамическими цепями без обратных связей. Основные результаты таких исследований изложены в работах В. И. Бунимовича [1], И. С. Гоноровского [1], В. Б. Давенпорта и В. Л. Рута [1], П. И. Кузнецова, Р. Л. Стратоновича, В. И. Тихонова [1], М. Пелегрена [1], Н. А. Лившица и В. Н. Пугачева [1], С. Я. Раевского [1], Д. О. Райса [1] и В. И. Тихонова и И. Н. Амантова [1].

При исследовании замкнутых нелинейных динамических систем наибольшее распространение получили приближенные методы. К ним относится так называемый метод статистической линеаризации, предложенный в 1954 г. Р. Бутоном [1, 2] и И. Е. Казаковым [1, 2].

Этот метод основан на замене нелинейной замкнутой системы эквивалентной в статическом смысле линеаризованной системой (в рамках корреляционной теории).

Дальнейшее развитие метод статистической линеаризации получил в работах Е. П. Попова и И. П. Пальтова [1], А. А. Первозванского [1, 2], И. С. Моросанова [1], Д. Шена [1], Я. Савараги и Я. Сунахара [1], М. Д. Сомервила и Д. Д. Амертона [1], Г. В. Смита [1], А. К. Пупкова [1, 2], К. Чанга и Л. Ф. Казда [1] и многих других.

Наряду с методом статистической линеаризации, для исследования нелинейных систем был разработан метод эквивалентных возмущений (см. И. Е. Казаков и Б. Г. Доступов [1]), метод исследования нелинейных систем, приводимых к линейным (см. В. И. Демух [1], И. Е. Казаков [6]), а также метод, использующий функциональное представление Вольтерра нелинейных дифференциальных уравнений (см. Г. Л. Ван-Трисс [1]).

Методика, близкая к той, которая использовалась Г. Л. Ван-Триссом, была предложена в 1942 году Н. Винером и нашла развитие в работах Р. Деча [1], П. И. Кузнецова, Р. А. Стратоновича, В. И. Тихонова [1, 2], Ю. С. Попкова [1] и других.

Несмотря на существование косвенных методов оценки качества переходных процессов, всегда желательно определить кривую

переходного процесса, что позволяет получить исчерпывающую информацию о поведении конкретной системы при заданном внешнем воздействии, причем для достаточно сложных систем это удается сделать лишь на основе приближенных методов.

Основоположителем приближенных методов можно по праву считать русского академика Л. Эйлера, который разработал так называемый «метод касательных» для решения дифференциальных (интегральных) уравнений первого порядка. Этот метод был освещен и развит в работах Л. А. Бессонова [1], Р. С. Гутера и Б. В. Овчинского [1], Б. П. Демидовича и И. А. Марона [1], М. В. Костенко [1, 2], А. Н. Крылова [1, 2], Ш. Е. Микеладзе [1], И. П. Мысовских [1], М. П. Франка [1]. В дальнейшем специалисты в области вычислительной математики разработали и усовершенствовали ряд новых методов. Разработкой таких методов занимались наши выдающиеся ученые академики А. Н. Крылов, С. А. Чаплыгин и многие другие.

В последние годы в связи с развитием и внедрением во все отрасли промышленности систем автоматического управления и использованием для управления и научных расчетов цифровых вычислительных машин приближенные методы приобретают большую актуальность. Эти методы необходимы как основа для программирования цифровых вычислительных машин, для получения образцового решения при исследовании динамических систем на аналоговых вычислительных машинах, а также как основа для создания цифровых дифференциальных анализаторов. Как было показано в ряде работ и в том числе Б. Н. Наумовым [2, 4, 6], некоторые методы приближенного вычисления процессов могут с успехом использоваться для решения задач синтеза при выбранной структуре систем. В ряде случаев эти методы являются весьма быстрым и эффективным способом получения решений для нелинейных систем.

Разработанные к настоящему времени методы приближенного вычисления переходных процессов в нелинейных системах высокого порядка можно разделить на три основные группы:

1. Дискретные (разностные) методы (аналитические и графические).
2. Методы припасовывания (графические и аналитические).
3. Методы гармонического баланса или эквивалентной линеаризации.

Первую группу составляют приближенные методы, в основе которых лежит идея замены нелинейного дифференциального уравнения разностным, что, говоря на языке теории автоматического управления, соответствует замене непрерывной нелинейной системы соответствующей эквивалентной дискретной системой. Использование разностного уравнения в качестве рекуррентной формулы позволяет вычислять последующие значения переходного процесса по предыдущим в дискретных точках.

Процесс нахождения кривой переходного процесса (дискретных его значений) может быть как аналитическим, так и графическим. Поэтому и дискретные методы в свою очередь можно подразделить на аналитические и графические.

Дискретные методы начали развиваться математиками еще в прошлом столетии преимущественно как приближенные методы интегрирования дифференциальных (интегральных) уравнений первого порядка.

В вычислительной математике, которая в настоящее время в связи с развитием цифровых вычислительных машин сформировалась в важное самостоятельное научное направление, существует своя обширная литература, и здесь не ставится задачи дать ее обзор. Будут рассмотрены, в основном, методы, которые в той или иной мере применялись при исследовании систем автоматического управления. Поэтому анализ классических дискретных методов (методы Эйлера, Адамса, Рунга — Кутты, Чаплыгина и др.) здесь не рассматриваются; желающие ознакомиться с ними могут обратиться к соответствующей литературе по приближенным вычислениям.

Первые опубликованные в этой области дискретные методы А. А. Красовского и Г. С. Поспелова [1, 2], А. Мадведа [1], А. Тастина [3] можно назвать численным анализом при помощи метода преобразования числовых рядов. Несмотря на то, что авторы первоначально разработали эти методы применительно к линейным системам, они могут быть применены для приближенного вычисления переходных процессов и в нелинейных системах. Основная идея этой группы дискретных методов заключается в том, что каждая из переменных заменяется последовательностью чисел, каждое из которых определяет значение этой функции в дискретные равноотстоящие моменты времени при выбранном интервале дискретности. При достаточно малом интервале такая числовая последовательность достаточно точно описывает переменные. Затем вводятся различные операции над этими числовыми последовательностями. В результате применения таких операций можно получить разностное уравнение, позволяющее вычислить приближенные значения искомой переменной в дискретных точках.

В 1948 г. Я. З. Цыпкиным [3, 13, 14] и Я. З. Цыпкиным, Л. М. Гольденбергом [1] был предложен приближенный метод вычисления переходных процессов, основанный на получении эквивалентной дискретной системы, соответствующей исследуемой непрерывной системе. Несколько позже это направление было развито в работах И. А. Огурка [1, 2], Я. Б. Кадымова [1], Я. Б. Кадымова и Б. А. Лихстентартена [1, 2], А. А. Красовского и Г. С. Поспелова [1, 2], Б. Н. Наумова [2—5, 7—9], Н. И. Соколова [1, 2], С. С. Хухрикова [1]. Одним из недостатков большинства методов этой группы является необходимость при вычислении процессов в нелинейных системах решать нелинейные алгебраические уравнения, что приходится делать при вычислении каждого дискретного значения искомой переменной.

В работах Б. Н. Наумова [2, 3, 5] рассматривался приближенный метод вычисления переходных процессов в нелинейных системах, основанных на приближенном решении соответствующего нелинейного интегрального уравнения, не требующий решения нелинейных алгебраических уравнений. Позже Б. Н. Наумовым [1, 2, 7—9] и И. А. Огурком [1, 2] были предложены приближенные методы

вычисления переходных процессов в линейных системах с постоянными и переменными во времени параметрами и в нелинейных системах, основанные на приближенном решении нелинейного интегрального уравнения, приведенного к так называемой канонической форме. Приведенные в работах Б. Н. Наумова [7—9] таблицы степенных функций позволяют приближенно решать обыкновенные дифференциальные уравнения до седьмого порядка включительно, а также системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Таблицы степенных функций значительно сокращают время и повышают точность вычислений.

Одно время широкое распространение для построения процессов в линейных и нелинейных системах получил так называемый графо-аналитический «метод секущих» Д. А. Башкирова [1, 2], в основу которого положены разностные уравнения, заменяющие дифференциальные уравнения для типовых звеньев систем автоматического управления. В работах А. В. Башарина [1, 2] был опубликован графический метод построения переходных процессов, в основном применительно к системам автоматического управления электрических машин. Этот метод может быть также использован для решения некоторых задач синтеза.

Методы припасовывания составляют вторую группу приближенных методов вычисления переходных процессов в нелинейных системах, применение которых целесообразно лишь в тех случаях, когда нелинейные характеристики аппроксимируются отрезками прямых и число их невелико.

Поведение систем с кусочно-линейными характеристиками описывается совокупностью линейных дифференциальных (интегральных) уравнений. Переходный процесс на отдельных участках представляет решения этих линейных дифференциальных уравнений, причем конечные значения предыдущего участка являются начальными значениями для последующего. Однако определение переходных процессов в таких системах, описываемых дифференциальными уравнениями высокого порядка с использованием метода припасовывания, требуют громоздких вычислений, связанных с нахождением решений на отдельных участках, а также с вычислением конечных (начальных) значений и определением по этим значениям произвольных постоянных.

В работах Б. М. Кагана [1] и А. Г. Иосифьяна и Б. М. Кагана [1] был изложен способ вычисления процессов на отдельных участках, в основу которого был положен метод трапециoidalных частотных характеристик вычисления переходных процессов в линейных системах, изложенный в работе В. В. Солодовникова [1]. Описанный метод применялся Б. М. Каганом [1] для вычисления процессов в следящих приводах. Однако из-за большой трудоемкости этот метод не нашел широкого распространения.

В тех случаях, когда нелинейная характеристика имеет релейный характер, т. е. когда на линейную часть системы действует серия импульсов постоянной высоты, переменной длительности и чередующейся полярности, целесообразно использовать метод построения переходных процессов, изложенный Д. А. Каном [1] и Я. З. Цыпкиным [8].

Третью группу составляют приближенные методы, основанные на методе гармонического баланса.

Применение метода гармонического баланса для приближенного построения переходных процессов в нелинейных системах было дано Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым [2], а затем развито применительно к системам произвольного порядка в работах П. Е. Гренстеда [1], и Е. П. Попова [8, 9, 27], Е. П. Попова и Е. И. Хлыпало [1], С. М. Федорова [1], Е. И. Хлыпало [1].

Эти методы целесообразно использовать в тех случаях, когда ожидается, что переходный процесс имеет колебательный характер.

В заключение отметим, что наибольшее распространение получили дискретные методы приближенного вычисления переходных процессов в нелинейных системах, многие из которых нашли широкое применение при программировании цифровых вычислительных машин, а также при вычислении переходных процессов на клавишных вычислительных машинах.

1. Основные теоремы преобразования Лапласа

1. Теорема линейности

$$\mathcal{L}\{af(t)\} = aF(p),$$

где $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ — изображение по Лапласу для функции $f(t)$.

2. Теорема о дифференцировании в вещественной области

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = pF(p) - f_0,$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} = p^2F(p) - pf_0 - \dot{f}_0,$$

$$\dots$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right\} = p^n F(p) - p^{n-1}f_0 - p^{n-2}\dot{f}_0 - \dots - f_0,$$

где $f_0, \dot{f}_0, \dots, f_0^{(n-1)}$ — начальное значение функции $f(t)$ и ее $n-1$ производной.

3. Теорема об интегрировании в вещественной области

$$\mathcal{L}\left\{\int f(t) dt\right\} = \mathcal{L}\{f^{-1}(t)\} = \frac{F(p)}{p} - \frac{f_0}{p},$$

где f_0 — начальное значение функции $f(t)$.

4. Теорема об изменении масштаба

$$\mathcal{L}\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = aF(ap),$$

где $a = \text{const} > 0$, либо переменная величина, не зависящая от t и p .

5. Теорема об умножении в комплексной области (теорема свертывания)

$$F_1(p) F_2(p) = \int_0^t f_1(t-\lambda) f_2(\lambda) d\lambda,$$

где $F_1(p) = \mathcal{L}\{f_1(t)\}$, $F_2(p) = \mathcal{L}\{f_2(t)\}$.

6. Теорема о смещении в вещественной области

$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = e^{-p\tau} F(p),$$

где τ — неотрицательное вещественное число.

7. Теорема о конечном значении

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p).$$

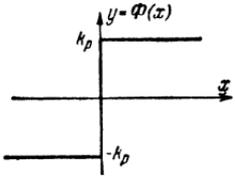
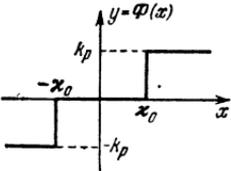
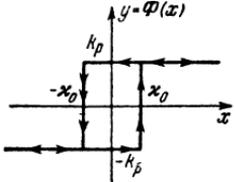
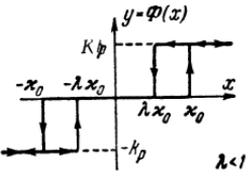
8. Теорема о начальном значении

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p).$$

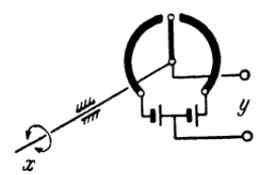
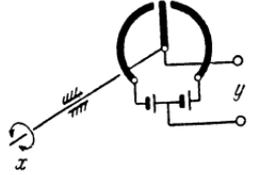
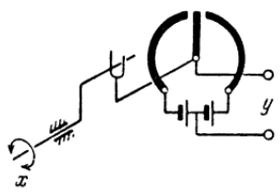
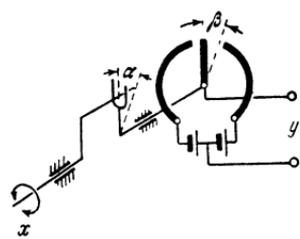
2. Таблица оригиналов и соответствующих им изображений по Лапласу

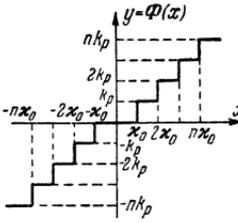
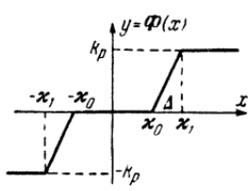
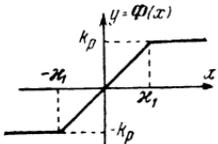
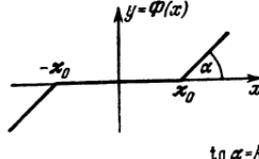
№ п/п	Оригинал	Изображение по Лапласу
1	$\delta(t)$ — дельта-функция	1
2	$1(t)$ — единичная скачкообразная функция	$\frac{1}{p}$
3	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p + \alpha}$
4	$\frac{1}{\beta} \sin \beta t$	$\frac{1}{p^2 + \beta^2}$
5	$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$
6	$\frac{1}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$
7	t	$\frac{1}{p^2}$
8	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ n — целое положительное число	$\frac{1}{p^n}$
9	$1(t - \tau)$	$\frac{1}{p} e^{-p\tau}$

3. Таблица типовых нелинейных характеристик и соответ

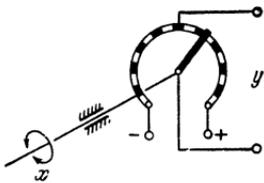
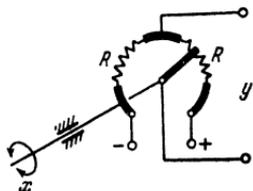
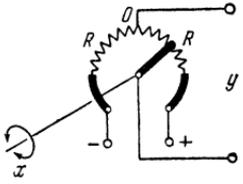
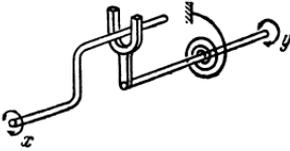
№ п/п	Название нелинейной характеристики	Графическое изображение нелинейной характеристики
1	Идеальная релейная ха- рактеристика	
2	Релейная характеристика с зоной нечувствитель- ности	
3	Релейная характеристика с гистерезисом	
4	Релейная характеристика с гистерезисом и зо- ной нечувствительности	

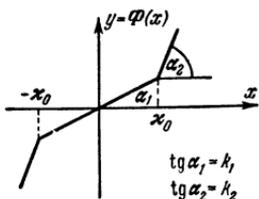
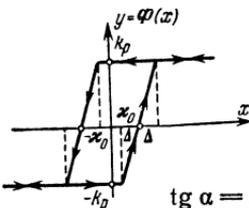
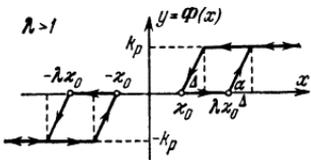
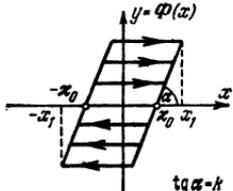
ствующих им моделей

Аналитическое описание	Модель, эквивалентная нелинейной характеристике
<p style="text-align: center;">Релейные характеристики</p> $y = \Phi(x) = \begin{cases} k_p & \text{при } x > 0 \\ -k_p & \text{при } x < 0 \end{cases}$	
$y = \Phi(x) = \begin{cases} k_p & \text{при } x \geq \kappa_0 \\ 0 & \text{при } -\kappa_0 < x < \kappa_0 \\ -k_p & \text{при } x \leq -\kappa_0 \end{cases}$	
$y = \Phi(x, \dot{x}) = \begin{cases} k_p & \text{при } x \geq \kappa_0 \\ -k_p & \text{при } x < \kappa_0 \end{cases} \dot{x} > 0 \\ \begin{cases} k_p & \text{при } x > -\kappa_0 \\ -k_p & \text{при } x \leq -\kappa_0 \end{cases} \dot{x} < 0$	
$y = \Phi(x, \dot{x}) = \begin{cases} k_p & \text{при } x \geq \lambda \kappa_0 \\ 0 & \text{при } \lambda \kappa_0 \leq x < \kappa_0 \\ -k_p & \text{при } x < -\lambda \kappa_0 \end{cases} \dot{x} > 0 \\ \begin{cases} k_p & \text{при } x > \lambda \kappa_0 \\ 0 & \text{при } -\kappa_0 < x \leq -\lambda \kappa_0 \\ -k_p & \text{при } x \leq -\kappa_0 \end{cases} \dot{x} < 0$	

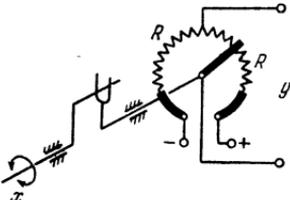
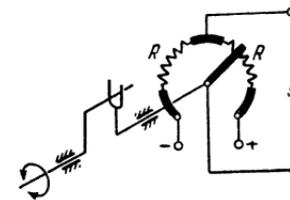
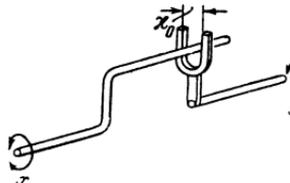
№ п/п	Название нелинейной характеристики	Графическое изображение нелинейной характеристики
5	Релейная многопозиционная характеристика	
6	Релейная характеристика с зоной нечувствительности и насыщением	<p data-bbox="642 590 922 622">Произвольные кусочно-</p> 
7	Релейная характеристика с насыщением	
8	Релейная характеристика с зоной нечувствительности	

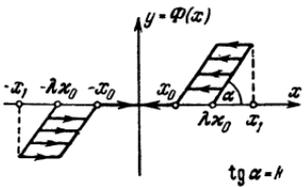
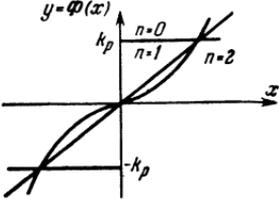
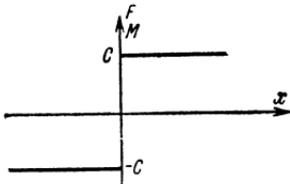
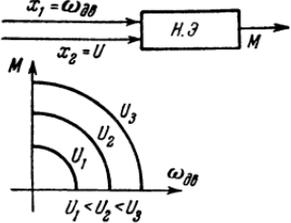
Продолжение

Аналитическое описание	Модель, эквивалентная нелинейной характеристике
$y = \Phi(x) = \begin{cases} \Pi k_p & \text{при } \Pi x_0 < x < (\Pi + 1) x_0 \\ -\Pi k_p & \text{при } -(\Pi + 1) x_0 < x < -\Pi x_0 \\ 0 & \text{при } -x_0 < x < x_0 \end{cases}$	
<p>линейные характеристики</p> $y = \Phi(x) = \begin{cases} -k_p & \text{при } x \leq -x_1 \\ -\frac{k_p}{\Delta} x & \text{при } -x_1 \leq x \leq -x_0 \\ 0 & \text{при } -x_0 \geq x \geq x_0 \\ \frac{k_p}{\Delta} x & \text{при } x_0 \leq x \leq x_1 \\ k_p & \text{при } x \geq x_1 \end{cases}$	
$y = \Phi(x) = \begin{cases} k_p & \text{при } x \geq x_1 \\ \frac{k_p}{x_1} x & \text{при } -x_1 \leq x \leq x_1 \\ -k_p & \text{при } x < -x_1 \end{cases}$	
$y = \Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -x_0 \leq x \leq x_0 \\ kx & \text{при } x \geq x_0 \\ & x \leq -x_0 \end{cases}$	

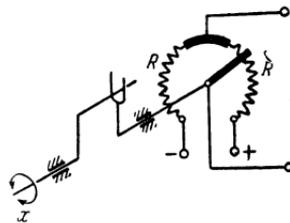
№ п/п	Название нелинейной характеристики	Графическое изображение нелинейной характеристики
9	Нелинейная характеристика с переменным коэффициентом усиления	 <p style="text-align: center;"> $\text{tg } \alpha_1 = k_1$ $\text{tg } \alpha_2 = k_2$ </p>
10	Нелинейная характеристика с насыщением и гистерезисом	 <p style="text-align: center;"> $\text{tg } \alpha = k = \frac{k_p}{\Delta}$ </p>
11	Нелинейная характеристика с зоной нечувствительности, насыщением и гистерезисом	 <p style="text-align: center;"> $\text{tg } \alpha = k = \frac{k_p}{\Delta}$ </p>
12	Нелинейная характеристика типа люфт	 <p style="text-align: center;"> $\text{tg } \alpha = k$ </p>

Продолжение

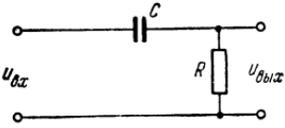
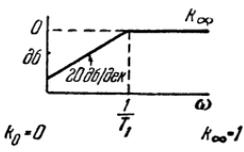
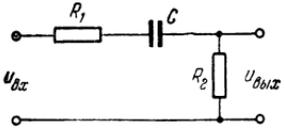
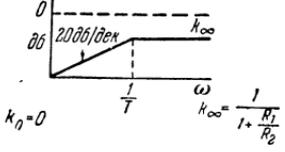
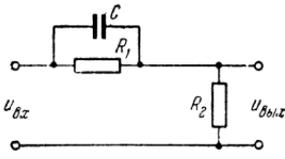
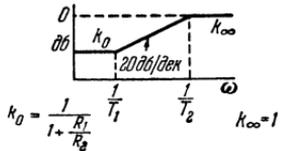
Аналитическое описание	Модель, эквивалентная нелинейной характеристике
$y = \Phi(x) = \begin{cases} k_1 x & \text{при } -x_0 \leq x \leq x_0 \\ k_2 x & \text{при } x > x_0 \end{cases}$	
$y = \Phi(x) = \begin{cases} \left. \begin{aligned} -k_p & \text{ при } x \leq x_0 - \Delta \\ k(x - x_0) & \text{ при } x_0 - \Delta \leq x \leq x_0 + \Delta \\ k_p & \text{ при } x \geq x_0 + \Delta \end{aligned} \right\} \dot{x} > 0 \\ \left. \begin{aligned} k_p & \text{ при } x \geq -x_0 + \Delta \\ k(x + x_0) & \text{ при } x_0 - \Delta \leq x \leq -x_0 + \Delta \\ -k_p & \text{ при } x \leq -x_0 - \Delta \end{aligned} \right\} \dot{x} < 0 \end{cases}$	
$y = \Phi(x) = \begin{cases} \left. \begin{aligned} -k_p & \text{ при } x \leq -x_0 - \Delta \\ k(x + x_0) & \text{ при } -x_0 - \Delta \leq x \leq -x_0 \\ 0 & \text{ при } -x_0 \leq x \leq \lambda x_0 \\ k(x - \lambda x_0) & \text{ при } \lambda x_0 \leq x \leq \lambda x_0 + \Delta \\ k_p & \text{ при } x \geq \lambda x_0 + \Delta \end{aligned} \right\} \dot{x} > 0 \\ \left. \begin{aligned} k_p & \text{ при } x \geq x_0 + \Delta \\ k(x - x_0) & \text{ при } x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta \\ 0 & \text{ при } -\lambda x_0 \leq x \leq x_0 \\ k(x + \lambda x_0) & \text{ при } -\lambda x_0 - \Delta \leq x \leq -\lambda x_0 \\ -k_p & \text{ при } x \leq -\lambda x_0 - \Delta \end{aligned} \right\} \dot{x} < 0 \end{cases}$	
$y = \Phi(x) = \begin{cases} kx - x_0 & \text{при } \dot{x} > 0, \dot{y} > 0 \\ kx + x_0 & \text{при } \dot{x} < 0, \dot{y} < 0 \\ -k(x_1 - x_0) & \text{при } \dot{x} > 0, \dot{y} = 0 \\ k(x_1 - x_0) & \text{при } \dot{x} < 0, \dot{y} = 0 \end{cases}$	

№ п/п	Название нелинейной характеристики	Графическое изображение нелинейной характеристики
13	Нелинейная характеристика типа люфт с зоной нечувствительности	
14	Степенные нелинейные характеристики	
15	Нелинейная характеристика типа сухое трение	
16	Механическая характеристика двухфазного асинхронного двигателя	

Продолжение

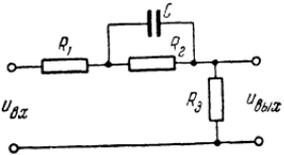
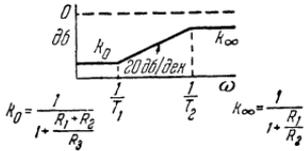
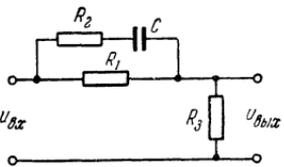
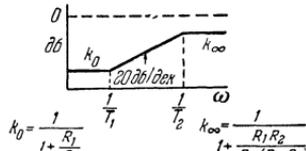
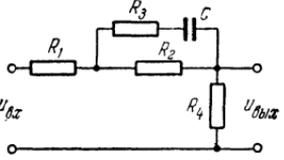
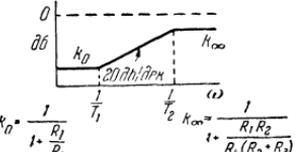
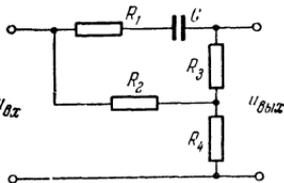
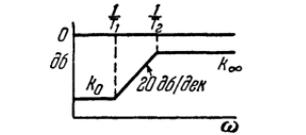
Аналитическое описание	Модель, эквивалентная нелинейной характеристике
$y = \Phi(x) = \begin{cases} -k(x_1 - \lambda \kappa_0) & \dot{y} = 0, \\ 0 \text{ при } -\kappa_0 \leq x \leq \lambda \kappa_0 & \dot{x} > 0 \\ k(x_1 - \lambda \kappa_0) & \dot{y} = 0, \\ 0 \text{ при } -\lambda \kappa_0 \leq x \leq \kappa_0 & \dot{x} < 0 \\ kx + \kappa_0 \text{ при } x < x_0 & \dot{x} > 0 \\ kx - \lambda x_0 \text{ при } x > \lambda \kappa_0 & \dot{x} > 0 \\ kx + \lambda \kappa_0 \text{ при } x < -\lambda \kappa_0 & \dot{x} < 0 \\ kx - \kappa_0 \text{ при } x > \kappa_0 & \dot{x} < 0 \end{cases}$	
$y = \Phi(x) = \begin{cases} k_p x^n \text{ при } n \text{ целом четном} \\ k_p x^n \text{ sign } x \text{ при } n \text{ целом} \\ \text{нечетном} \end{cases}$	
<p>Характеристика сухого трения</p> $y = \Phi(\dot{x}) = \begin{cases} +C \text{ при } \dot{x} > 0 \\ -C \text{ при } \dot{x} < 0 \end{cases}$ <p>при $\dot{x} = 0$ $y = \Phi(\dot{x})$ может принимать любое значение, т. е. $-C < y < C$</p>	
<p>Многопараметрическая характеристика</p> $M(\omega_{дв}, U) = \frac{C_1}{1 + C_3 \omega_{дв} } U - (C_2 + C_4 \omega_{дв}) \omega_{дв}$ <p>где C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные, выбираемые на основе обработки экспериментальных характеристик двигателя</p>	

4. Асимптотические логарифмические частотные характеристики передаточные функции корректирующих устройств

Цель	Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика
	
	
	

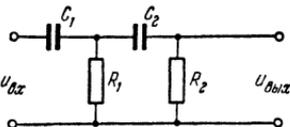
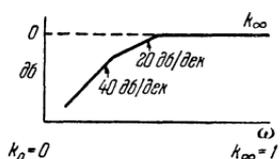
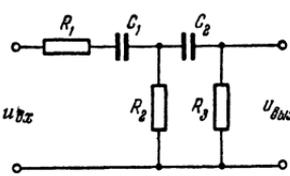
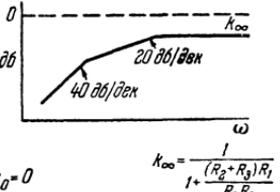
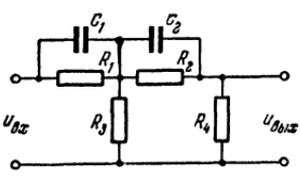
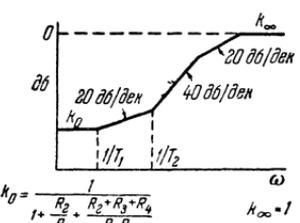
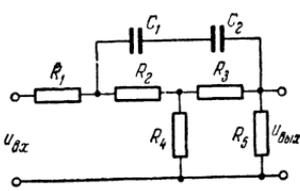
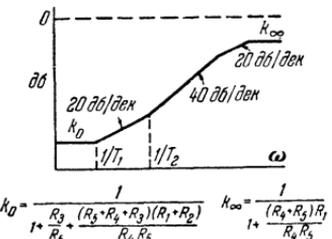
ристики и соответствующие

<p>Передаточная функция</p>	<p>T_1, T_2, T_3</p>
<p>$\frac{T_1 p}{T_1 p + 1}$</p>	<p>$T_1 = RC$</p>
<p>$\frac{T_2 p}{T_1 p + 1}$</p>	<p>$T_1 = (R_2 + R_1) C, \quad T_2 = RC$</p>
<p>$k_0 \frac{(T_1 p + 1)}{(T_2 p + 1)}$</p>	<p>$T_1 = RC, \quad T_2 = \frac{R_2}{R_2 + R_1} T_1$</p>

Цепь	Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика
	 $k_0 = \frac{1}{1 + \frac{R_1 + R_2}{R_3}} \quad k_\infty = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}}$
	 $k_0 = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \quad k_\infty = \frac{1}{1 + \frac{R_1 R_2}{R_4 (R_2 + R_3)}}$
	 $k_0 = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \quad k_\infty = \frac{1}{1 + \frac{R_1 R_2}{R_4 (R_2 + R_3)}}$
	 $k_0 = \frac{R_4}{R_4 + R_2} \quad k_\infty = \frac{R_4 (R_1 + R_2 + R_3) R_2 R_3}{(R_2 + R_4) (R_1 + R_3) R_2 R_4}$

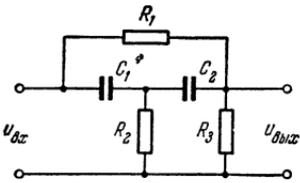
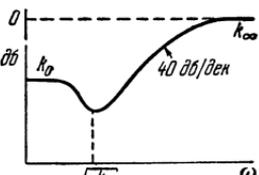
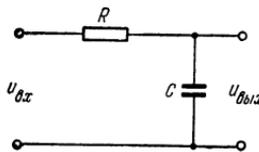
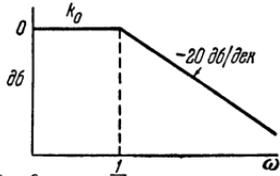
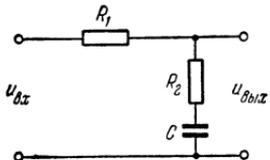
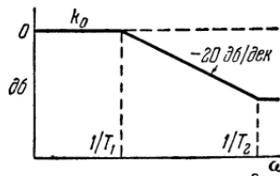
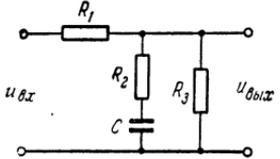
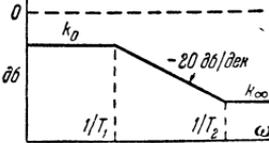
Продолжение

Передаточная функция	T_1, T_2, T_3
$k_0 \frac{(T_1 p + 1)}{(T_2 p + 1)}$	$T_1 = R_2 C, \quad T_2 = \left[\frac{R_3 + R_1}{R_3 + R_2 + R_1} \right] T_1$
$k_0 \frac{(T_1 p + 1)}{(T_2 p + 1)}$	$T_1 = (R_1 + R_2) C, \quad T_2 = \left[\frac{R_3 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{R_3 + R_1} \right] T_1$
$k_0 \frac{(T_1 p + 1)}{(T_2 p + 1)}$	$T_1 = (R_3 + R_2) C, \quad T_2 = \left[\frac{R_4 + R_1 + \frac{R_3 R_2}{R_3 + R_2}}{R_1 + R_2 + R_4} \right] T_1$
$k_0 \frac{(T_1 p + 1)}{(T_2 p + 1)}$	$T_1 = \left[(R_1 + R_2 + R_3) + \frac{R_2 R_3}{R_4} \right] C, \quad T_2 = \left[R_1 + R_3 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} \right] C$

Цепь	Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика
	
	
	
	

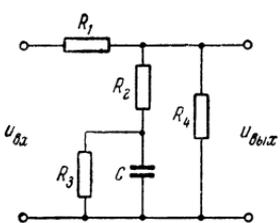
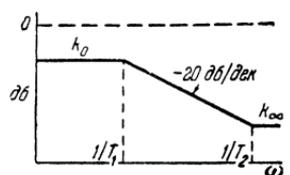
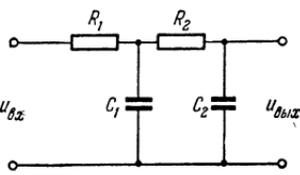
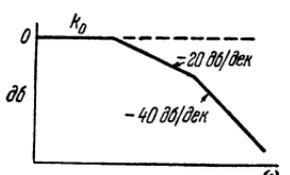
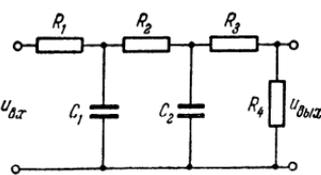
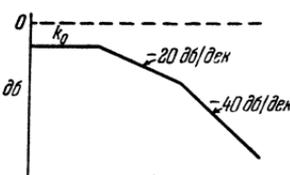
Продолжение

Передаточная функция	T_1, T_2, T_3
$\frac{T_1 T_2 p^2}{T_1 T_2 p^2 + \left[T_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + T_2 \right] p + 1}$	$T_1 = R_2 C_2, \\ T_2 = R_1 C_1$
$\frac{T_1 T_2 p^2}{T_1 T_2 p^2 \left[1 + \frac{(R_2 + R_3) R_1}{R_2 R_3} \right] + \left[T_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_3} \right) + T_2 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \right] p + 1}$	$T_1 = R_3 C_2, \\ T_2 = R_2 C_1$
$\frac{(T_1 p + 1) (T_2 p + 1)}{T_1 T_2 p^2 + \left\{ T_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) + T \left[1 + \frac{(R_2 + R_4) R_1}{R_2 R_4} \right] \right\} p + \frac{1}{k_0}}$	$T_1 = R_1 C_1, \\ T_2 = R_2 C_2 = \\ = \frac{R_2 C_2}{R_1 C_4} T_1$
$(T_1 p + 1) (T_2 p + 1) \left\{ T_1 T_2 \left[1 + \frac{(R_4 + R_5) R_1}{R_4 R_5} \right] p^2 + \right. \\ \left. + \left\{ T_1 \left[1 + \frac{R_3}{R_5} + \frac{(R_3 + R_4 + R_5) R_1}{R_4 R_5} \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + T_2 \left[1 + \frac{(R_4 + R_5) (R_1 + R_2)}{R_4 R_5} \right] \right\} p + \frac{1}{k_0} \right\}^{-1}$	$T_1 = R_2 C_1, \\ T_2 = R_3 C_2 = \\ = \frac{R_3 C_2}{R_2 C_3} T_1$

Цепь	Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика
	 <p style="text-align: center;"> $k_0 = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_3}} \sqrt{\frac{R_0}{T_1 T_2}}$ $k_{\infty} = 1$ </p>
	 <p style="text-align: center;"> $k_0 = 0$ $k_{\infty} = 0$ </p>
	 <p style="text-align: center;"> $k_0 = 1$ $k_{\infty} = \frac{R_1}{1 + \frac{R_1}{R_2}}$ </p>
	 <p style="text-align: center;"> $k_0 = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_3}}$ $k_{\infty} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_1}{R_3}}$ </p>

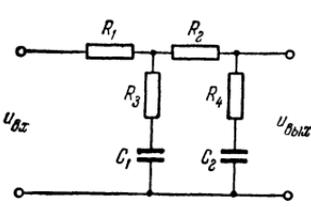
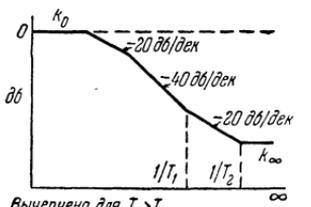
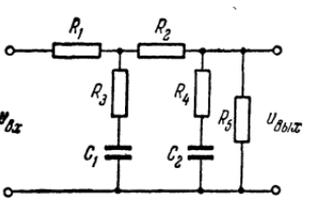
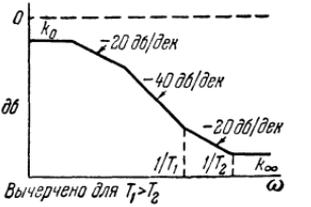
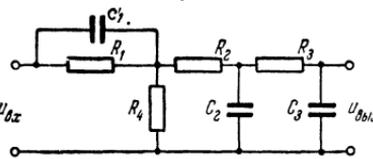
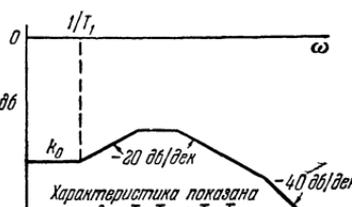
Продолжение

Передаточная функция	T_1, T_2, T_3
$\frac{T_1 T_2 p^2 + \left[T_1 \frac{R_2}{R_1} + T_2 \left(\frac{R_3}{R_3 + R_1} \right) \right] p + k_0}{T_1 T_2 p^2 + \left[T_1 + T_2 \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right) \right] p + 1}$	$T_1 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} C_2,$ $T_2 = R_2 C_1$
$\frac{1}{T_1 p + 1}$	$T_1 = RC,$ $T_2 = 0$
$\frac{T_2 p + 1}{T_1 p + 1}$	$T_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_2} T_2,$ $T_2 = R_2 C$
$k_0 \frac{(T_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)}$	$T_1 =$ $= \left[1 + \frac{R_1 R_3}{R_2 (R_1 + R_3)} \right] T_2,$ $T_2 = R_2 C$

Цепь	Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика
	 $k_0 = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2 + R_3} + \frac{R_1}{R_4}}$ $k_{\infty} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_4}}$
	 $k_0 = 1$ $k_{\infty} = 0$
	 $k_0 = \frac{R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$ $k_{\infty} = 0$

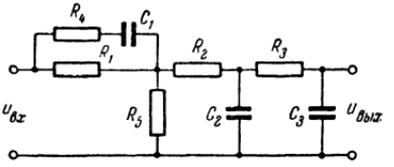
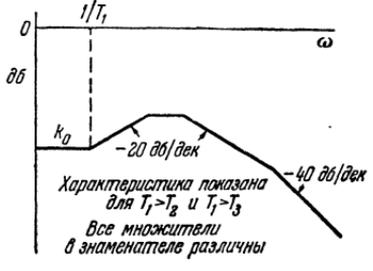
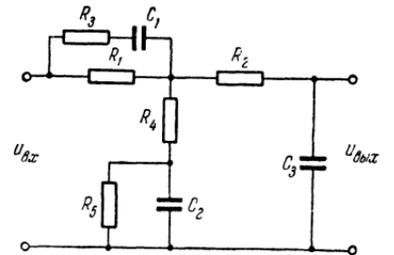
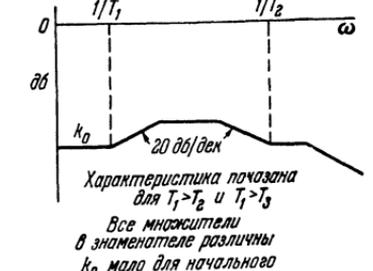
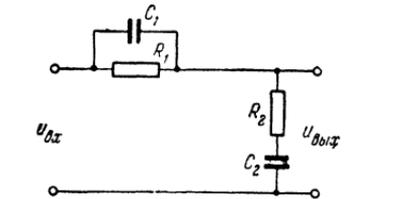
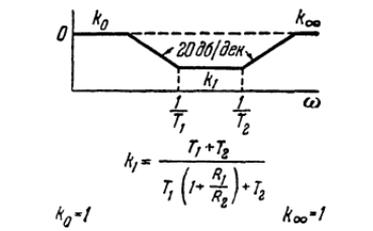
Продолжение

Передаточная функция	T_1, T_2, T_3
$k_0 \frac{(T_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)}$	$T_1 = \left[\frac{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_4}}{1 + \frac{R_1}{R_2 + R_3} + \frac{R_1}{R_4}} \right],$ $T_2 = \left(\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \right) C$
$\frac{1}{T_1 T_2 p^2 + \left[T_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + T_2 \right] p + 1}$	$T_1 = R_2 C_2,$ $T_2 = R_1 C_1$
$\frac{1}{T_1 T_2 p^2 + \left[T_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + T_2 \left(\frac{R_2 + R_3 + R_4}{R_4} \right) \right] p + \frac{1}{k_0}}$	$T_1 = \frac{R_3 + R_4}{R_4} R_2 C_2,$ $T_2 = R_1 C_1$

Цепь	Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика
	 <p>Вычерчено для $T_1 > T_2$</p> $K_0 = 1 \quad K_\infty = \frac{1}{\left(1 + \frac{R_1}{R_3}\right)\left(1 + \frac{R_2}{R_4}\right) + \frac{R_1}{R_4}}$
	 <p>Вычерчено для $T_1 > T_2$</p> $K_0 = \frac{R_5}{R_1 + R_2 + R_3} \quad K_\infty = \frac{\frac{R_5}{R_2 + R_3}}{\left[1 + \frac{R_2 R_5}{R_4 (R_2 + R_3)}\right] \left[1 + \frac{R_1}{R_3}\right] + \frac{R_1 (R_5 + R_2)}{R_4 (R_2 + R_3)}}$
	 <p>Характеристика показана для $T_1 > T_2$ и $T_1 > T_3$ Все множители в знаменателе различны</p> $K_0 = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_4}} \quad K_\infty = 0$

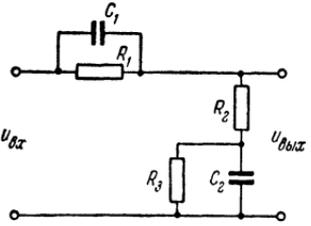
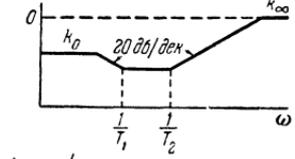
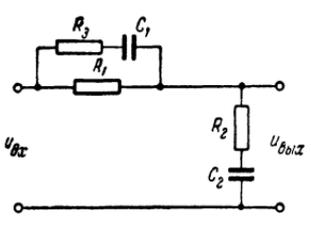
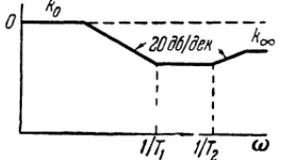
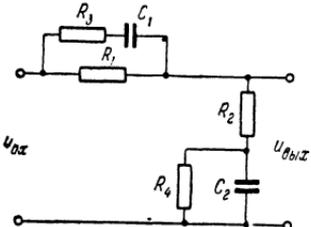
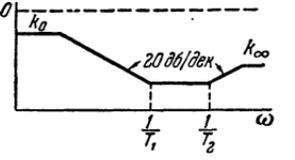
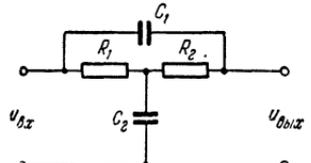
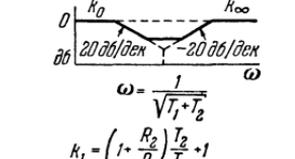
Продолжение

Передаточная функция	T_1, T_2, T_3
$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) \left\{ T_1 T_2 \left[\left(1 + \frac{R_1}{R_3} \right) \left(1 + \frac{R_2}{R_4} \right) + \frac{R_1}{R_4} \right] p^2 + \right. \\ \left. + \left[T_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_4} + \frac{R_2}{R_4} \right) + T_2 \left(1 + \frac{R_1}{R_3} \right) p + 1 \right] \right\}^{-1}$	$T_1 = R_4 C_2, \\ T_2 = R_3 C_1$
$\frac{R_5}{R_2 + R_5} (T_1 p + 1)(T_2 p + 1) \times \\ \times \left\{ T_1 T_2 \left[1 + \frac{R_2 R_5}{R_4 (R_2 + R_5)} \right] \left[1 + \frac{R_1}{R_3} \right] + \right. \\ \left. + \frac{R_1 (R_4 + R_5)}{R_4 (R_2 + R_5)} \right\} p^2 + \left\{ T_1 \left[1 + \frac{R_2 R_5}{R_4 (R_2 + R_5)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{R_1 (R_4 + R_5)}{R_4 (R_2 + R_5)} \right] + T_2 \left(1 + \frac{R_1}{R_3} + \frac{R_1}{R_2 + R_5} \right) \right\} p + \frac{R_5}{k_0 (R_2 + R_5)} \left. \right\}^{-1}$	$T_1 = R_4 C_2, \\ T_2 = R_3 C_1$
$(T p_1 + 1) \left\{ T_1 T_2 T_3 p^3 + \left\{ T_1 T_2 \left(1 + \frac{C_3}{C_2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + T_1 T_3 + T_2 T_3 \left[1 + \frac{R_1}{R_4} \left(1 + \frac{R_4}{R_2} \right) \right] \right\} p^2 + \right. \\ \left. + \left\{ T_1 + T_2 \left(1 + \frac{C_3}{C_2} \right) \left[1 + \frac{R_1}{R_1} \left(1 + \frac{R_4}{R_2} \right) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + T_3 \left(1 + \frac{R_1}{R_1} \right) \right\} p + \frac{1}{k_0} \right\}^{-1}$	$T_1 = R_1 C_1 \\ T_2 = R_2 C_2 \\ T_3 = R_3 C_3$

Цепь	Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика
	 <p>Характеристика показана для $T_1 > T_2$ и $T_1 > T_3$ Все множители в знаменателе различны</p> $k_0 = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_5}} \quad k_{\infty} = 0$
	 <p>Характеристика показана для $T_1 > T_2$ и $T_1 > T_3$ Все множители в знаменателе различны k_0 мало для начального отвергающего зрелого эффекта</p> $K_0 = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_4 + R_3}} \quad k_{\infty} = 0$
	 $k_1 = \frac{T_1 + T_2}{T_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + T_2}$ $k_0 = 1 \quad k_{\infty} = 1$

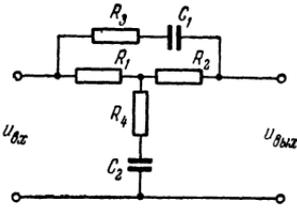
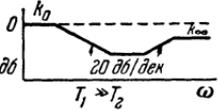
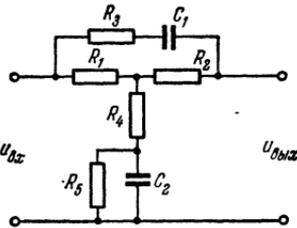
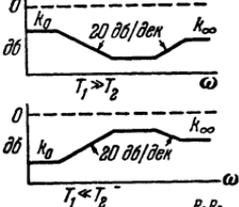
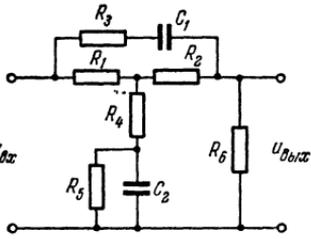
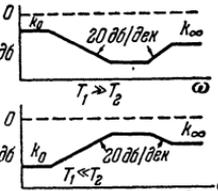
Продолжение

Передаточная функция	T_1, T_2, T_3
$(T_1 p + 1) \left\{ T_1 T_2 T_3 \left[1 + \frac{R_1 R_1}{R_5 (R_1 + R_4)} \right] p^3 + \right. \\ + \left\{ T_1 T_2 \left(1 + \frac{C_3}{C_2} \right) \left[1 + \frac{R_1 R_4}{R_5 (R_1 + R_1)} \left(1 + \frac{R_5}{R_2} \right) \right] + \right. \\ + T_1 T_3 \left[1 + \frac{R_1 R_4}{R_5 (R_1 + R_4)} \right] + T_2 T_3 \left[1 + \frac{R_1}{R_5} \left(1 + \frac{R_5}{R_2} \right) \right] \left. \right\} p^2 + \\ + \left\{ T_1 \left[1 + \frac{R_1 R_1}{R_5 (R_1 + R_4)} \right] + T_2 \left(1 + \frac{C_3}{C_2} \right) \left[1 + \frac{R_1}{R_5} \left(1 + \frac{R_5}{R_2} \right) \right] + \right. \\ \left. + T_3 \left(1 + \frac{R_1}{R_5} \right) \right\} p + \frac{1}{k_0} \left. \right\}^{-1}$	$T_1 = (R_1 + R_4) C_1 \\ T_2 = R_2 C_2 \\ T_3 = R_3 C_3$
$(T_1 p + 1) (T_2 p + 1) \left\{ T_1 T_2 T_3 \left[1 + \left(\frac{R_3 R_1}{R_3 + R_1} \right) \left(\frac{R_2 + R_1}{R_2 R_1} \right) \right] p^3 + \right. \\ + \left\{ T_1 T_2 \left[1 + \frac{R_3 R_1}{R_1 (R_3 + R_1)} \right] + \right. \\ + T_1 T_3 \left[1 + \left(\frac{R_3 R_1}{R_3 + R_1} \right) \frac{(R_2 + R_1 + R_5)}{(R_1 + R_5) R_2} \right] + \\ + T_1 T_3 \left[1 + \frac{(R_2 + R_1) R_1}{R_2 R_4} \right] \left. \right\} p^2 + \left\{ T_1 \left[1 + \frac{R_1 R_3}{(R_1 + R_5) (R_3 + R_1)} \right] + \right. \\ \left. + T_2 \left(1 + \frac{R_1}{R_1} \right) + T_3 \left[1 + \frac{(R_2 + R_4 + R_5) R_1}{(R_4 + R_5) R_2} \right] \right\} p + \frac{1}{k_0} \left. \right\}^{-1}$	$T_1 = (R_1 + R_3) C_1 \\ T_2 = \frac{R_4 R_5}{R_1 + R_5} C_2 \\ T_3 = R_2 C_3$
$\frac{(T_1 p + 1) (T_2 p + 1)}{T_1 T_2 p^2 + \left[T_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + T_2 \right] p + \frac{1}{k_0}}$	$T_1 = R_2 C_2, \\ T_2 = R_1 C_1$

Цель	Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика
	 $k_0 = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2 + R_3}} \quad k_\infty = 1$
	 $k_0 = 1 \quad k_\infty = \frac{1}{1 + \frac{R_1 R_2}{R_2 (R_1 + R_3)}}$
	 $k_0 = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2 + R_3}} \quad k_\infty = \frac{1}{1 + \frac{R_1 R_2}{R_2 (R_1 + R_3)}}$
	 $\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 + T_2}}$ $k_1 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{T_2}{T_1} - 1$ $k_0 = 1 \quad k_\infty = 1$

Продолжение

Передаточная функция	T_1, T_2, T_3
$\frac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{T_1 T_2 p^2 + \left[T_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + T_2 \right] p + \frac{1}{k_0}}$	$T_1 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} C_2,$ $T_2 = R_1 C_1$
$\frac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{T_1 T_2 \left[1 + \frac{R_1 R_3}{R_2 (R_1 + R_3)} \right] p^2 + \left[T_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + T_2 \right] p + 1}$	$T_1 = R_2 C_2, T_2 =$ $= (R_1 + R_3) C_1$
$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) \times$ $\times \left\{ T_1 T_2 \left[1 + \frac{R_1 R_3}{R_2 (R_1 + R_3)} \right] p^2 + \left\{ T_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + \right.$ $\left. + T_2 \left[1 + \frac{R_1 R_3}{(R_2 + R_4)(R_1 + R_3)} \right] \right\} p + \frac{1}{k_0} \right\}^{-1}$	$T_1 =$ $= \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} C_2,$ $T_2 = (R_1 + R_3) C_1$
$\frac{T_1 T_2 p^2 + T_2 p + 1}{T_1 T_2 p^2 + \left[T_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + T_2 \right] p + 1}$	$T_1 =$ $= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C_1,$ $T_2 = (R_1 + R_2) C_1$

Цепь	Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика
	 $k_0 = 1 \quad k_\infty = \frac{1 + \frac{R_1 R_2}{R_4 (R_1 + R_2 + R_3)}}{1 + \frac{R_1 (R_2 + R_3)}{R_4 (R_1 + R_2 + R_3)}}$
	 $k_0 = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_4 + R_5}} \quad k_\infty = \frac{1 + \frac{R_1 R_2}{R_4 (R_1 + R_2 + R_3)}}{1 + \frac{R_4 (R_2 + R_3)}{R_4 (R_1 + R_2 + R_3)}}$
 $k_0 = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_4 + R_5} + \frac{1}{R_6} \left(R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_4 + R_5} \right)}$	 <p>Характеристики даны для весьма больших значений R_6</p> $k_\infty = \frac{1 + \frac{R_1 R_2}{R_4 (R_1 + R_2 + R_3)}}{1 + \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_4 (R_1 + R_2 + R_3)} + \frac{1}{R_6} \left(R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_4} \right)}$

Продолжение

Передаточная функция	T_1, T_2, T_3
$\frac{T_1 T_2 \left[1 + \frac{R_1 R_2}{R_4 (R_1 + R_2 + R_3)} \right] p^2 + (T_1 + T_2) p + 1}{T_1 T_2 \left[1 + \frac{R_1 (R_2 + R_3)}{R_4 (R_1 + R_2 + R_3)} \right] p^2 + \left[T_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_4} \right) + T_2 \right] p + 1}$	$T_1 = R_4 C_1,$ $T_2 = (R_1 + R_2 + R_3) C_1$
$\left\{ T_1 T_2 \left[1 + \frac{R_1 R_2}{R_4 (R_1 + R_2 + R_3)} \right] p^2 + \left\{ T_1 + T_2 \left[1 + \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_5) (R_1 + R_2 + R_3)} \right] \right\} p + 1 \right\} \times$ $\times \left\{ T_1 T_2 \left[1 + \frac{R_1 (R_2 + R_3)}{R_4 (R_1 + R_2 + R_3)} \right] p^2 + \left\{ T_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_1} \right) + T_2 \left[1 + \frac{R_1 (R_2 + R_3)}{(R_1 + R_5) (R_1 + R_2 + R_3)} \right] \right\} p + \frac{1}{k_0} \right\}^{-1}$	$T_1 = \frac{R_4 R_5}{R_1 + R_5} C_2,$ $T_2 = (R_1 + R_2 + R_3) C_1$
$\left\{ T_1 T_2 \left[1 + \frac{R_1 R_2}{R_4 (R_1 + R_2 + R_3)} \right] p^2 + T_1 T_2 \left[1 + \frac{R_1 R_2}{(R_4 + R_5) (R_1 + R_2 + R_3)} \right] p + 1 \right\} \times$ $\times \left\{ T_1 T_2 \left[1 + \frac{R_1 (R_2 + R_3)}{R_4 (R_1 + R_2 + R_3)} + \frac{1}{R_6} \left(\frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \right) \times \right. \right.$ $\times \left. \left(R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_1} \right) \right] p^2 + \left\{ T_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_4} \right) + \frac{T_1}{R_6} \left(R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_1} \right) + T_2 \left[1 + \frac{R_1 (R_2 + R_3)}{(R_4 + R_5) (R_1 + R_2 + R_3)} \right] + \right.$ $\left. \left. + \frac{T_2}{R_6} \left(\frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \right) \left(R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_4 + R_5} \right) \right\} p + \frac{1}{k_0} \right\}^{-1}$	$T_1 = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} C_2,$ $T_2 = (R_1 + R_2 + R_3) C_1$

5. Формулы, позволяющие вычислять интегральные

квадратичные оценки $J_{20} = \int_0^{\infty} h_{\text{отк}}^2(t) dt$

через коэффициенты изображения по Лапласу

$$\mathcal{L}\{h_{\text{отк}}(t)\} = \frac{B_0 p^{n-1} + B_1 p^{n-2} + \dots + B_{n-1}}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}.$$

$n = 1$

$$J_{20} = \frac{B_0^2}{2a_0 a_1};$$

$n = 2$

$$J_{20} = \frac{B_0^2 a_2 + B_1^2 a_0}{2a_0 a_1 a_2};$$

$n = 3$

$$J_{20} = \frac{B_0^2 a_3 a_2 + (B_1^2 - 2B_1 B_0) a_3 a_0 + B_2^2 a_1 a_0}{2a_3 a_0 (-a_3 a_0 + a_2 a_1)};$$

$n = 4$

$$J_{20} = \frac{B_0^2 (-a_4^2 a_1 + a_4 a_3 a_2) + (B_1^2 - 2B_2 B_0) a_4 a_3 a_0}{2a_4 a_0 (-a_4 a_1^2 - a_3^2 a_0 + a_3 a_2 a_1)} +$$

$$+ \frac{(B_2^2 + 2B_3 B_1) a_4 a_1 a_0 + B_3^2 (-a_3 a_0^2 a_0 + a_2 a_1 a_0)}{2a_4 a_0 (-a_4 a_1^2 - a_3^2 a_0 + a_3 a_2 a_1)};$$

$n = 5$

$$J_{20} = \frac{1}{2\Delta_5} [B_0^2 m_0 + (B_1^2 - 2B_2 B_0) m_1 + (B_2^2 - 2B_3 B_1 + 2B_4 B_0) m_2 +$$

$$+ (B_3^2 - 2B_4 B_2) m_3 + B_4^2 m_4],$$

где

$$m_0 = \frac{1}{a_0} (a_2 m_1 - a_4 m_2),$$

$$m_1 = -a_5 a_2 + a_4 a_3,$$

$$m_2 = -a_5 a_0 + a_4 a_1,$$

$$m_3 = \frac{1}{a_5} (a_3 m_2 - a_1 m_1),$$

$$m_4 = \frac{1}{a_5} (a_3 m_3 - a_1 m_2).$$

$$\Delta_5 = a_5 (a_4 m_4 - a_2 m_3 + a_0 m_2).$$

6. Таблица чисел k и их значений $20 \lg k$ в децибелах

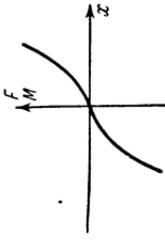
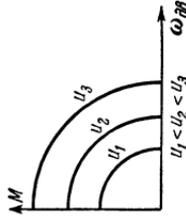
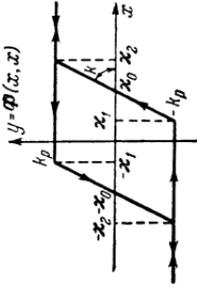
δb	k	δb	k	δb	k	δb	k	δb	k	δb	k
0	1,0000	2,5	1,334	6,0	1,995	9,5	2,985	13,0	4,467	16,5	6,683
0,005	1,0006	2,6	1,349	6,1	2,018	9,6	3,020	13,1	4,519	16,6	6,761
0,01	1,0012	2,7	1,365	6,2	2,042	9,7	3,055	13,2	4,571	16,7	6,839
0,02	1,0023	2,8	1,380	6,3	2,065	9,8	3,090	13,3	4,624	16,8	6,918
0,03	1,0035	2,9	1,396	6,4	2,089	9,9	3,126	13,4	4,677	16,9	6,998
0,04	1,0046										
		3,0	1,413	6,5	2,113	10,0	3,162	13,5	4,732	17,0	7,079
0,05	1,0058	3,1	1,429	6,6	2,138	10,1	3,199	13,6	4,786	17,1	7,161
0,06	1,0069	3,2	1,445	6,7	2,163	10,2	3,236	13,7	4,842	17,2	7,244
0,07	1,0081	3,3	1,462	6,8	2,188	10,3	3,273	13,8	4,898	17,3	7,328
0,08	1,0093	3,4	1,479	6,9	2,213	10,4	3,311	13,9	4,955	17,4	7,413
0,09	1,0104										
		3,5	1,496	7,0	2,239	10,5	3,350	14,0	5,012	17,5	7,499
0,1	1,012	3,6	1,514	7,1	2,265	10,6	3,388	14,1	5,070	17,6	7,586
0,2	1,023	3,7	1,531	7,2	2,291	10,7	3,428	14,2	5,129	17,7	7,674
0,3	1,035	3,8	1,549	7,3	2,317	10,8	3,467	14,3	5,188	17,8	7,762
0,4	1,047	3,9	1,567	7,4	2,344	10,9	3,508	14,4	5,248	17,9	7,852
0,5	1,059										
		4,0	1,585	7,5	2,371	11,0	3,548	14,5	5,309	18,0	7,943
0,6	1,072	4,1	1,603	7,6	2,399	11,1	3,589	14,6	5,370	18,1	8,035
0,7	1,084	4,2	1,622	7,7	2,427	11,2	3,631	14,7	5,433	18,2	8,128
0,8	1,096	4,3	1,641	7,8	2,455	11,3	3,673	14,8	5,495	18,3	8,222
0,9	1,109	4,4	1,660	7,9	2,483	11,4	3,715	14,9	5,559	18,4	8,318
1,0	1,122										
		4,5	1,679	8,0	2,512	11,5	3,758	15,0	5,623	18,5	8,414
1,1	1,135	4,6	1,698	8,1	2,541	11,6	3,802	15,1	5,689	18,6	8,511
1,2	1,148	4,7	1,718	8,2	2,570	11,7	3,846	15,2	5,754	18,7	8,610
1,3	1,161	4,8	1,738	8,3	2,600	11,8	3,890	15,3	5,821	18,8	8,710
1,4	1,175	4,9	1,758	8,4	2,630	11,9	3,936	15,4	5,888	18,9	8,811
1,5	1,189										
		5,0	1,778	8,5	2,661	12,0	3,981	15,5	5,957	19,0	8,913
1,6	1,202	5,1	1,799	8,6	2,692	12,1	4,027	15,6	6,026	19,1	9,016
1,7	1,216	5,2	1,820	8,7	2,723	12,2	4,074	15,7	6,095	19,2	9,120
1,8	1,230	5,3	1,841	8,8	2,754	12,3	4,121	15,8	6,166	19,3	9,226
1,9	1,245	5,4	1,862	8,9	2,786	12,4	4,169	15,9	6,237	19,4	9,333
2,0	1,259										
2,1	1,274	5,5	1,884	9,0	2,818	12,5	4,217	16,0	6,310	19,5	9,441
2,2	1,288	5,6	1,905	9,1	2,851	12,6	4,266	16,1	6,383	19,6	9,550
2,3	1,303	5,7	1,928	9,2	2,884	12,7	4,315	16,2	6,457	19,7	9,661
2,4	1,318	5,8	1,950	9,3	2,917	12,8	4,365	16,3	6,531	19,8	9,772
		5,9	1,972	9,4	2,951	12,9	4,416	16,4	6,607	19,9	9,886
										20,0	10,000

7. Выражения эквивалентных комплексных коэффициентов усиления для типовых нелинейных характеристик

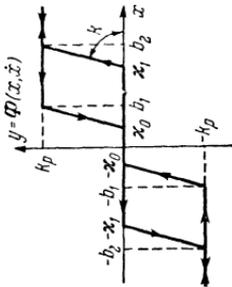
Название типового нелинейного элемента	Графическое изображение нелинейного элемента	Эквивалентные комплексные коэффициенты усиления для нелинейных элементов $J_{н.э}$ $(A) = B_1(A) + jC_1(A)$
Идеальная релейная характеристика		$B_1(A) = \frac{4k_p}{\pi A},$ $C_1(A) = 0$
Релейная характеристика с зоной нечувствительности		$B_1(A) = \frac{4k_p}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{A^2}},$ $C_1(A) = 0 \quad \text{при } A \geq x_0$
Релейная характеристика с гистерезисом		$B_1(A) = \frac{4k_p}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{A^2}},$ $C_1(A) = -\frac{4K_p x_0}{\pi A^2} \quad \text{при } A \geq x_0$

<p>Релейная характеристика с гистерезисом и зоной нечувствительности</p>		$B_1(A) = \frac{2k_p}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{\lambda^2 x_0^2}{A^2}} \right),$ $C_1(A) = \frac{2k_p x_0}{\pi A^2} (1 - \lambda) \quad \text{при } A \geq x_0.$
<p>Характеристика типа упор</p>		
<p>Степенные характеристики</p>		<p>при n нечетном,</p> $B_1(A) = \frac{3 \cdot 5 \dots n}{4 \cdot 6 \dots (n+1)} k_p A^{n-1}$ <p>при n четном,</p> $B_1(A) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot 4 \dots n}{3 \cdot 5 \dots (n+1)} k_p A^{n-1}$ $C_1(A) = 0$
<p>Сухое трение</p>		<p>относительно \dot{x} относительно x</p> $B_1(A_p) = \frac{4C}{\pi A_p} \quad B_1(A) = 0, \quad \text{где } A_p = A\Omega,$ $C_1(A_p) = 0 \quad C_1(A) = \frac{4C}{\pi A} \quad x = A \sin \Omega t$

Продолжение

Название типового нелинейного элемента	Графическое изображение нелинейного элемента	Эквивалентные комплексные коэффициенты усиления для нелинейных элементов $I_{н, \Omega}(A) = B_1(A) + jC_1(A)$
Квадратичное сухое трение		$B_1(A_p) = \frac{8CA_p}{3\pi} = 0,85CA_p, \quad \text{где } A_p = A\Omega,$ $C_1(A_p) = 0$ $x = A \sin \Omega t$
Многопараметрическая характеристика		<p>Здесь три нелинейные функции</p> $F_1 = x \frac{dx}{dt}; \quad F_2 = x x; \quad F_3 = x^3, \quad \text{где } x = \Omega \sin \omega t.$ <p>Гармоническая линеаризация дает:</p> $F_1 \approx \frac{4A}{3\pi} \frac{dx}{dt}; \quad F_2 \approx \frac{8A}{3\pi} x; \quad F_3 = \frac{3A^2}{4\pi} x;$ $C_1(A) = \frac{4A}{3\pi} \Omega; \quad C_2(A) = \frac{8A}{3\pi}; \quad C_3(A) = \frac{3A^2}{4\pi}$
Характеристика с насыщением и гистерезисной петлей		$B_1(A) = \frac{k}{\pi} \left(\arcsin \frac{k_p + kx_0}{kA} + \arcsin \frac{k_p - kx_0}{kA} + \frac{k_p + kx_0}{kA} \sqrt{1 - \frac{(k_p - kx_0)^2}{k^2 A^2}} \right) + \frac{k_p + kx_0}{kA} \sqrt{1 - \frac{(k_p + kx_0)^2}{k^2 A^2}} + \frac{k_p - kx_0}{kA} \sqrt{1 - \frac{(k_p - kx_0)^2}{k^2 A^2}} \right),$ $C_1(A) = -\frac{4k_p x_0}{\pi A^2} \quad \text{при } A \geq \frac{k_p + kx_0}{k}$

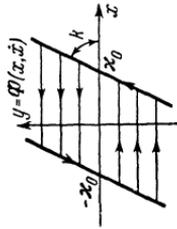
Характеристика с зоной нечувствительности, насыщением и гистерезисной петлей



$$B_1(A) = \frac{k}{\pi} \left[\arcsin \frac{k_p + kx_1}{kA} + \arcsin \frac{k_p + kx_0}{kA} - \arcsin \frac{x_1}{A} - \arcsin \frac{x_0}{A} \right] - \arcsin \frac{x_0}{A} + \frac{k_p + kx_1}{kA} \sqrt{1 - \frac{(k_p + kx_1)^2}{k^2 A^2}} + \frac{k_p + kx_0}{kA} \sqrt{1 - \frac{(k_p + kx_0)^2}{k^2 A^2}} - \frac{x_1}{A} \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{A^2}} - \frac{x_0}{A} \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{A^2}}, \text{ где } \lambda = \frac{x_0}{x_1}.$$

$$C_1(A) = -\frac{2x_1 k_p (1 - \lambda)}{\pi A^2} \text{ при } A \geq \frac{k_p + kx_1}{k}$$

Характеристика типа люфт

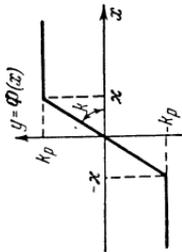


$$B_1(A) = \frac{k}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2x_0}{A} \right) + \right. \\ \left. + 2 \left(1 - \frac{2x_0}{A} \right) \sqrt{\frac{x_0}{A} \left(1 - \frac{x_0}{A} \right)} \right],$$

$$C_1(A) = -\frac{4kx_0}{\pi A} \left(1 - \frac{x_0}{A} \right) \text{ при } A \geq x_0$$

Продолжение

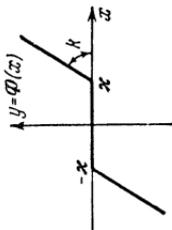
Название типового нелинейного элемента	Графическое изображение нелинейного элемента	Эквивалентные комплексные коэффициенты усиления для нелинейных элементов $J_{н, \varphi}(A) = B_1(A) + jC_1(A)$
Характеристика с зоной нечувствительности и гистерезисными петлями без насыщения		$B_1(A) = \frac{k}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} + \arcsin \sin \left[1 - \frac{x_1(1-\lambda)}{A} \right] - \arcsin \frac{x_1}{A} - \right.$ $\left. - \arcsin \frac{x_0}{A} + \left[1 - \frac{x_1(1-\lambda)}{A} \right] \sqrt{1 - \left[\frac{x_1(1-\lambda)}{A} \right]^2} - \right.$ $\left. - \frac{x_1}{A} \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{A^2}} - \frac{x_0}{A} \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{A^2}} \right\},$ $C_1(A) = -\frac{2kx_1}{\pi A} \left(1 - \frac{x_1}{A} \right) (1 - \lambda), \quad \text{при } A \geq x_1; \quad \lambda = \frac{x_0}{x_1}$
Релейная многопозиционная характеристика		$B_1(A) = \frac{4k_p}{\pi A} \sum_{v=0}^n \sqrt{1 - \frac{x_{0n}^2}{A^2}}$ $\text{при } x_{0n} \leq A \leq x_0(n+1),$ $C_1(A) = 0$
Характеристика с зоной нечувствительности и насыщением		$B_1(A) = \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{x_1}{A} - \arcsin \frac{x_0}{A} + \right.$ $\left. + \frac{x_1}{A} \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{A^2}} - \frac{x_0}{A} \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{A^2}} \right),$ $C_1(A) = 0 \quad \text{при } A \geq x_1$



Характеристика с насыщением

$$B_1(A) = \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{x}{A} + \frac{x}{A} \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \right),$$

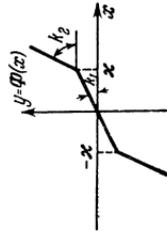
$$C_1(A) = 0 \quad \text{при } A \geq x$$



Характеристика с зоной нечувствительности

$$B_1(A) = k - \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{x}{A} + \frac{x}{A} \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \right),$$

$$C_1(A) = 0 \quad \text{при } A \geq x$$

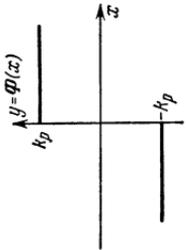
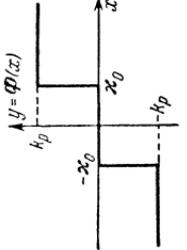


Характеристика с переменным коэффициентом усиления

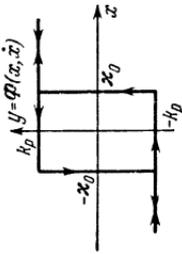
$$B_1(A) = k_2 - \frac{2}{\pi} (k_2 - k_1) \left(\arcsin \frac{x}{A} + \frac{x}{A} \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \right),$$

$$C_1(A) = 0 \quad \text{при } A \geq x$$

8. Выражения и графики статистических коэффициентов усиления для типовых нелинейных характеристик

Название типового нелинейного элемента	Графическое изображение нелинейного элемента	Коэффициенты статистической линеаризации нелинейных элементов $k_0 = \frac{m_y}{m_x}$, $k_1 = \pm \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$
Идеальная релейная характеристика		$k_0 = \frac{k_p}{m_x} 2\Phi_k\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right), \text{ где } \Phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$ $k_1 = \frac{k_p}{\sigma_x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right)^2} \text{ — функция Крампса}$
Релейная характеристика с зоной нечувствительности		$k_0 = \frac{k_p}{m_x} \left[\Phi_k\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right) - \Phi_k\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right) \right], \text{ где } m_1 = \frac{m_x}{x_0}, \sigma_1 = \frac{\sigma_x}{x_0},$ $k_1 = \frac{k_p}{\sigma_x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right)^2} - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right)^2} \right]$

Релейная характеристика с гистерезисом



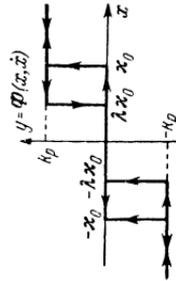
$$k_0 = \frac{2k_p}{m_x} \left[\mu_1 \Phi_k \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right) - \mu_2 \Phi_k \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right) \right],$$

$$k_1 = \frac{k_p}{\sigma_x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\mu_1 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right)^2} + \mu_2 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right)^2} \right],$$

$$\mu_1 = 1 - \mu_2 = \frac{\frac{1}{2} - \Phi_k \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right)}{1 - \Phi_k \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right) - \Phi_k \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right)},$$

где $m_1 = \frac{m_x}{x_0}$, $\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{x_0}$

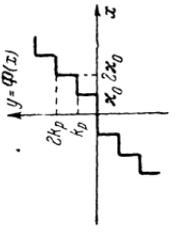
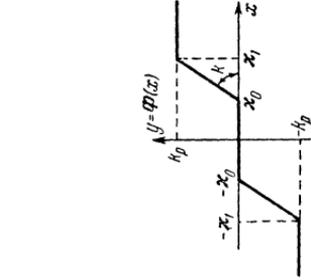
Релейная характеристика с гистерезисом и зоной нечувствительности



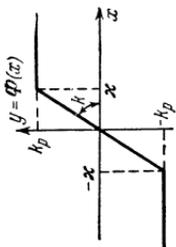
$$k_0 = \frac{k_p}{m_x} \frac{1}{2} \left[\Phi_k \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right) - \Phi_k \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right) + \Phi_k \left(\frac{\lambda+m_1}{\sigma_1} \right) - \Phi_k \left(\frac{\lambda-m_1}{\sigma_1} \right) \right],$$

$$k_1 = \frac{k_p}{\sigma_x} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right)^2} + e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right)^2} - e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda+m_1}{\sigma_1} \right)^2} - e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda-m_1}{\sigma_1} \right)^2} \right],$$

где $m_1 = \frac{m_x}{x_0}$, $\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{x_0}$

Название типового нелинейного элемента	Графическое изображение нелинейного элемента	Коэффициенты статистической линеаризации нелинейных элементов $k_0 = \frac{m_y}{m_x} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$, $k_1 = \pm \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$
Релейная многопозиционная характеристика		
Характеристика с зоной нечувствительности и насыщением		$k_0 = \frac{k_p}{m_x} \frac{1}{1-\nu} \left\{ (1+m_1) \Phi_k \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right) - (1-m_1) \Phi_k \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right) - (m_1+\nu) \Phi_k \left(\frac{m_1+\nu}{\sigma_1} \right) + (m_1-\nu) \Phi_k \left(\frac{m_1-\nu}{\sigma_1} \right) + \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right)^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right)^2 - e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{m_1+\nu}{\sigma_1} \right)^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{m_1-\nu}{\sigma_1} \right)^2 \right] \right\},$ $k_1 = \frac{k_p}{\sigma_x} \frac{\sigma_1}{1-\nu} \Phi_k \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right) + \Phi_k \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right) - \Phi_k \left(\frac{m_1+\nu}{\sigma_1} \right) + \Phi_k \left(\frac{m_1-\nu}{\sigma_1} \right),$ <p>где $m_1 = \frac{m_x}{x_1}$, $\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{x_1}$, $\nu = \frac{x_0}{x_0}$</p>

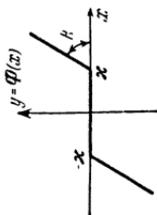
Характеристика
с насыще-
нием



$$k_0 = \frac{k_p}{m_x} \left\{ (1 + m_1) \Phi_k \left(\frac{1 + m_1}{\sigma_1} \right) - (1 - m_1) \Phi_k \left(\frac{1 - m_1}{\sigma_1} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right)^2} - e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right)^2} \right] \right\},$$

$$k_1 = \frac{k_p}{\sigma_x} \sigma_1 \left[\Phi_k \left(\frac{1 + m_1}{\sigma_1} \right) + \Phi_k \left(\frac{1 - m_1}{\sigma_1} \right) \right], \text{ где } m_1 = \frac{m_x}{x}, \sigma_1 = \frac{\sigma_x}{x}$$

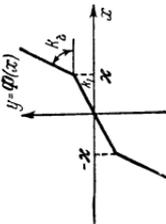
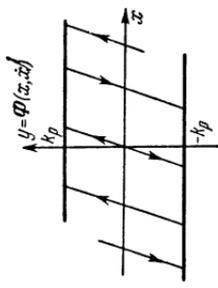
Характеристика
с зоной не-
чувствитель-
ности



$$k_0 = k \left\{ 1 - \frac{1}{m_1} \left[(1 + m_1) \Phi_k \left(\frac{1 + m_1}{\sigma_1} \right) - (1 - m_1) \Phi_k \left(\frac{1 - m_1}{\sigma_1} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\sigma_1}{m_1 \sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right)^2} - e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right)^2} \right] \right\},$$

$$k_1 = k \left[1 - \Phi_k \left(\frac{1 + m_1}{\sigma_1} \right) - \Phi_k \left(\frac{1 - m_1}{\sigma_1} \right) \right], \text{ где } m_1 = \frac{m_x}{x}, \sigma_1 = \frac{\sigma_x}{x}$$

Продолжение

Название типового нелинейного элемента	Графическое изображение нелинейного элемента	Коэффициенты статистической линеаризации нелинейных элементов
Характеристика с переменным коэффициентом усиления		$k_0 = k_1 \frac{\sigma_1}{m_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right)^2} - e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right)^2} \right] +$ $+ k_2 \frac{\sigma_1}{m_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right)^2} - e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right)^2} \right] -$ $- \frac{1}{m_1} \left[(k_1 - k_2) (1 - m_1) \Phi_k \left(\frac{1 - m_1}{\sigma_1} \right) - \right.$ $\left. - (k_1 - k_2) (1 + m_1) \Phi_k \left(\frac{1 + m_1}{\sigma_1} \right) \right] + k_2,$ $k_1 = \left(\frac{k_1 - k_2}{\alpha} \right) \Phi_k \left(\frac{1 + m_1}{\sigma_1} \right) + \left(\frac{k_1 - k_2}{\alpha} - k_2 \right) \Phi_k \left(\frac{1 - m_1}{\sigma_1} \right) + k_2,$ <p>где $m_1 = \frac{m_x}{\alpha}$, $\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{\alpha}$</p>
Характеристика типа упор		

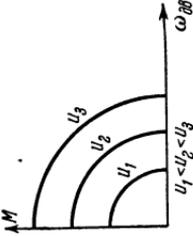
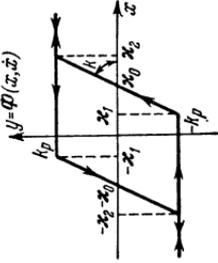
	$k_0 = k_p \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k m_x^{k-1} \mu_{2n+1-k}, \text{ где } y = x^{2n+1} (n = 0, 1, 2, \dots),$ $k_1 = \frac{k_p}{\sigma_x^2} \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k m_x^k \mu_{2n+2-k}, \mu_{2\nu} = (2\nu - 1)!! \sigma^{2\nu}$ $\mu_{2\nu+1} = 0, \nu = 0, 1, 2, \dots$
	$k_0 = 2C\sigma_z \left[\left(\frac{m_z}{\sigma_z} + 1 \right) \Phi_k \left(\frac{m_z}{\sigma_z} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{m_z}{\sigma_z} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{m_z}{\sigma_z} \right)^2} \right],$ $k_1 = 4C\sigma_z \left[\frac{m_z}{\sigma_z} \Phi_k \left(\frac{m_z}{\sigma_z} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{m_z}{\sigma_z} \right)^2} \right], \text{ где } z = x$

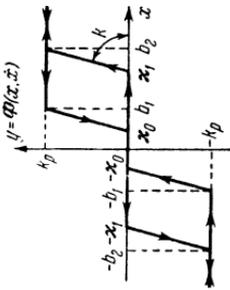
Степенная ха-
рактеристика

Сухое трение

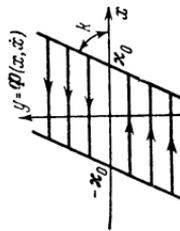
Квадратичное
сухое трение

Продолжение

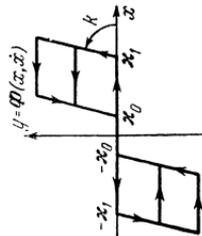
Название типового нелинейного элемента	Графическое изображение нелинейного элемента	Коэффициенты статистической линеаризации нелинейных элементов $k_0 = \frac{m_y}{m_x}$, $k_1 = \pm \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$
Многопараметрическая характеристика		
Характеристика с насыщением и гистерезисной петлей		$k_0 = \frac{k_p}{m_x} \frac{1}{1-\nu} \left\{ (1+m_1) \Phi \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right) - (1-m_1) \Phi \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right) - (m_1+\nu) \Phi \left(\frac{m_1+\nu}{\sigma_1} \right) + (m_1-\nu) \Phi \left(\frac{m_1-\nu}{\sigma_1} \right) + \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right)^2} - e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right)^2} - e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{m_1+\nu}{\sigma_1} \right)^2} + e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{m_1-\nu}{\sigma_1} \right)^2} \right] \right\},$ $k_1 = \frac{k_p}{\sigma_x} \frac{\sigma_1}{1-\nu} \left[\Phi \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right) + \Phi \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right) - \Phi \left(\frac{m_1+\nu}{\sigma_1} \right) - \Phi \left(\frac{m_1-\nu}{\sigma_1} \right) \right], \text{ где } \nu = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}, m_1 = \frac{m_x}{\kappa_2}, \sigma_1 = \frac{\sigma_x}{\kappa_2}.$



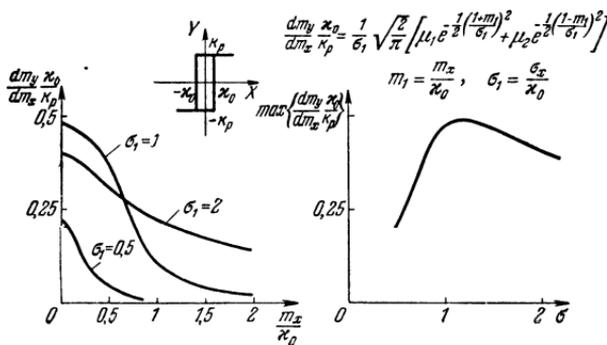
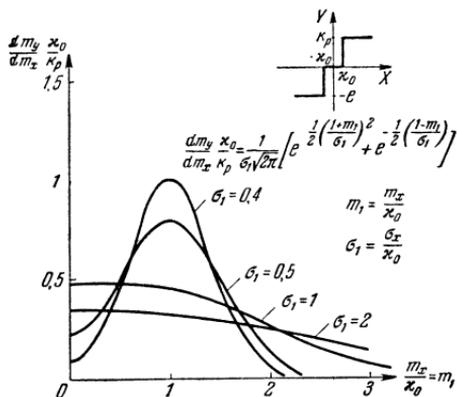
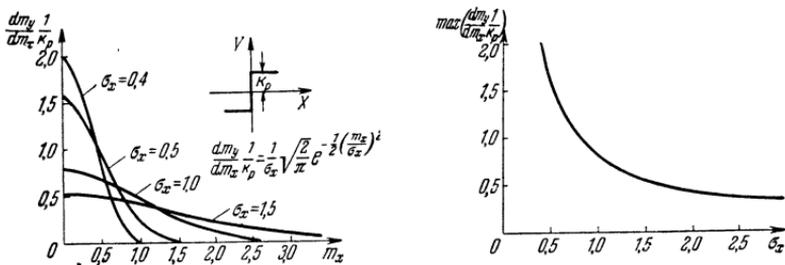
Характеристика с зоной нечувствительности, насыщением и гистерезисной петлей

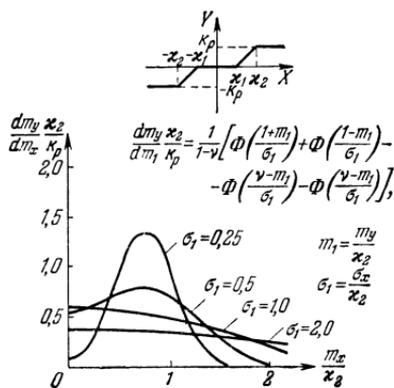
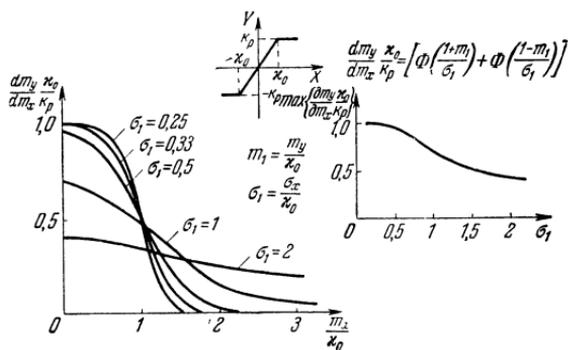


Характеристика типа люфт



Характеристика с зоной нечувствительности и гистерезисными петлями без насыщения

9. Графики зависимостей m_y (m_x, σ_x)



10. Значения функции Крампа $\Phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi_k(x)$	x	$\Phi_k(x)$	x	$\Phi_k(x)$	x	$\Phi_k(x)$
0,00	0,0000	0,25	0,0987	0,50	0,1915	0,75	0,2734
0,01	0,0040	0,26	0,1026	0,51	0,1950	0,76	0,2764
0,02	0,0080	0,27	0,1064	0,52	0,1985	0,77	0,2794
0,03	0,0120	0,28	0,1103	0,53	0,2019	0,78	0,2823
0,04	0,0160	0,29	0,1141	0,54	0,2054	0,79	0,2852
0,05	0,0199	0,30	0,1179	0,55	0,2088	0,80	0,2881
0,06	0,0239	0,31	0,1217	0,56	0,2123	0,81	0,2910
0,07	0,0279	0,32	0,1255	0,57	0,2157	0,82	0,2939
0,08	0,0319	0,33	0,1293	0,58	0,2190	0,83	0,2967
0,09	0,0359	0,34	0,1361	0,59	0,2224	0,84	0,2995
0,10	0,0398	0,35	0,1368	0,60	0,2257	0,85	0,3023
0,11	0,0438	0,36	0,1406	0,61	0,2291	0,86	0,3051
0,12	0,0478	0,37	0,1443	0,62	0,2324	0,87	0,3078
0,13	0,0517	0,38	0,1480	0,63	0,2357	0,88	0,3106
0,14	0,0557	0,39	0,1517	0,64	0,2380	0,89	0,3133
0,15	0,0596	0,40	0,1554	0,65	0,2422	0,90	0,3159
0,16	0,0636	0,41	0,1591	0,66	0,2454	0,91	0,3186
0,17	0,0675	0,42	0,1628	0,67	0,2486	0,92	0,3212
0,18	0,0714	0,43	0,1664	0,68	0,2517	0,93	0,3238
0,19	0,0753	0,44	0,1700	0,69	0,2549	0,94	0,3264
0,20	0,0793	0,45	0,1736	0,70	0,2580	0,95	0,3289
0,21	0,0832	0,46	0,1772	0,71	0,2611	0,96	0,3315
0,22	0,0871	0,47	0,1808	0,72	0,2642	0,97	0,3340
0,23	0,0910	0,48	0,1844	0,73	0,2673	0,98	0,3365
0,24	0,0948	0,49	0,1879	0,74	0,2703	0,99	0,3389
1,00	0,3413	1,40	0,4192	1,80	0,4641	2,40	0,4918
1,01	0,3438	1,41	0,4207	1,81	0,4649	2,42	0,4922
1,02	0,3461	1,42	0,4222	1,82	0,4656	2,44	0,4927
1,03	0,3485	1,43	0,4236	1,83	0,4664	2,46	0,4931
1,04	0,3508	1,44	0,4251	1,84	0,4671	2,48	0,4934

Продолжение

x	$\Phi_k(x)$	x	$\Phi_k(x)$	x	$\Phi_k(x)$	x	$\Phi_k(x)$
1,05	0,3531	1,45	0,4265	1,85	0,4678	2,50	0,4938
1,06	0,3554	1,46	0,4279	1,86	0,4686	2,52	0,4941
1,07	0,3577	1,47	0,4292	1,87	0,4693	2,54	0,4945
1,08	0,3599	1,48	0,4306	1,88	0,4699	2,56	0,4948
1,09	0,3621	1,49	0,4319	1,89	0,4706	2,58	0,4951
1,10	0,3643	1,50	0,4332	1,90	0,4713	2,60	0,4953
1,11	0,3665	1,51	0,4345	1,91	0,4719	2,62	0,4956
1,12	0,3686	1,52	0,4357	1,92	0,4726	2,64	0,4959
1,13	0,3708	1,53	0,4370	1,93	0,4732	2,66	0,4961
1,14	0,3729	1,54	0,4382	1,94	0,4738	2,68	0,4953
1,15	0,3749	1,55	0,4394	1,95	0,4744	2,70	0,4965
1,16	0,3770	1,56	0,4406	1,96	0,4750	2,72	0,4967
1,17	0,3790	1,57	0,4418	1,97	0,4756	2,74	0,4969
1,18	0,3810	1,58	0,4429	1,98	0,4761	2,76	0,4971
1,19	0,3830	1,59	0,4441	1,99	0,4767	2,78	0,4973
1,20	0,3849	1,60	0,4452	2,00	0,4772	2,80	0,4974
1,21	0,3869	1,61	0,4463	2,02	0,4783	2,82	0,4976
1,22	0,3888	1,62	0,4474	2,04	0,4793	2,84	0,4977
1,23	0,3907	1,63	0,4481	2,06	0,4803	2,86	0,4979
1,24	0,3925	1,64	0,4495	2,08	0,4812	2,88	0,4980
1,25	0,3944	1,65	0,4505	2,10	0,4821	2,90	0,4981
1,26	0,3962	1,66	0,4515	2,12	0,4830	2,92	0,4982
1,27	0,3980	1,67	0,4525	2,14	0,4838	2,94	0,4984
1,28	0,3997	1,68	0,4535	2,16	0,4846	2,96	0,4985
1,29	0,4015	1,69	0,4545	2,18	0,4854	2,98	0,4986
1,30	0,4032	1,70	0,4554	2,20	0,4861	3,00	0,49865
1,31	0,4049	1,71	0,4564	2,22	0,4868	3,20	0,49931
1,32	0,4066	1,72	0,4573	2,24	0,4875	3,40	0,49966
1,33	0,4082	1,73	0,4582	2,26	0,4881	3,60	0,499841
1,34	0,4099	1,74	0,4591	2,28	0,4887	3,80	0,499928
1,35	0,4115	1,75	0,4599	2,30	0,4893	4,00	0,499968
1,36	0,4131	1,76	0,4608	2,32	0,4898	4,50	0,499997
1,37	0,4147	1,77	0,4616	2,34	0,4904	5,00	0,4999997
1,38	0,4162	1,78	0,4625	2,36	0,4909		
1,39	0,4177	1,79	0,4633	2,38	0,4913		

11. Таблица степенных функций $h'(t) = \frac{t^r}{k!} n \times 10^{-m}$ для $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$

	$k=2n$	m	$k=3n$	m	$k=4n$	m	$k=5n$	m	$k=6n$	m
0,01	0,500000	4	0,166667	6	0,416667	9	0,833333	12	0,138889	14
0,02	0,200000	3	0,133333	5	0,666667	8	0,206667	10	0,888889	13
0,03	0,450000	3	0,450000	5	0,337500	7	0,202500	9	0,101250	11
0,04	0,800000	3	0,106667	4	0,106667	6	0,853333	9	0,568889	11
0,05	0,125000	2	0,208333	4	0,260417	6	0,260417	8	0,217014	10
0,06	0,180000	2	0,360000	4	0,540000	6	0,648000	8	0,648000	10
0,07	0,245000	2	0,571667	4	0,100042	5	0,140058	7	0,163401	9
0,08	0,320000	2	0,853333	4	0,170667	5	0,273067	7	0,364089	9
0,09	0,405000	2	0,121500	3	0,273375	5	0,492075	7	0,738112	9
0,10	0,500000	2	0,166667	3	0,416667	5	0,833333	7	0,138889	8
0,11	0,605000	2	0,221833	3	0,610042	5	0,134209	6	0,246050	8
0,12	0,720000	2	0,288000	3	0,864000	5	0,207360	6	0,414720	8
0,13	0,845000	2	0,366167	3	0,119004	4	0,309411	6	0,670390	8
0,14	0,980000	2	0,457333	3	0,160067	4	0,448187	6	0,104577	7
0,15	0,112500	1	0,562500	3	0,210937	4	0,632812	6	0,158203	7
0,16	0,128000	1	0,682667	3	0,273067	4	0,873813	6	0,233017	7
0,17	0,144500	1	0,818833	3	0,348004	4	0,118321	5	0,335244	7
0,18	0,162000	1	0,972000	3	0,477400	4	0,157464	5	0,472392	7
0,19	0,180500	1	0,114317	2	0,543004	4	0,206341	5	0,653415	7
0,20	0,200000	1	0,133333	2	0,666667	4	0,266667	5	0,888889	7
0,21	0,220500	1	0,154350	2	0,810337	4	0,340342	5	0,119120	6
0,22	0,242000	1	0,177467	2	0,976066	4	0,429469	5	0,157472	6

0,23	0,264500	1	0,202783	2	0,116600	3	0,536362	5	0,205605	6
0,24	0,288000	1	0,230400	2	0,138240	3	0,663552	5	0,265421	6
0,25	0,312500	1	0,260417	2	0,162760	3	0,813802	5	0,339084	6
0,26	0,338000	1	0,292933	2	0,190407	3	0,990114	5	0,429050	6
0,27	0,364500	1	0,328050	2	0,221434	3	0,119574	4	0,538084	6
0,28	0,392000	1	0,365867	2	0,256106	3	0,143420	4	0,669292	6
0,29	0,420500	1	0,406483	2	0,294700	3	0,170926	4	0,826143	6
0,30	0,450000	1	0,450000	2	0,337500	3	0,202500	4	0,101250	5
0,31	0,480500	1	0,496517	2	0,384800	3	0,238576	4	0,123264	5
0,32	0,512000	1	0,546133	2	0,436907	3	0,279620	4	0,149130	5
0,33	0,544500	1	0,598950	2	0,494134	3	0,326128	4	0,179370	5
0,34	0,578000	1	0,655066	2	0,556806	3	0,378628	4	0,214556	5
0,35	0,612500	1	0,714583	2	0,625260	3	0,437682	4	0,255314	5
0,36	0,648000	1	0,777600	2	0,699840	3	0,503885	4	0,302331	5
0,37	0,684500	1	0,844216	2	0,780900	3	0,577866	4	0,356351	5
0,38	0,722000	1	0,914533	2	0,868806	3	0,660233	4	0,418185	5
0,39	0,760500	1	0,988650	2	0,963933	3	0,751868	4	0,488714	5
0,40	0,800000	1	0,106667	1	0,106667	2	0,853333	4	0,568889	5
0,41	0,840500	1	0,114868	1	0,117740	2	0,965468	4	0,659736	5
0,42	0,882000	1	0,123480	1	0,129654	2	0,108910	3	0,762365	5
0,43	0,924500	1	0,132512	1	0,142450	2	0,122507	3	0,877966	5
0,44	0,968000	1	0,141973	1	0,156171	2	0,137430	3	0,100782	4
0,45	0,101250	0	0,151875	1	0,170859	2	0,153773	3	0,115330	4
0,46	0,105800	0	0,162227	1	0,186561	2	0,171636	3	0,131587	4
0,47	0,110450	0	0,173038	1	0,203320	2	0,191121	3	0,149711	4
0,48	0,115200	0	0,184320	1	0,221184	2	0,212336	3	0,169869	4
0,49	0,120050	0	0,196082	1	0,240200	2	0,235396	3	0,192240	4

Продолжение

t	$k=2n$	m	$k=3n$	m	$k=4n$	m	$k=5n$	m	$k=6n$	m
0,50	0,125000	0	0,208333	1	0,260416	2	0,260416	3	0,217014	4
0,51	0,130050	0	0,221085	1	0,281883	2	0,287521	3	0,244393	4
0,52	0,135200	0	0,234347	1	0,304650	2	0,316836	3	0,274592	4
0,53	0,140450	0	0,248128	1	0,328770	2	0,348496	3	0,307838	4
0,54	0,145800	0	0,262440	1	0,354294	2	0,382637	3	0,344373	4
0,55	0,151250	0	0,277291	1	0,381276	2	0,419403	3	0,384453	4
0,56	0,156800	0	0,292693	1	0,409770	2	0,458943	3	0,428347	4
0,57	0,162450	0	0,308655	1	0,439833	2	0,501410	3	0,476340	4
0,58	0,168200	0	0,325186	1	0,471520	2	0,546964	3	0,528731	4
0,59	0,174050	0	0,342298	1	0,504890	2	0,595770	3	0,585840	4
0,60	0,180000	0	0,360000	1	0,540000	2	0,648000	3	0,715560	4
0,61	0,186050	0	0,378301	1	0,576910	2	0,703830	3	0,715560	4
0,62	0,192200	0	0,397213	1	0,615680	2	0,763343	3	0,788891	4
0,63	0,198450	0	0,416745	1	0,656373	2	0,827030	3	0,868381	4
0,64	0,204800	0	0,456906	1	0,699050	2	0,894784	3	0,954436	4
0,65	0,211250	0	0,457708	1	0,743776	2	0,966908	3	0,104748	3
0,66	0,217800	0	0,479160	1	0,790613	2	0,104361	2	0,114797	3
0,67	0,224450	0	0,501271	1	0,839629	2	0,112510	2	0,125636	3
0,68	0,231200	0	0,524053	1	0,890890	2	0,121161	2	0,137316	3
0,69	0,238050	0	0,547515	1	0,944463	2	0,130336	2	0,149886	3
0,70	0,245000	0	0,571666	1	0,100042	1	0,140058	2	0,163401	3
0,71	0,252050	0	0,596518	1	0,105882	1	0,150352	2	0,177917	3
0,72	0,259200	0	0,622080	1	0,111974	1	0,161243	2	0,193492	3
0,73	0,266450	0	0,648361	1	0,118326	1	0,172756	2	0,210186	3

0,74	0,273800	0	0,675373	1	0,124944	1	0,184917	2	0,228064	3
0,75	0,281250	0	0,703125	1	0,131836	1	0,197754	2	0,247192	3
0,76	0,288800	0	0,731626	1	0,139009	1	0,211294	2	0,267638	3
0,77	0,296450	0	0,760888	1	0,146471	1	0,225565	2	0,289475	3
0,78	0,304200	0	0,790920	1	0,154229	1	0,240598	2	0,312777	3
0,79	0,312050	0	0,821731	1	0,162292	1	0,256421	2	0,337621	3
0,80	0,320000	0	0,853333	1	0,170667	1	0,273066	2	0,364088	3
0,81	0,328050	0	0,885735	1	0,179361	1	0,290565	2	0,392263	3
0,82	0,336200	0	0,918946	1	0,188384	1	0,308950	2	0,422231	3
0,83	0,344450	0	0,952978	1	0,197743	1	0,328253	2	0,454083	3
0,84	0,352800	0	0,987839	1	0,207446	1	0,348510	2	0,487913	3
0,85	0,361250	0	0,102354	0	0,217502	1	0,369754	2	0,523818	3
0,86	0,369800	0	0,106009	0	0,227920	1	0,392022	2	0,561898	3
0,87	0,378450	0	0,109750	0	0,238707	1	0,415350	2	0,602258	3
0,88	0,387200	0	0,113579	0	0,249873	1	0,439776	2	0,645005	3
0,89	0,396050	0	0,117495	0	0,261425	1	0,465338	2	0,690251	3
0,90	0,405000	0	0,121500	0	0,273375	1	0,492075	2	0,738112	3
0,91	0,414050	0	0,125595	0	0,285729	1	0,520026	2	0,788706	3
0,92	0,423200	0	0,129781	0	0,298497	1	0,549234	2	0,842159	3
0,93	0,432450	0	0,134059	0	0,311688	1	0,579740	2	0,898597	3
0,94	0,441800	0	0,138431	0	0,325312	1	0,611586	2	0,958151	3
0,95	0,451250	0	0,142896	0	0,339377	1	0,644817	2	0,102096	2
0,96	0,460800	0	0,147456	0	0,353894	1	0,679477	2	0,108716	2
0,97	0,470450	0	0,152112	0	0,368872	1	0,715611	2	0,115690	2
0,98	0,480200	0	0,156865	0	0,384320	1	0,753267	2	0,123033	2
0,99	0,490050	0	0,161716	0	0,400248	1	0,792491	2	0,130761	2
1,00	0,500000	0	0,166667	0	0,416666	1	0,833333	2	0,138889	2

ЛИТЕРАТУРА ПО ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

- Аба ту Ж. Л., Ба ба ри Ж. П. (Abatut J. L., Babary J. P.)
1. Sur la determination du domaine de stabilite d'un point double d'une recurrence non lineaire du deuxieme ordre. — С. г. Acad. Sci., Ser. A, 1966, **263**, p. 931—934.
- Аб ду ла ев А. А., На д жа ф ов Э. М.
1. Методика расчета автоколебаний в пневматических регуляторах. — Автоматика и телемеханика, 1956, № 3.
- А бе ль Ж. (Abele J.)
1. Etude d'un systeme oscillant entretenu a amplitude autostabilisee. These. Paris, 1943.
 2. Construction d'oscillateurs non lineaires par la methode de l'axe mobile. — С. г. Acad. Sci., 1947, **225**, p. 1270—1271.
- А й з е р м а н М. А.
1. О сходимости процесса регулирования после больших начальных отклонений. — Автоматика и телемеханика, 1946, № 2—3.
 2. Об учете нелинейных функций от нескольких аргументов при исследовании устойчивости систем автоматического регулирования. — Автоматика и телемеханика, 1947, № 1.
 3. О построении резонансных графиков для систем с нелинейной обратной связью, — Инж. сб. Ин-та механики АН СССР, 1952, **13**.
 4. Физические основы применения методов малого параметра к решению нелинейных задач теории автоматического регулирования. — Автоматика и телемеханика, 1953, № 5.
 5. Проблема определения периодических режимов в системах автоматического регулирования. Обзор. — В кн.: Тр. 2-го Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. М. — Л., 1955.
 6. Лекции по теории автоматического регулирования. М., Гостехиздат, 1956, 427 с.
 7. Проблемы, возникающие в связи с теорией автоколебаний в системах автоматического регулирования. — В кн.: Основные проблемы автоматического регулирования и управления, М, 1957.
 8. On the approximate methods of determining periodic processes in feedback control systems. — Convegno Internaz. dell'automatismo. Roma, 1958.
 9. Теория автоматического регулирования. М., «Наука», 1966, 452 с.
 10. Об одной проблеме, касающейся устойчивости «в большом» динамических систем. — Успехи матем. наук, 1949, **4**, вып. 4.
- А й з е р м а н М. А. Га н т ма х е р Ф. Р.
1. Об одном классе динамических задач, сводящихся к теории рекуррентных систем. — Прикл. матем. и механ., 1955, **19**, вып. 2.

2. Об определении периодических режимов в нелинейной динамической системе с кусочно-линейной характеристикой. — Прикл. матем. и механ., 1956, 20, вып. 5.
 3. Определение периодических режимов в системах с кусочно-линейной характеристикой, составленной из звеньев, параллельных двум заданным прямым. — Автоматика и телемеханика, 1957, № 2.
 4. О некоторых особенностях переключений в нелинейных системах автоматического регулирования с кусочно-гладкой характеристикой нелинейного элемента. — Автоматика и телемеханика, 1957, № 11.
 5. Устойчивость по линейному приближению периодических решений систем дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. — ДАН СССР, 1957, 116, № 4.
 6. Устойчивость по линейному приближению периодического решения системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. — Прикл. матем. и механ., 1957, 21, № 5.
 7. Об устойчивости периодических режимов в нелинейных системах с кусочно-линейной характеристикой. — Автоматика и телемеханика, 1958, № 6.
 8. Об устойчивости периодических движений. — Прикл. матем. и механ., 1958, 22, вып. 6.
 9. Determination of stability by linear approximation of a periodic solution of a system of differential equations with discontinuous right-hand sides. — Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1958, 11, pt. 4.
 10. Об устойчивости положения равновесия в разрывных системах. — Прикл. матем. и механ., 1960, 24, вып. 2.
 11. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М., Изд-во АН СССР, 1963. 140 с.
 12. О критических случаях в теории абсолютной устойчивости регулируемых систем. — Автоматика и телемеханика, 1963, № 6.
- Айзерман М. А., Смирнова И. М.**
1. замечания по статье Е. П. Попова «Приближенное исследование автоколебаний и вынужденных колебаний нелинейных систем» — Изв. АН СССР. ОНТ, 1954, № 10.
 2. О применении методов малого параметра для исследования периодических режимов в системах автоматического регулирования, не содержащих малого параметра. — В кн.: Памяти А. А. Андропова. М., 1955.
- Айсагалиев С. А.**
1. Об определении области абсолютной устойчивости вынужденных движений в нелинейных системах. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1969, № 5.
- Аксельби Г. С. (Axelby G. S.)**
1. Random noise with bias signals in nonlinear devices. — IRE Wescon Convention record, 1959, 3, pt. 4.
- Александровский Н. М., Круг Г. К.**
1. Несколько замечаний по поводу статьи Е. П. Попова «Учет влияния нелинейности при расчете следящих систем» (Автоматика и телемеханика, 1953, № 6). — Автоматика и телемеханика, 1954, № 4.

Алексеев А. С.

1. Электронная модель двухпозиционного регулятора температуры с зоной опережения. — ДАН СССР. Нов. сер., 1952, 87, № 3.
2. Двухпозиционный регулятор температуры с зоной опережения. — В кн.: Памяти А. А. Андропова. М., 1955.
3. Двухпозиционный регулятор температуры с зоной опережения. — Уч. зап. Горьковск. ун-та, 1957, 35.

Алимов Ю. И.

1. Об устойчивости в целом равновесного состояния релейных систем регулирования. Изв. высшей школы. Радиотехн., 1959, 2, № 6.
2. О построении функций Ляпунова для релейных систем регулирования. — Автоматика и телемеханика, 1960, № 6.
3. О применении прямого метода Ляпунова к дифференциальным уравнениям с неоднозначными правыми частями. — Автоматика и телемеханика, 1961, № 7.

Андерсон Б. Д. (Anderson B. D. O.)

1. Stability of control systems with multiple nonlinearities. — J. Franklin Inst., 1966, 281, № 5.

Андрюенко А. Я.

1. Метод задания возмущений при исследовании статической точности нелинейных систем управления. — В кн.: Техническая кибернетика. М., 1965.

Андрюенко А. Я., Петров Б. Н., Портнов-Соколов Ю. П.

1. Оценка точности систем управления космическими объектами. — В кн.: Управление космическими аппаратами и кораблями. М., «Наука», 1971.

Андронов А. А.

1. Предельные циклы Пуанкаре и теория колебаний. — В кн.: Доклады 6-го съезда русских физиков. М., 1928

Андронов А. А., Баутин Н. Н.

1. Движение нейтрального самолета, снабженного автопилотом, и теория точечных преобразований. ДАН СССР, 1944, 43, № 3.
2. Стабилизация курса нейтрального самолета автопилотом с постоянной скоростью сервомотора и зоной нечувствительности. — ДАН СССР, 1945, 46, № 4.
3. Об одном вырожденном случае задачи прямого регулирования. — ДАН СССР, 1945, 46, № 7.
4. Теория стабилизации курса нейтрального самолета при помощи автопилота с постоянной скоростью сервомотора I. Случай отсутствия зоны неустойчивости. — Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 3.
5. Теория стабилизации курса нейтрального самолета при помощи автопилота с постоянной скоростью сервомотора II. — Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 6.
6. О влиянии кулоновского трения в золотнике на процесс непрямого регулирования. — Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 7.

Андронов А. А., Баутин Н. Н., Горелик Г. С.

1. Автоколебания простейшей схемы, содержащей винт изменяемого шага. — ДАН СССР, 1945, 47, № 4.
2. Теория непрямого регулирования при учете кулоновского трения в чувствительном элементе. — Автоматика и телемеханика, 1946, № 1.

Андронов А. А., Витт А. А.

1. К математической теории захватывания. — Журн. прикл. физики, 1930, 7, вып. 4.
2. К математической теории автоколебательных систем с двумя степенями свободы. — Журн. техн. физики, 1934, 4, вып. 1.

Андронов А. А., Витт А. А., Понтрягин Л. С.

1. О статическом рассмотрении динамических систем. — ЖЭТФ, 1933, 3, вып. 3.

Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.

1. Теория колебаний. Ч. I, изд. 2-е. М., Физматгиз, 1959. 915 с.

Андронов А. А., Майер А. Г.

1. Задача Мизеса в теории прямого регулирования и теория точечных преобразований поверхностей. — ДАН СССР, 1944, 43, № 2.
2. О задаче Вышнеградского в теории прямого регулирования. — ДАН СССР, 1945, 47, № 5.
3. Задача Вышнеградского в теории прямого регулирования. I, II. — Автоматика и телемеханика, 1947, № 5.
4. Задача Вышнеградского в теории прямого регулирования. II. Теория регулятора прямого действия при наличии кулоновского и вязкого трения. — Автоматика и телемеханика, 1953, № 5.

Андронов А. А., Мандельштам Л. И.

1. Теория нелинейных колебаний. — Изв. АН СССР. Сер. физ., 1945, 9, № 2.

Андронов А. А., Понтрягин Л. С.

1. Грубые системы. — ДАН СССР, 1937, № 5.

Андронов А. А., Хайкин С. Э.

1. Теория колебаний Ч. I. М.—Л., ОНТИ НКТП СССР, 1937. 518 с.

Аносов Д. В.

1. Об устойчивости положения равновесия релейных систем. — Автоматика и телемеханика, 1959, № 12.

Антосиевич Г. (Antosiewicz H.)

1. A Survey of Lyapunov's second method. — In: Contributions to the theory of nonlinear oscillations. IV. Princeton, 1958.

Аржеми Ж., Джуристик А. (Argemi J. et Juricic H.)

1. Etude numerique de la stabilite des solutions periodiques de l'equation de Duffing. — In: Colloque international du C.N.R.S. sur les vibrations forcees dans les systemes non lineaires. Marseille, 1964.

Атертон Д. П., Турнбал К. Ф. (Atherton D. P., Turnbull Cr. F.)

1. The Response of nonlinear characteristics to several inputs and the use of the modified nonlinearity concept in control system. — Proc. IEE, 1967, 114.

Бакакин А. В.

1. К вопросу синтеза одного класса систем автоматического регулирования с переменной структурой. — В кн.: Кибернетика и управление. М., 1966.

Бакакин А. В., Бермант М. А., Езеров В. Б.

1. Применение систем с переменной структурой для стабилизации объекта с изменяющимися параметрами при наличии

- ограничений на перемещение регулирующего органа. — Автоматика и телемеханика, 1964, № 7.
- Балкен Дж. Г. (Balchen J. G.)
1. Performance index for feedback control systems based on the Fourier transform of the control deviation. — Acta Polytechnica Scandinavica, 1958, № 247.
- Барбашин Е. А.
1. О построении функций Ляпунова для нелинейных систем. В кн.: Тр. 1-го Международного конгресса ИФАК, 1960. I. М., 1961.
- Барбашин Е. А., Герашенко Е. И.
1. О стабилизации систем регулирования. — Прикл. матем. и механ., 1964, 28, вып. 4.
 2. О форсировании скользящих режимов в системах автоматического регулирования. — Дифференциальные уравнения, 1965, 1, № 1.
 3. Об одном принципе построения систем стабилизации. — Автоматика и телемеханика, 1965, № 6.
- Барбашин Е. А., Красовский Н. Н.
1. Об устойчивости движения в целом. — ДАН СССР, 1952, 86, № 3.
- Барбашин Е. А., Печорина И. Н., Эйдинов Р. М.
1. Применение систем автоматического регулирования с переменной структурой для одного класса линейной статических объектов. — Автоматика и телемеханика, 1963, № 1.
- Барбашин Е. А., Табуева В. А.
1. Об одном способе стабилизации систем регулирования третьего порядка с большим коэффициентом усиления. I. — Автоматика и телемеханика, 1962, № 10.
 2. Об одном способе стабилизации систем регулирования третьего порядка с большим коэффициентом усиления. II. — Автоматика и телемеханика, 1963, № 5.
 3. Теорема об устойчивости решения одного дифференциального уравнения с разрывной характеристикой. — Прикл. матем. и механ., 1963, 27, вып. 4.
- Барбашин Е. А., Табуева В. А., Эйдинов Р. М.
1. Об устойчивости одной системы регулирования с переменной структурой при нарушении условий скольжения. — Автоматика и телемеханика, 1963, № 7.
- Баркин А. И.
1. Достаточные условия отсутствия автоколебаний в импульсных системах. — Автоматика и телемеханика, 1970, № 6.
 2. Определение параметров почти периодических колебаний в нелинейных импульсных системах. — Автоматика и телемеханика, 1968, № 1.
- Баррет Дж. Ф., Коалс Дж. Ф. (Barret J. F., Coales J. F.)
1. An introduction to the analysis of nonlinear control systems with random inputs. — Proc. IEE, part C, 1956, 103, № 3.
- Баутин Н. Н.
1. Модель часов Галилея — Гюйгенса. — ДАН СССР, 1948, 61, № 1.

2. О задаче Л. И. Мандельштама в теории часов. — ДАН СССР, 1949, 65, № 3.
 3. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. Л. — М., Гостехиздат, 1949. 164 с.
 4. Теория спускового регулятора с пружинящей пластинкой. — ДАН СССР, 1950, 72, № 1.
 5. Динамическая модель хронометрового хода (мгновенный импульс). — Инж. сб. Ин-та механики АН СССР, 1952, 12.
 6. Динамическая модель часового хода без собственного периода. — Инж. сб. Ин-та механики АН СССР, 1953, 16.
 7. Динамическая теория часовых ходов без конструктивной остановки ходового колеса (мгновенный импульс). — Инж. сб. Ин-та механики АН СССР, 1955, 21.
 8. Теория спускового регулятора с пружинящей пластинкой. — Инж. сб. Ин-та механики АН СССР, 1955, 22.
 9. Динамические модели свободных часовых ходов. — В кн.: Памяти А. А. Андропова. М., 1955.
 10. Динамические модели несвободных часовых ходов. — Изв. АН СССР. ОТН, 1955, № 10.
- Башарин А. В.**
1. Графический метод построения переходных процессов в системах регулирования с обратными связями с учетом нелинейности. — В кн.: Доклады 16-й научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава ЛЭТИ. Л., 1960.
 2. Графический расчет переходных процессов в системах каскадного возбуждения электрических машин с обратными связями и нелинейностями. — Вестн. электропромышленности, 1956, № 5.
- Башкиров Д. А.**
1. Графоаналитические методы построения переходных процессов в системах автоматического регулирования. Метод секущих. — В кн.: Основы автоматического регулирования. М., 1954.
 2. Метод построения переходных процессов в нелинейных системах автоматического регулирования. — В кн.: Тр. 2-го Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. 2. М. — Л., 1955.
- Беделъбаев А. К.**
1. Устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования. Алма-Ата, Изд. АН КазССР, 1960. 163 с.
 2. К вопросу об определении границ сектора устойчивости нелинейных регулируемых систем. — Автоматика и телемеханика, 1961, № 7.
- Белова Д. А., Нетушил А. В.**
1. Об абсолютной устойчивости систем регулирования с незначительными нелинейностями типа люфт и упор. — Автоматика и телемеханика, 1967, № 12.
- Берген А. Р., Ивенс Р. П., А. Дж. Ральт. (Bergen A. R., Iwens R. P., Rault A. J.)**
1. On input-output stability of nonlinear feedback systems. — IEEE Trans., 1966, AC-11, № 4.

- Берген А. Р., Шапиро М. А. (Bergen A. R., Sapiro M. A.)
1. The parabola test for absolute stability. — IEEE Trans., 1967, AC-12, № 3.
- Бердышев К. А., Смирнов Б. И.
1. Способы автоматического регулирования цикла мокрого измельчения. Авторское свидетельство № 129568 с приоритетом от 1 декабря 1959 г. — Бюллетень изобретений, 1960, № 13.
- Бермант М. А., Емельянов С. В.
1. К вопросу построения высококачественных систем автоматического управления с изменяющимися параметрами. — ДАН СССР, 1962, 145, № 4.
 2. Об одном способе управления некоторым классом объектов с изменяющимися параметрами. — Автоматика и телемеханика, 1963, № 5.
 3. Об устойчивости одного класса систем автоматического управления с переменными параметрами. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1964, № 6.
- Бермант М. А., Емельянов С. В., Таран В. А.
1. Движение систем с переменной структурой в скользящем режиме. — Автоматика и телемеханика, 1965, № 8.
- Бернштейн С. И.
1. К теории вибрационных регуляторов электрических машин. — Автоматика и телемеханика, 1947, № 6.
 2. К теории вибрационных регуляторов электрических машин. — Автоматика и телемеханика, 1951, № 5.
 3. Теория вибрационных регуляторов электрических машин. — В кн.: Тр. 2-го Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. I. М.—Л., 1955.
- Бернштейн И., Иконников Э.
1. К математической теории вынужденных колебаний в автоколебательных системах с двумя степенями свободы. — Техн. физика, 1934, 4, вып. 1.
- Бершад Н. Д. (Bershad N. J.)
1. On the stability of time varying linear systems. — IEEE Trans., 1964, CT-11, № 3.
- Бесекерский В. А.
1. Применение вибраторов для устранения нелинейности в автоматических регуляторах. — Автоматика и телемеханика, 1947, № 6.
- Бессонов Л. А.
1. Переходные процессы в нелинейных электрических цепях со сталью. М.—Л., 1951. 163 с.
- Биргоф Г. Д. (Birkhoff G. D.)
1. Surface transformation and their dynamical application. — Acta Math., 1922, 43.
- Блакиер А. (Blaquiere A.)
1. Effet du bruit de fond sur la frequence des autooscillateurs a lampes — Precision ultime des horloges radioelectriques. — Ann. de radioelectr., 1953, 8.

2. Fluctuations et largeur de raie d'un auto-oscillateur: equivalence des theories non lineaires et des methodes de linearisation. — In: Colloque International du C. N. R. S. sur les vibrations forcees dans les systemes non lineaires, Marseille, 1964.
- Блакиер А., Гривэ П. (Blaquiere A., Grivet P.)
1. Non linear effects of noise in electronic clocks. — Proc. IEEE, 1963, 51, № 11.
- Бобов К. С.
1. Теория работы вибрационных регуляторов напряжения авиационного типа. — Автоматика и телемеханика, 1940, № 6.
 2. Точность работы авиационных регуляторов напряжения. — Электричество, 1940, № 12.
- Боголюбов В. Е., Дятлов В. Л.
1. Расчет переходных процессов в дросселях насыщения и элементах схем, магнитных усилителей. — В кн.: Электротехника, М., 1954.
 2. Метод многих фазовых плоскостей для расчета процессов в нелинейных системах. — В кн.: Электротехника. М.—Л., 1955.
- Боголюбов Н. Н.
1. О некоторых статистических методах в математической физике. Киев, Изд. АН УССР, 1945. 139 с.
 2. Одночастотные свободные колебания в нелинейных системах со многими степенями свободы. — Сб. трудов Ин-та строительной механики АН УССР, 1949, № 10.
- Богус В. (Bogusz W.)
1. Asymptotyczne metody w teorii nieliniowych kolebanii 2-e изд. М., Физматгиз, 1958. 408 с.
- Боднер В. А.
1. Kriterion absolutnej stateczności układów nieliniowych. — In: Prace 4 Krajowej Konferencji Automatyki. Kraków, 1967.
 2. Determination of stability regions of dynamic nonlinear systems. — Arch. Mechan. Stosowanej, 1959, 11, № 6.
- Бодэ Г. В. (Bode H W.)
1. Анализ основных схем регулирования автоматических ВИШ. М., 1947. 40 с.
 2. Автоколебания в системах, содержащих компрессор. — Инж. сб. Ин-та механики АН СССР, 1950, 6.
 3. Автоматика авиационных двигателей. М., Оборонгиз, 1952. 336 с.
- Бодэ Г. В. (Bode H W.)
1. Network analysis and feedback amplifier design. New York, Nosttrand, 1945, 551 с.
- Болтянский В. Г., Понтрягин Л. С.
1. Об устойчивости положения равновесия «релейной» системы обыкновенных дифференциальных уравнений. — В кн.: Тр. 3-го Всесоюзного матем. съезда. I. М., 1956.
- Бонджиорно Дж. Дж. (Bongiorno J. J.)
1. An Extension of the Nyquist — Barkhaugen stability criterion to linear lumped-parameter systems with time-varying elements. — IEEE Trans., 1963, AC-8, № 2.
 2. Real frequency stability criteria for linear time-varying systems. — Proc IEEE, 1964, 52, № 7.

3. Критерии устойчивости линейных систем с переменными во времени параметрами, выраженные через характеристики в области действительных частот. — Тр. американск. ин-та инженеров по электротехнике и радиотехнике (русск. пер.), 1964, № 7.
- Бояринов В. С., Леонов Н. Н.**
1. К теории одной релейной системы. — Автоматика и телемеханика, 1958, № 2.
- Браун Б.**
1. Применение разностных операторов к линейным системам. — В кн.: Автоматическое регулирование. М., 1954.
- Броккет Р. В. (Brockett R. W.)**
1. On the stability of non-linear feedback systems. — IEEE Trans., 1964, AC-9, № 3.
- Броккет Р. В., Виллемс Дж. Л. (Brockett R. W., Willems J. L.)**
1. Frequency domain stability criteria. Part I. — IEEE Trans., 1965, AC-10, № 3.
 2. Frequency domain stability criteria. Parts I and II. — IEEE Trans., 1965, AC-10, № 3, 4.
- Броккет Р. В., Ли Г. Б. (Brockett R. W., Lee H. B.)**
1. Frequency domain instability criteria for time-varying and non-linear systems. — Proc. IEEE, 1967, 55, № 5.
- Бромберг П. В.**
1. Автоматич. стабилизация курса самолета. Канд. дисс., М., 1947.
 2. О качестве линейных систем регулирования. М., Оборонгиз, 1952, 29 с.
 3. Устойчивость и автоколебания импульсных систем регулирования. М., Оборонгиз, 1953, 224 с.
 4. Системы регулирования с разрывными характеристиками при постоянном воздействии. М., Оборонгиз, 1954, 75 с.
- Бубницкий З. (Bubnicki Z.)**
1. Algebraiczne metody badania stabilności i drgań nieliniowych układów impulsowych i cyfrowych. — In: Prace 3 Krajowej Konferencji Automatyki. I. Gliwice, 1965.
- Бук Р. (Bouc R.)**
1. Influence du cycle d'hysteresis sur la resonance non lineaire d'un circuit serie. — In: Colloque International du C. N. R. S. sur les vibrations forcees dans les systemes non lineaires. Marceille, 1964.
- Букенбаев К. Б., Майгарин Б. Ж.**
1. Устойчивость регулируемых систем с учетом скоростной и позиционной нагрузок ГИМ и сжимаемости жидкости в гидроцилиндре. — Автоматика и телемеханика, 1970, № 5.
- Булгаков Б. В.**
1. О применении метода А. Пуанкаре к свободным псевдoliniейным колебательным системам. — Прикл. матем. и механ., 1942, 6, вып. 4.
 2. О применении метода Ван-дер-Поля к псевдoliniейным колебательным системам со многими степенями свободы. — Прикл. матем. и механ., 1942, 6, вып. 6.
 3. Автоколебания регулируемых систем. — Прикл. матем. и механ., 1943, 7, вып. 2.
 4. Некоторые задачи теории регулирования с нелинейными характеристиками. — Прикл. матем. и механ., 1946, 10, вып. 3.

5. Колебания. М.—Л., Гостехиздат, 1949, 464 с.
6. Колебания. М., Гостехиздат, 1954. 892 с.
- Булгаков В. В., Литвин-Седой З. Я.
1. Об одной задаче автоматического регулирования с нелинейной характеристикой. — Автоматика и телемеханика, 1949, № 5.
- Бунимович В. И.
1. Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах. М., «Сов. радио», 1951. 360 с.
- Буровой И. А., Емельянов С. В.
1. Об управлении некоторыми производственными процессами путем минимальных изменений регулирующих воздействий. — Автоматика и телемеханика, 1960, № 8.
- Бутенин Н. В.
1. Механические автоколебательные системы с гироскопическими силами. — Прикл. матем. и механ., 1942, 6, вып. 5.
 2. К теории вынужденных колебаний в нелинейной механической системе с двумя степенями свободы. — Прикл. матем. и механ., 1949, 13, вып. 4.
 3. К теории принудительной синхронизации. — В кн.: Памяти А. А. Андропова. М., 1955.
 4. О влиянии вибраций на работу некоторых систем автоматического регулирования. — Тр. Ленингр. ин-та авиац. приборостр., 1959, 28.
- Бутко Ю. А., Штеренберг Ю. О.
1. Шаблоны для определения периодических режимов в нелинейных системах автоматического управления. — Автоматика и телемеханика, 1968, № 4.
- Бутон Р. (Booton R. C.)
1. The analysis of nonlinear control systems with random inputs. — In: Proc. Symposium nonlinear circuit analysis. 2. N. Y. 1953.
 2. Nonlinear control systems with random inputs. — Trans. IRE, 1954, CT-1, № 1.
- Вавилов А. А.
1. Исследование симметричных автоколебаний в релейных системах по логарифмическим характеристикам. — Автоматика и телемеханика, 1962, № 8.
 2. Чувствительность периодического режима гармонически линеаризованного уравнения нелинейной системы к высшим гармоникам и малым параметрам. — Изв. ЛЭТИ, 1967, вып. 65, ч. I.
 3. Частотные методы расчета нелинейных систем. Л., «Энергия», 1970. 323 с.
- Вайсенбергер С. (Weissenberger S.)
1. Stability-boundary approximations for relay-control systems via a steepest-ascent construction of Lyapunov function. — In: Prints at 6 Joint automatic control Conference. Troy, N. Y., 1968.
- Ван-дер-Поль Б. (Van-der-Pol B.)
1. The Nonlinear theory of electrical oscillations. — Proc. IRE, 1934, 22 (см. также русский перевод: Ван-дер-Поль Б., Нелинейная теория электрических колебаний. Пер. с англ. Я. А. Копиловича с предисл. С. Э. Хайкина. М., Связьиздат, 1935. 42 с.

Ван-Трисс Г. Л. (Van Trees H. L.)

1. Functional techniques for the analysis of nonlinear behavior of phase-locked loops. — Proc. IEEE, 1964, 52, № 8.

Ванг П. К. С.

1. Условия устойчивости диффузионной системы с нелинейными обратными связями. — Автоматика и телемеханика, 1970, № 5.

Вейсс Г. (Weiss G.)

1. Analysis of relay servomechanisms. — J. Aeronaut. Sci., 1946, 13, № 7.

Венгжин С. (Wengżyn S.)

1. O nieliniowym uogólnieniu metod stabilizacji i strojeniu układów automatycznej regulacji. — Arch. Automat. i Telemechaniki, 1958, 3, z. 4.

Венгжин С., Жиль Ж. (Wengżyn S., Gille J.)

1. O pewnym wystarczającym warunku stabilności nieliniowych układów automatyki. — Arch. Automat. i Telemechaniki, 1962, 7, z. 1—2.

Венгжин С., Видаль П. (Wengżyn S., Vidal P.)

1. Динамика нелинейных układów импульсовых. — In: Prace 3 Krajowej Konferencji Automatyki. I. Gliwice, 1965.

Видаль П. (Vidal P.)

1. Analiza stabilności układów z prostownikami sterowanymi. — Arch. Automat. i Telemechaniki, 1964, 10, z. 2.

Видаль П., Венгжин С. (Vidal P., Wengżyn S.)

1. Przybliżony sposób znajdowania przebiegu regulacji w nieliniowych układach automatyki. — Arch. Automat. i Telemechaniki, 1957, 2, z. 3—4.

Викторова В. С.

1. Использование коммутируемой жесткой обратной связи для создания астатизма в системах автоматического регулирования с переменной структурой. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1965, № 2.

Виллемс Дж. Л. (Willems J. L.)

1. The Stability of systems containing single nonlinearity. Thesis, Cambridge, 1964.

Воронов А. А.

1. Свободные колебания осциллятора с переменным трением. — ДАН СССР, Нов. сер., 1951 81, № 4.
2. О периодических решениях дифференциальных уравнений систем автоматического регулирования, содержащих чувствительные элементы с сухим трением. — Автоматика и телемеханика 1953, № 1.
3. Приближенное определение процесса установления автоколебаний в некоторых нелинейных системах автоматического регулирования. — Автоматика и телемеханика, 1957, с. 631—639.
4. Основы теории автоматического управления. М — Л., «Энергия», 1966, 372 с.

Вудсайд Ч. М.

1. О статической эквивалентности стохастических и нелинейных систем. — Автоматика и телемеханика, 1969, № 2.

Вышнеградский И. А.

1. О регуляторах непрямого действия. — Изв. СПб. Практического технологического ин-та, 1878, с. 1—48.

Гамель Б. (Hamel B.)

1. Contribution a l'etude mathematique des systemes de reglare par tout-ou-rien. — С. Е. М. V., 1949, № 17.
2. Etude mathematique des systemes a plusieurs degres de liberte decrits par des equations lineaires avec un terme de commande discontu. — In: Travaux. Journees d'etudes des vibrations, AFRA. Paris, 1950.

Гарбер Е. Д.

1. Частотные критерии существования периодических режимов нелинейных автоматических систем. — В кн.: Тр. 3-го Всесоюзного совещания по автоматическому управлению (техн. кибернетике). М., 1966.

Гарбер Е. Д., Розенвассер Е. Н.

1. Об исследовании периодических режимов нелинейных систем на основе гипотезы фильтра. — Автоматика и телемеханика, 1965, № 2.

Гарнер М. Ф., Бернс Дж.

1. Переходные процессы в линейных системах. М., Физматгиз, 1961.

Гелиг А. Х.

1. Об устойчивости движения систем с неединственным положением равновесия. — ДАН СССР, 1962, 147, № 3.
2. О применении второго метода Ляпунова к исследованию устойчивости движения нелинейных разрывных систем. — Вестн. ЛГУ, 1962, № 7.
3. Исследование устойчивости нелинейных разрывных систем автоматического регулирования с неединственным равновесным состоянием. — Автоматика и телемеханика, 1964, № 2.
4. Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем с распределенными параметрами. — Автоматика и телемеханика, 1965, № 3.
5. Частотные условия абсолютной устойчивости регулируемых систем с распределенными параметрами, многозначными нелинейностями и неединственным состоянием равновесия. — В кн.: Тр. 3-го Всесоюзного совещания по автоматическому управлению (техн. кибернетике). М., 1966.
6. Абсолютная устойчивость нелинейных импульсных систем с широтой и временной модуляцией. — Автоматика и телемеханика, 1968, № 7.
7. Устойчивость управляемых систем с ограниченными нелинейностями. — Автоматика и телемеханика, 1969, № 11.
8. Устойчивость многосвязных нелинейных регулируемых систем с неединственным положением равновесия. — Автоматика и телемеханика, 1970, № 1.

Герасимов С. Г.

1. Некоторые вопросы теории регулирования теплотехнических процессов. — Изв. ВТИ, 1947, № 10.
2. Об изодромном регулировании постоянной скоростью для идеализированной системы. — Изв. ВТИ, 1947, № 12.

Гессинг Р. (Gessing R.)

1. O pewnym wystarczającym warunku stabilności nieliniowych układów impulsowych. — Arch. Automat. i Telemechaniki, 1964, 9, z. 3.
2. Równania różnicowe układów regulacji z nieliniowym impulsotorem. — In: Prace 3 Krajowej Konferencji Automatyki. Gliwice, 1965.
3. Wystarczający warunek asymptotycznej stabilności globalnej nieliniowych układów impulsowych. — In: Prace 3 Krajowej Konferencji Automatyki. Gliwice, 1965.
4. Równania różnicowe nieliniowe układów impulsowych i ich zastosowanie do obliczania przebiegów. — Arch. Automat. i Telemechaniki, 1966, 11, z. 3.
5. Równania różnicowe nieliniowych układów impulsowych z rzeczywistym czasem opóźnienia. — In: Prace 4 Krajowej Konferencji Automatyki. 1, Kraków, 1967.
6. Równania impulsowe nieliniowe z rzeczywistym czasem opóźnienia. — Arch. Automat. i Telemechaniki, 1968, 13, z. 1.
7. Równania różnicowe nieliniowych układów impulsowych i ich zastosowanie do obliczania przebiegów. — Rozpr. Elektrotechniczne, 1968, 9, z. 1.

Гибсон Дж. Э., Сридхар Р. (Gibson J. E., Sridhar R.)

1. A New dual-input describing junction and an application to the stability of forced nonlinear systems. — IEEE Trans., 1963, AC-8, № 1.

Гибсон Дж. Э., Тада Э. К.

1. Вычисление обратной описывающей функции. — В кн.: 2-й Конгресс ИФАК, Базель, 1963. М., 1965.

Глатенок И. В.

1. Об оценке области нахождения истинного периодического решения, определяемого приближенно методом гармонического баланса. — Автоматика и телемеханика, 1957, № 12.

Гольденберг Л. М.

1. О применении метода ступенчатых временных характеристик к задаче синтеза цепей. — Тр. ВКИА связи им. С. М. Буденного, 1953, № 38.

Гольдфарб Л. С.

1. Некоторые вопросы теории регулирования. — В кн.: Тезисы и конспекты докладов на научном совещании по теории регулирования. М., 1940.
2. О нелинейности регулируемых систем. — Бюлл. ВЭИ, 1941, № 3.
3. О некоторых нелинейностях в системах регулирования. — Автоматика и телемеханика, 1947, № 5.
4. К вопросу о теории вибрационных регуляторов. — Автоматика и телемеханика, 1948, № 6.
5. Метод исследования нелинейных систем регулирования, основанный на принципе гармонического баланса. — В кн.: Основы автоматического регулирования. Теория. I. М., 1954.
6. Метод исследования нелинейных систем регулирования, основанный на принципе гармонического баланса. — В кн.: Тр.

- 2-го Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. М.—Л., 1955.
7. К теории систем регулирования с исполнительным механизмом ограниченной скорости. — Автом. и телемех., 1961, № 10.
 8. О нелинейности регулируемых систем. — В кн.: Метод Гольдфарба в теории регулирования. М.—Л., 1962.
 9. О некоторых нелинейностях систем регулирования. — В кн.: Метод Гольдфарба в теории регулирования. М.—Л., 1962.
 10. Стабилизация нелинейных систем регулирования. — В кн.: Метод Гольдфарба в теории регулирования. М.—Л., 1962.
 11. К вопросу о теории вибрационных регуляторов. — В кн.: Метод Гольдфарба в теории регулирования. М.—Л., 1962.
 12. К теории систем регулирования с исполнительным механизмом ограниченной скорости. — В кн.: Метод Гольдфарба в теории регулирования. М.—Л., 1962.
- Гонек Н. Ф.
1. Теория и расчет двухступенчатого регулирования. — Точная индустрия, 1939, № 4—5.
- Гоноровский И. С.
1. Радиосигналы и переходные явления в радиоцелях. — М., Связьиздат, 1954. 327 с.
- Горелик Г. С.
1. Работы академика А. А. Андропова по теории автоматического регулирования. — В кн.: Тр. 2-го Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, М.—Л., 1955.
- Горецкий Г. (Gorecki H.)
1. Przeręgulowania w liniowych i nieliniowych układach automatyki. — Arch. Automat. i Telemekhaniki, 1965, 10, z. 2.
 2. Влияние зоны нелинейности и участков насыщения на динамику двухкаскадного сервомеханизма. — Автоматика и телемеханика, 1958, № 5.
 3. Динамика релейного электрического сервомеханизма при нагрузке, изменяющейся пропорционально ходу. — Автоматика и телемеханика, 1958, № 6.
 4. Влияние скоростей связи на динамику релейного сервомеханизма, находящегося под нагрузкой. — Автоматика и телемеханика, 1960, № 5.
- Горская Н. С.
1. Уравнение движения пневмопривода. — В кн.: Тр. конференции ИАТ АН СССР. М., 1953.
- Горская Н. С., Крутова И. Н., Рутковский В. Ю.
1. Динамика нелинейных сервомеханизмов. М., Изд. АН СССР, 1959. 319 с.
- Горская Н. С., Мызин Б. И.
1. Вибрационный блок управления на поляризованных реле для пневмоприводов. — Автоматика и телемеханика, 1959, № 7.
 2. Электропневматический сервомеханизм с вибрационным блоком управления. М., 1959. 24 с.
- Горская Н. С., Петров В. В.
1. Быстродействующий электропневматический привод. Сессия АН СССР по научным проблемам автоматизации производства 15—

- 20 окт. 1956 г. — В кн.: Научно-технические проблемы автоматизированного электропривода. М., 1957.
- Г р а т е л у Г. (Grateloup G.)
1. Sur la recherche des solutions periodiques d'une equation differentielle non lineaire du troisieme ordre a coefficients constants. — С. г. Acad. Sci., 1963, 257.
- Г р а т е л у Г., Г у м о в с к и й И. (Grateloup G. et Gumowski I.)
1. Etude du comportement d'un systeme a retour non lineaire au voisinage d'un cas critique de Ljapunov. — С. г. Acad. Sci., 1964, 258.
- Г р е н с т е д П. Е.
1. Частотный метод анализа нелинейных систем. — Машиностроение, 1956, № 3.
- Г у з е н к о А. И.
1. Построение логарифмических частотных характеристик следящих систем с комбинированным управлением. — Автоматика и телемеханика, 1965, № 3.
- Г у к о в с к и й А. (Goukowsky A.)
1. Die Regulierung der Turbinen. — Z. VDI, 1896, 40, № 30—31.
- Г у м о в с к и й И., М и р а Х. (Gumowski I., Mira Chr.)
1. Sur un algorithme de determination du domaine de stabilite d'un point double d'une recurrence non lineaire du deuxieme ordre a variables reelles. — С. г. Acad. Sci., 1965, 260, p. 6524—6527.
 2. Determination graphique de la frontiere de stabilite d'un point d'equilibre d'une recurrence nonlineaire du deuxieme ordre a variables reelles — application au cas ou les seconds membres de la recurrence ne sont pas analytiques. — Electronics Letters, 1966, 2, № 7.
 3. Etude des points singuliers a l'infini d'une recurrence autonome du deuxieme ordre a variables reelles. — С. г. Acad. Sci., Ser. A, 1966, 263, p. 547—550.
 4. Construction de points doubles et de cycles d'une recurrence. Application a l'etude d'une bifurcation. — С. г. Acad. Sci., Ser. A, 1966, 263, p. 837—840.
- Г у м о в с к и й М. (Goumovsky M.)
1. Sur un effet non lineaire dans les amplificateurs a transistors avec reaction. — С. г. Acad. Sci., 1959, 249, p. 2514.
 2. Sur un effet non lineaire dans les amplificateurs a transistors avec reaction. — С. г. Acad. Sci., 1960, 250, p. 822.
 3. Mise en equation du comportement d'un amplificateur a transistors non lineaire (en collaboration avec J. Lagasse et Y. Sevely). — С. г. Acad. Sci., 1960, 250.
 4. Sur le comportement d'un amplificateur a transistors non lineaire au voisinage de sa limite de stabilite. — С. г. Acad. Sci., 1960, 250, p. 3142.
 5. Sur le comportement non lineaire d'un amplificateur a transistors pres de sa limite de stabilite. These. Toulouse, 1960.
 6. Calcul de la response en frequence d'un amplificateur a transistors non lineaire. — С. г. Acad. Sci., 1960, 250, p. 4322.

7. Sur la reponse transitoire des amplificateurs a transistors avec reaction. — C. r. Acad. Sci., 1961, 253, p. 1671.
 8. Calcul de la reponse transitoire a une onde caree d'un amplificateur non lineaire a transistors. — C. r. Acad. Sci., 1963, 257, p. 93.
 9. Sur le calcul iteratif des solutions analytiques reelles d'une equation differentielle fonctionnelle d'ordre un. — These. de Doctorat d'Universite (Mathematiques Appliquees). Toulouse, 1961.
 10. Sur l'existence des solutions periodiques d'une equation differentielle fonctionnelle d'ordre un. — C. r. Acad. Sci., 1963, 256, p. 4828.
 11. Sur le calcul des solutions periodiques d'une equation differentielle fonctionnelle d'ordre un. — C. r. Acad. Sci., 1963, 257, p. 2010.
 12. Sur les solutions periodiques de l'equation de Chervell-Wright. — C. r. Acad. Sci., 1964, 258, p. 416.
- Гусев Л. А.
1. Определение периодических режимов в системах автоматического регулирования, содержащих нелинейный элемент с кусочно-линейной характеристикой. — Автоматика и телемеханика, 1958, № 10.
- Гутенбаум Я. (Gutenbaum J.)
1. O wyznaczeniu parametrów pewnych wielowyniarowych nieliniowych obiektów regulacji. — Arch. Automat. i Telemechaniki, 1965, 10, z. 2.
- Гутер Р. С., Овчинский Б. В.
1. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. М., Физматгиз, 1962. 355 с.
- Давенпорт В. Б., Рут В. Л.
1. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. М., ИЛ, 1960. 468 с.
- Даус (Douce)
1. A Note on the evaluation of the response of a nonlinear element to sinusoidal and random inputs. — IEE Monograph, 1957, № 257M.
- Дезоер Ч. А. (Desoer C. A.)
1. A Generalisation of the Popov criterion. — IEEE Trans., 1965, AC-10, № 2.
- Деко, Ле Корбейе П. (Decaux, Le Corbeiller P.)
1. Sur un systeme electrique autoentretenu utilisant un tube a neop. — C. r. Acad. Sci., 1931, 193, p. 723.
- Демидович Б. П.
1. Лекция по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967. 472 с.
- Демидович Б. П., Марон И. А.
1. Основы вычислительной математики. М., Физматгиз, 1963. 659 с.
- Демух В. И.
1. Приближенный метод анализа точности нелинейных систем. — Автоматика и телемеханика, 1965, № 6.
- Денжуа А. (Denjoy A.)
1. Sur les courbes definies par les equations differentielles a la surface du tore. — J. de Math. pures et appl., 1932, 11, fasc. 4.

2. Le phenomene ergodique et les trajectoires sur le tore. — C. r. Acad. Sci., 1958, 247, № 15.
3. Les systemes d'equations differentielles periodiques. — C. r. Acad. Sci., 1958, 247, № 20.
4. Equations differentielles periodiques. — C. r. Acad. Sci., 1958, 247, № 22.
5. Sur les equations differentielles periodiques. — C. r. Acad. Sci., 1959, 248, № 1.
6. Les equations differentielles periodiques. Allure asymptotique des integrales. — C. r. Acad. Sci., 1959, 248, № 3.
7. Les equations differentielles periodiques. Allure asymptotique des integrales. — C. r. Acad. Sci., 1959, 248, № 4.
8. Les systemes differentielles periodiques. Proprietes ergodiques et stabilite des trajectoires. — C. r. Acad. Sci., 1959, 248, № 9.
9. Sur les trajectoires du tore. — C. r. Acad. Sci., 1960, 251, № 2.
10. D'apres la topologie du tore a deux dimensions dans l'espace a trois, ergodicite des trajectoires sur le tore a trois dimention dans l'espace a quatre, en l'absence de cycles. — C. r. Acad. Sci., 1965, 261, № 20.
11. D'aptes la topologie du tore a deux dimention dans l'espace a trois, ergodicite des trajectoires sur le tore a trois dimensions dans l'espace a quatre, en l'absence de cycles II. — C. r. Acad. Sci., 1965, 261, № 2.
12. Ergolicite presentee par les integrales des systemes de deux equations differentielles periodiques en l'absence de solutions cycliques. — C. r. Acad. Sci., 1965, 261, № 22.
13. Equations differentielles periodiques. Ergodicite des trajectoires. — C. r. Acad. Sci., Ser. A., 1966, 263. p. 67—68.

Д е ч Р.

1. Нелинейные преобразования случайных процессов. М., «Сов. радио», 1965. 207 с.

Д ж е й м с Х., Н и к о л ь с Н., Ф и л л и п с Р. (James H., Nichols N., Phillips R.)

1. Теория следящих систем. М., Изд. иностр. лит., 1953. 464 с.

Д ж о н с о н Г. В., Л и н д о р ф Д. Д., Н о р д л и н г Ч. Г. (Johnson G. W., Lindorff D. D., Nordling C. G.)

1. Extension of Continuous-data system design techniques to sampled-data systems. — Trans. AIEE, 1955, 74.

Д ж о п л и н г А. Д., Д ж о н с о н Р. А. (Jopling A. D., Johnson R. A.)

1. Describing Function. — IEEE Trans., 1964, AC-9, № 4.

Д ж у р и Е. И., Л и В. В.

1. Абсолютная устойчивость системы со многими нелинейностями. — Автоматика и телемеханика, 1965, № 6.
2. Теория дискретных автоматических систем (обзор). — Автоматика и телемеханика, 1970, № 6.

Д о л г о л е н к о Ю. В.

1. Устойчивость и автоколебания релейной системы регулирования с запаздыванием. — Автоматика и телемеханика, 1952, № 2.
2. Устойчивость и автоколебания одного класса релейных систем автоматического прерывистого регулирования. Инж. сб. ин-та механики АН СССР, 1952, 13.

3. О влиянии нечувствительности на динамику релейной системы непрямого регулирования. — Изв. АН СССР, ОТН, 1954.
4. Скользящие режимы в релейных системах непрямого регулирования. — Тр. 2-го Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, М., 1953, I, М. — Л., 1955.
5. Скользящие режимы в релейных системах непрямого регулирования (докт. диссертация). Л., 1955.

Доронницын А. А.

1. Решение математических и логических задач на быстродействующих ЭВМ. — Тр. Всесоюзной конференции «Пути развития советского математического машиностроения и приборостроения», М., 1956.

Доступов Б. Г.

1. Определение вероятностных характеристик линейризованных интегралов систем обыкновенных дифференциальных уравнений. — Сб. научных трудов ВВИА им. Жуковского, 1954, вып. 394.
2. Приближенное определение вероятностных характеристик решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих случайные параметры. — Тр. ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1956, вып. 592.
3. Приближенное определение вероятностных характеристик выходных координат нелинейных систем автоматического регулирования. — Автоматика и телемеханика, 1957, № 11.

Доступов Б. Г., Пугачев В. С.

1. Уравнение, определяющее закон распределения интеграла системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих случайные параметры. — Автоматика и телемеханика, 1957, № 7.

Дубошин Г. Н.

1. Основы теории устойчивости движения. М., Изд. МГУ, 1952. 319 с.

Дубровский Е. Н., Костылева Н. Е.

1. О некоторых особенностях свободного движения одного класса систем с переменной структурой. — В кн.: Техническая кибернетика. М., 1965.

Дудин Е. Б.

1. Условия переключения в комбинированных следящих системах переменной структуры. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1964, № 2.
2. Анализ комбинированных следящих систем с переменной структурой. — В кн.: Техническая кибернетика. М., 1965.

Дудин Е. Б., Уланов Г. М.

1. Комбинированные системы автоматического управления с переменной структурой. — В кн.: Тр. Международной конференции по многомерным и дискретным системам автоматического управления. Прага, 1965.

Дудников Е. Г.

1. Введение в теорию непрерывного регулирования с постоянной скоростью закрытия. — Автоматика и телемеханика, 1939, № 6.
2. О пульсирующем режиме. — Известия ВТИ, 1951, № 5.

Дымков В. И.

1. Периодические режимы в частотно-импульсных системах. — Автоматика и телемеханика, 1967, № 11.

Дюлак А.

1. Solutions d'un systeme d'equations differentielles dans le voisinage de valeurs singulieres. — Bul. Soc. math. France, 1912, 40.
2. Sur les cycles limites. — Bul. Soc. math. France, 1923, 51.
3. Recherche des cycles limites. — С. г. Acad. Sci., 1937, 204, p. 23.

Дютиль Ж. Р. (Dutilh J. R.)

1. Theorie des servomechanismes a relais. — Onde élect., 1950, 30, № 283.

Евланов Л. Г., Казаков И. Е.

1. Статистическое исследование нелинейных автоколебательных систем в установившихся режимах. — Автоматика и телемеханика, 1969, № 12.

Емельянов С. В.

1. Способ получения сложных систем регулирования с использованием лишь сигнала ошибки или регулируемой координаты и ее первой производной. — Автоматика и телемеханика, 1957, № 10.
2. Применение нелинейных корректирующих устройств типа «ключ» для улучшения качества систем автоматического регулирования второго порядка. — Автоматика и телемеханика, 1959, № 7.
3. Регулирование нейтрального объекта автоматическим регулятором с нелинейной коррекцией. — В кн.: Некоторые методы расчета систем автоматического регулирования и их элементов. Л., 1959.
4. Регулирование объекта первого порядка с запаздыванием астатическим регулятором с нелинейной коррекцией. — Автоматика и телемеханика, 1959, № 8.
5. О высококачественном управлении некоторыми нелинейными объектами с переменными параметрами. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1962, № 4.
6. Системы автоматического управления с переменной структурой. М., «Наука», 1967. 335 с.

Емельянов С. В., Бермант М. А., Уткин В. И.

1. Построение систем автоматического регулирования (САР) с переменной структурой, малочувствительных к быстрому изменению в широких пределах параметров объекта регулирования. — В кн.: Самонастраивающиеся системы. М., 1965.

Емельянов С. В., Буровой И. А., Морозова М. А., Григорьева О. А., Лодысева М. С., Лункин Б. В., Расматров А. А., Раппопорт И. А.

1. Математические модели технологических процессов и разработка систем автоматического регулирования с переменной структурой. — Сб. научн. тр. Гинцветмета, 1964, № 21.

Емельянов С. В., Гриценко М. Б.

1. Принципы построения автономных систем автоматического регулирования с переменной структурой для управления взаимосвязанными объектами. — В кн.: Тр. Международной конференции

по многомерным и дискретным системам автоматического управления. Прага, 1965.

Емельянов С. В., Костылева Н. Е.

1. О некоторых особенностях движения в САР с переменной структурой, обладающих разрывной функцией переключения. — ДАН СССР, 1963, 153, № 4.
2. Синтез систем автоматического регулирования с переменной структурой, обладающих разрывной функцией переключения. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1964, № 1.

Емельянов С. В., Таран В. А.

1. Об одном классе САР с переменной структурой. — Изв. АН СССР. Энергетика и автоматика, 1962, № 3.
2. К вопросу использования инерционных звеньев для построения одного класса систем автоматического регулирования с переменной структурой. — Автоматика и телемеханика, 1963, № 1.
3. К вопросу использования инерционных звеньев для построения одного класса систем автоматического регулирования с переменной структурой. II. — Автоматика и телемеханика, 1963, № 2.
4. О способе стабилизации систем автоматического регулирования с переменной структурой без использования воздействия по производным. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1963, № 1.
5. К вопросу построения систем автоматического регулирования с переменной структурой для линейных объектов. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1963, № 2.
6. Дополнение к статье Е. И. Геращенко. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1963, № 4.
7. Применение коммутируемых фазосдвигающих фильтров в системе автоматического регулирования с переменной структурой. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1963, № 5.
8. Стабилизация САР с переменной структурой при помощи инерционных звеньев с изменяемой постоянной времени. — Автоматика и телемеханика, 1964, № 6.

Емельянов С. В., Уткин В. И.

1. Применение систем автоматического управления с переменной структурой для управления объектами, параметры которых изменяются в широких пределах. — ДАН СССР, 1963, 152, № 2.
2. Об устойчивости движения одного класса САР с переменной структурой. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1964, № 2.

Емельянов С. В., Уткин В. И., Таран В. А.

1. О попадании изображающей точки на плоскость скольжения в системах с переменной структурой третьего порядка. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1965, № 3.

Емельянов С. В., Федотова А. И.

1. Построение оптимальных систем автоматического регулирования второго порядка с использованием предельных коэффициентов усиления контура регулирования. — Автоматика и телемеханика, 1960, № 1.

2. Создание астатизма в следящих системах с переменной структурой. — Автоматика и телемеханика, 1962, № 10.
 3. Воспроизведение управляющего воздействия астатическими следящими системами с переменной структурой. — Автоматика и телемеханика, 1965, № 1.
 4. Об астатическом воспроизведении трансцендентных функций следящими системами с переменной структурой. — Автоматика и телемеханика, 1965, № 3.
- Е р у г и н Н. П.**
1. Об асимптотической устойчивости решения некоторой системы дифференциальных уравнений. — Прикл. матем. и механ., 1948, 12, вып. 2.
 2. О некоторых вопросах устойчивости движения в качественной теории дифференциальных уравнений в целом. — Прикл. матем. и механ., 1950, 14, вып. 5.
 3. Об одной задаче теории устойчивости системы автоматического регулирования. — Прикл. матем. и механ., 1952, 16, вып. 5.
 4. Методы А. М. Ляпунова и вопросы устойчивости в целом. — Прикл. матем. и механ., 1953, 17, вып. 4.
 5. Методы решения вопросов устойчивости в большом. — В кн.: Тр. 2-го Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. Москва, 1953, М.—Л., 1955.
- Е р ш о в Б. А.**
1. Об устойчивости в целом некоторой системы автоматического регулирования. — Прикл. матем. и механ., 1953, 17, вып. 1.
 2. Метод оценок при исследовании устойчивости нелинейных регулируемых систем. — Уч. зап. ЛГУ. Сер. матем. наук, 1957, вып. 31.
- Ж а н М. (Jean M.)**
1. Un critere d'existence, d'unicite et de convergence asymptotique des solutions periodiques d'une equation differentielle. — In: Colloque International du C. N. R. S. sur les vibrations forcees dans les systemes non lineaires. Marseille, 1964.
- Ж е в а к и н С. А.**
1. Об отыскании предельных циклов в системах, близких к некоторым нелинейным. — Прикл. матем. и механ., 1951, 15, вып. 2.
- Ж е л е з ц о в Н. А.**
1. Метод точечного преобразования и задача о вынужденных колебаниях осциллятора с комбинированным трением. — Прикл. матем. и механ., 1949, 13, № 1.
- Ж и л ь Ж., Деколън П., Пелегрин М. (Gille G., Decaulne P., Pelegrin M.)**
1. Теория и техника следящих систем. М., Машгиз, 1961. 804 с.
- Ж и л ь ц о в К. К.**
1. О гармонической линеаризации систем с логическим законом управления. — Автоматика и телемеханика, 1966, № 2.
 2. К вопросу о частотных свойствах нелинейных логических звеньев. — Автоматика и телемеханика, 1968, № 3.
- З а д э Л. А. (Zadeh L. A.)**
1. On the identification problem. — Trans. IRE, 1956, СТ-3, № 4.

З ал м а н з о н Л. А.

1. Автоколебания в системах с пневматическими регуляторами, содержащими глухие камеры. — В кн.: Тр. 2-го Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. Москва, 1953, М.—Л., 1955.
2. Об учете влияния нелинейности характеристик глухих камер пневморегуляторов. — Автоматика и телемеханика, 1955, № 6.

З ей м с Г. (Zames G.)

1. Functional analysis applied to nonlinear feedback systems. — IEEE Trans., 1963, **CT-10**, № 3.
2. On the stability of nonlinear. Time-varying feedback systems. — Proc. Nat. Electronics Conf., 1964, **20**.
3. Nonlinear time varying feedback systems — Proc. 1965. Allerton Conf., p. 460—471.
4. On the input-output stability of time varying nonlinear feedback systems. Part I: Conditions derived using concepts of Loop gain, conicity, and positivity. — IEEE Trans., 1966, **AC-11**, № 2. Part II: Conditions involving circles in the frequency plane and sector nonlinearities. — IEEE Trans., 1966, **AC-11**, № 3.
5. On the stability of systems with monotone and odd monotone nonlinearities. — IEEE Trans., 1967, **AC-12**, № 2.

З ей м с Г., Ф а л ь б П. Л. (Zames G., Falb P. L.)

1. Stability conditions for systems with monotone and slope-restricted nonlinearities. — In: Proc. Conference on Mathematical System Theory. Los Angeles, 1967.

З ем с к о в В. А.

1. Об одном аналитическом подходе к исследованию автоматических систем с помощью логарифмических частотных характеристик. — Автоматика и телемеханика, 1970, № 8.

З и е м б а С. (Ziemba S.)

1. Free vibration with damping of marked nonlinear character. — Arch. mechan. Stosowanej, 1957, **9**, № 5.
2. The influence of viscosity damping on the form of the trajectory of free vibration. — Arch. mechan. Stosowanej, 1957, **9**, № 4.
3. Free vibration of systems of one degree of freedom with nonlinear elastic characteristic and nonlinear viscous-type damping. — Arch. mechan. Stosowanej, 1958, **10**, № 2.

З у б о в В. И.

1. Методы А. М. Ляпунова и их применение. Л., Изд-во ЛГУ, 1957. 241 с.
2. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л., Судпромгиз, 1959. 324 с.
3. Колебания в нелинейных и управляемых системах. Л., Судпромгиз, 1962. 631 с.

И в а н а г а М. (Iwanaga M.)

1. The Improvement of an on-off control system by a simple CR-network. — J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 1962, **6**, № 9.

И в е н с Р. (Iwens R.)

1. Bounds on the responses of nonlinear control systems. — J. Franklin Inst., 1968, 275, № 4.

И з а в а К. (Izawa K.)

1. Discontinuous feedback control systems with sampling action. — Proc. of the First Internat. Congr. of IFAC. Moscow, 1960. 1. London, 1961.
2. On-off type control with sampling action. — J. Soc. Instrum. and Control Engrs., 1962, 1, № 4.
3. On-off control. — In: The Japan Society of Mechanical Engineers, Year Book, 1968.

И н в е р с о н Д. Р. (Ingwerson D. R.)

1. A Modified Lyapunov method for nonlinear stability problems. Thesis. — Trans. IRE, 1961, АС-6, № 3.

И о н е з а в а Я., Г о р о м а р у Т. (Yonezawa Y., Goromaru T.)

1. The Experimental study on a feedback-compensated on-off control. — Trans. Soc. Instrum. and Control Engrs., 1967, 3, № 2.

И о с и ф ь я н А. Г., К а г а н Б. М.

1. Основы следящего привода. М.—Л., Госэнергоиздат, 1954. 596 с.

И о ш и з а в а Т. (Yoshizawa T.)

1. On the equiasymptotic stability in the large. — Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A, 1959, 32.
2. Liapunov's function and boundedness of solutions. — Funkcialaj Ekvacioj, 1959, 12.
3. Stability of sets and perturbed system. — Funkcialaj Ekvacioj, 1962, 15.

И т к и с Ф. Ф.

1. Некоторые вопросы устойчивости систем с переменной структурой, работающих в условиях помех. — В кн.: Кибернетика и управление. М., 1965.

И т о М. (Ito M.)

1. On the discontinuous damping compensation for the saturating servomechanisms. — J. Inst. Electr. Engrs. Japan, 1962, 82, № 882.
2. Response characteristics of discontinuous damping servomechanism for some inputs. — J. Soc. Instrum. and Control Engrs., 1962, 1, № 7.
3. Automatic control systems with nonlinear controllers. — J. Soc. Instrum. and Control Engrs., 1963, 2, № 2.

И ш и к а в а К. (Ichikawa K.)

1. Performance of gain-saturated control system, and the numerical analysis of the indicial response. — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1963, 29, № 197.
2. Analysis of nonlinear control system by asymptotic method. — J. Soc. Instrum. and Control Engrs., 1964, 2, № 5.
3. Control system with dead time. — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1964, 30, № 215.
4. A Method to find stable region of nonlinear system. — Res. Rept. Autom. Control Lab. Fac. Engineering, Nagoya University, 1969, 16.
5. Asymptotic analysis of nonlinear control systems with dead time and of higher order nonlinear systems. — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1964, 30, № 218.

6. Analysis and control of hard oscillation system. — Trans. Soc. Instrum. and Control Engrs., 1965, 1, № 2.
7. Frequency responses of gain-saturated control system. — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1965, 31, № 230.

Каган Б. М.

1. Частотный метод построения и исследования переходных процессов в нелинейных системах автоматического регулирования. — В кн.: Тр. 2-го Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. Москва, 1953, 2. М. — Л., 1955.

Кадымов Я. Б.

1. Расчет переходных процессов электропривода, включающего звенья с распределенными параметрами. — Изв. АН СССР. ОТН. Энергетика и автоматика, 1960, № 3.

Кадымов Я. Б., Лихтенгартен Б. А.

1. Некоторые вопросы теории электроприводов, включающих звенья с распределенными параметрами. — Тр. Энерг. ин-та АзербССР, 1962, 15.
2. Приближенный метод расчета переходных процессов в системах автоматического регулирования, включающих звенья с распределенными параметрами. — Автоматика и телемеханика, 1964, № 4.

Казакевич В. В.

1. Многократные системы и простейшие динамические модели часов. — ДАН СССР, 1950, 74, № 4.
2. К теории спусковых регуляторов. — Автоматика и телемеханика, 1951, № 1.
3. Об автоколебаниях, порождаемых в системах регулирования падающими характеристиками трения в сервомоторах. — Автоматика и телемеханика, 1952, № 6.

Казак И. Е.

1. Приближенный метод статистического исследования нелинейных систем. — Тр. ВВИА им. Жуковского, 1954, вып. 394.
2. Приближенный вероятностный анализ точности работы существенно нелинейных систем. — Автоматика и телемеханика, 1956, № 5.
3. Некоторые вопросы теории статистической линеаризации и ее приложений. М., Изд-во АН СССР, 1960. 12 с.
4. Статистический анализ систем с многомерными нелинейностями. — Автоматика и телемеханика, 1965, № 3.
5. Обобщение метода статистической линеаризации на многомерные системы. — Автоматика и телемеханика, 1965, № 7.
6. Определение законов распределения переменных нелинейной стохастической системы. — Автоматика и телемеханика, 1965, № 11.
7. Статистическая линеаризация однозначных и неоднозначных нелинейностей со случайными параметрами. — В кн.: Тр. 3-го Всесоюзного совещания по автоматическому управлению. Одесса, 1965. М., 1967.
8. Статистический анализ систем с неоднозначными нелинейностями. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1966, № 2.

9. Статистическое исследование нелинейных систем со случайными параметрами. — В кн.: Докл. на 3-м Конгрессе ИФАК. Лондон, 1966.
10. Исследование законов распределения координат нелинейных замкнутых систем. — В кн.: Доклады на Всесоюзном симпозиуме по применению вероятностных методов в кибернетике. М., «Наука», 1966.
11. Методы исследования нелинейных систем управления, основанные на статистической линеаризации. — В кн.: Современные методы проектирования систем автоматического управления. М., 1967.

К а з а к о в И. Е., Д о с т у п о в Б. Г.

1. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем, М., Физматгиз, 1962. 332 с.

К а л м а н Р. Е. (Kalman R. E.)

1. Phase-plane analysis of automatic control systems with nonlinear gain elements. — Trans. Amer. Inst. Engrs., 1955, part II, 74. № 16.
2. Analysis and design principles of second and higher order saturating servomechanisms. — Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs., 1955, part II, 74.
3. Physical and mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems. — Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs., 1957, 79, № 3.
4. Liapunov functions for the problem of Lurje in automatic control. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1963, 49, № 2.

К а л м а н Р. Е., Б е р т р а м И. Е. (Kalman R. E., Bertram I. E.)

1. Control systems analysis and design via the second method of Lyapunov. Part I. — Trans. ASME. Ser. D, J. Basic Eng., 1960, 82.

К а м е н к о в Г. В.

1. Исследования одного особенного, по Ляпунову, случая задачи устойчивости движения. — Сб. научн. тр. Казанск. авиац. ин-та, 1934, № 3.
2. Об устойчивости движения в одном особом случае. — Сб. научн. тр. Казанск. авиац. ин-та, 1935, № 4; 1936, № 5.
3. Об устойчивости движения. — Сб. научн. тр. Казанск. авиац. ин-та, 1939, № 9.
4. Об устойчивости движения на конечном интервале времени. — Прикл. матем. и механ., 1953, 17, вып. 5.

К а н Д. А. (Kahn D. A.)

1. An Analysis of relay servomechanisms. — Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs., 1949, part II, 68.

К а н н и н г х э м В. Дж. (Cunningham W. J.)

1. Introduction to nonlinear mechanics. Edwards J. W. Publisher, Inc. Ann Arbor, 1947.

К а п л а н В. (Kaplan W.)

1. Stability theory. — In: Proc. Symp. on Nonlinear Circuit Theory Analysis. Brooklyn, N. Y., 1956.

К а р а ч а р о в К. А., П и л ю т н и к А. Г.

1. Введение в техническую теорию устойчивости движения. М., Физматгиз, 1962. 243 с.

К а с п р ж и к С. (Kasprzyk S.)

1. Pewne zagadnienia z globalnej asymptotycznej stabilności. — In: Prace 4 Krajowej Konferencji Automatyki. I. Kraków, 1967.

К а с т е р с Н., М у р Дж.

1. Обобщение метода частотных характеристик, применяемого для исследования систем автоматического регулирования. — В кн.: Сб. материалов конференции в Кренфилде, 1951. М., 1954.

К а т ц И. И., К р а с о в с к и й Н. Н.

1. Устойчивость систем со случайными параметрами. — Прикл. матем. и механ., 1960, № 24.

К а ц А. М.

1. К вопросу о вычислении квадратичного критерия качества регулирования. — Прикл. матем. и механ., 1952, 16, вып. 3.

К е н и г М. (Koenigs M.)

1. Recherches sur les substitutions uniformes. — Bull. sci. math., 1883, 7.
2. Recherches sur les equations fonctionnells. — Ann. scient. École norm. supér., 3 ser., 1884, I.

К и н я п и н С. Д., Н е й м а р к Ю. И.

1. Об устойчивости состояния равновесия релейной системы. — Автоматика и телемеханика, 1959, № 9.

К и с е л е в И. К.

1. Исследование динамики некоторых регуляторов, имеющих типичные нелинейные характеристики и запаздывание. — Тр. Моск. энерг. ин-та, 1956, вып. 28.

К и с л я к о в В. С.

1. Обоснование применения методов гармонической линеаризации для исследования периодических колебаний систем с запаздыванием. — Автоматика и телемеханика, 1960, № 11.

К и т а м у р а С. (Kitamura S.)

1. Stability problem of a multivariable control system with nonlinear elements and time lags via the direct method of Lyapunov. — J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 1966, 10, № 12.

К л а у з е р Ф. (Clauser F. H.)

1. The Transient Behavior of Nonlinear Systems. — Trans. IRE, 1960, CT-7, dec.

К о б а я ш и С., И х и к а в а К. (Kobayashi S., Ichikawa K.)

1. Some properties of servomechanism with saturable gain. — J. Soc. Instrum. and Control Engrs., 1962, 1, № 8.
2. Forced oscillations in the servomechanism with colomb friction and static friction. — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1963, 29, № 200.

К о б з а р е в Ю. Б.

1. О квазилинейном методе трактовки явлений в генераторе. — Журн. техн. физики, 1935, вып. 2.

К о л м о г о р о в А. Н.

1. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей. — Изв. АН СССР, серия математическая, 1941, 5, №№ 1, 3.
2. Статистическая теория колебаний с непрерывным спектром. — Юбилейный сборник АН СССР, 1947, ч. 1.

Коловский М. З.

1. О выборе закона распределения при линеаризации нелинейных дифференциальных уравнений. — Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1964, № 235.

Коловский М. З., Первозванский А. А.

1. Об устойчивости решений, находимых по методу статистической линеаризации. — Изв. АН СССР. ОТН. Сер. «Механика и машиностроение», 1963, № 1.

Комарницкая О. И.

1. Устойчивость регулируемых систем с учетом внешней нагрузки гидравлического сервомотора. — Автоматика и телемеханика, 1965, № 7.

Кондо Б., Иваи С. (Kondo B., Iwai S.)

1. Analytical approaches to non-linear sampled-data control systems. — In: Proc. of the Second Internat. Congr. of IFAC. Basel, 1963.
2. Analysis of oscillations in contactor control systems employing sampled — data. — J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 1964, 8, № 7.

Конonenko В. О.

1. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М., «Наука», 1964.

Корнилов Ю. Г.

1. О влиянии нечувствительности регулятора на динамику прямого регулирования. — Автоматика и телемеханика, 1960, № 1.

Королев Н. А.

1. О периодических режимах в релейных системах с внутренней обратной связью. — Автоматика и телемеханика, 1956, № 11.
2. Приближенное определение параметров автоколебаний в релейных системах с замедленной обратной связью. — Автоматика и телемеханика, 1959, № 11.

Костенко М. В.

1. Метод подкасательной в применении к расчетам перенапряжений. — Электричество, 1939, № 1.
2. К вопросу о графическом интегрировании некоторых дифференциальных уравнений. — Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1948, № 3.

Костюковский Ю. М.

1. Алгоритм последовательной оценки состояния нелинейной системы и функции Ляпунова. — Автоматика и телемеханика, 1970, № 6.

Костылева Н. Е.

1. Применение систем автоматического регулирования с переменной структурой для управления объектами с нулями в передаточной функции. — В кн.: Теория и применение автоматических систем. М., 1964.
2. Система управления минимально-фазовыми объектами с переменными параметрами с нулями в передаточной функции. Авторское свидетельство № 165492. — Бюллетень изобретений, № 19, 1964.

Костылева Н. Е., Уткин В. И.

1. Квазиинвариантные системы автоматического управления с переменной структурой. — В кн.: Тезисы докладов 3-го Всесоюз-

- ного совещания по автоматическому управлению (техн. кибернетике). М., 1965.
- Котельников В. А.
1. Продольная устойчивость самолета с автопилотом. — Тр. ЛИИ, 1941, № 2.
- Коттон Е. (Kotton E.)
1. Sur les solutions asymptotiques des equations differentielles. — Ann. scient. École norm. supér., 1911, 28.
 2. Sur la notion de nombre caracteristique de M. Liapunov. — Ann. scient. École norm. supér. (3), 1919, 36.
- Коченбургер Р. (Kochenburger R.)
1. Analyzing contactor servomechanisms. — Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs., 1950, 69, № 8.
 2. A Frequency method for analyzing and synthesing contactor Servomechanisms. — Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs., 1950, part 1, 69.
- Красносельский М. Л., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С.
1. Нелинейные почти периодические колебания. М., «Наука», 1970. 351 с.
- Красовский А. А.
1. О степени устойчивости линейных систем. М., Изд-во ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1948. 23 с.
 2. О вибрационном способе линеаризации некоторых нелинейных систем. — Автоматика и телемеханика, 1948, № 1.
 3. Интегральные оценки качества процесса регулирования. Лекция. М., Машгиз, 1949. 24 с.
 4. Интегральные оценки и выбор параметров систем автоматического регулирования. — В кн.: Автоматическое регулирование. Теория. М., Машгиз, 1954.
 5. Статистическая устойчивость движения нелинейных динамических систем и интегральные оценки моментов. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1965, № 4.
 6. Достаточные условия статистической устойчивости движения. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1966, № 2.
 7. Статистическая устойчивость и интегральные оценки процессов в нелинейных системах. — В кн.: Тр. 3-го Всесоюзного совещания по автоматическому управлению (техн. кибернетике). М., 1967.
 8. Статистическая теория переходных процессов в системах управления. М., «Наука», 1968. 240 с.
- Красовский А. А., Поспелов Г. С.
1. Некоторые методы вычисления приближенных временных характеристик линейных систем автоматического регулирования. — Автоматика и телемеханика, 1953, № 6.
 2. Основы автоматки и технической кибернетики. М — Л., Госэнергоиздат, 1962. 600 с.
- Красовский Н. Н.
1. Теоремы об устойчивости движений, определяемых системой двух уравнений. — Прикл. матем. и механ., 1952, 16, вып. 5.
 2. Об устойчивости при любых начальных возмущениях решений одной нелинейной системы трех уравнений. — Прикл. матем. и механ., 1953, 17, вып. 3.

3. Об устойчивости в целом решения нелинейной системы дифференциальных уравнений. — Прикл. матем. и механ., 1954, 18, вып. 4.
 4. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959, 211 с.
 5. Об одной задаче оптимального регулирования нелинейных систем. Прикл. матем. и механ., 1959, 23, вып. 5.
- Криволицкий В. А.**
1. Некоторые нелинейные задачи в динамике регулирования. — Тр. Ленингр. Воен.-Воздушн. инж. акад., 1948, вып. 17.
- Кринецкий И. И.**
1. Упрощенный расчет некоторых нелинейных систем. — В кн.: Тр. 2-го Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. М. — Л., 1955.
 2. Расчет нелинейных автоматических систем. Киев, Гостехиздат УССР, 1962. 227 с.
- Круг Г. К.**
1. Некоторые вопросы влияния нелинейностей на характеристики следящего привода. — В кн.: Тр. 2-го Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. I. М. — Л., 1955.
 2. К вопросу применения метода Гольдфарба. — В кн.: Метод Гольдфарба в теории регулирования (сб. статей). М. — Л., Госэнергоиздат, 1962. 224 с.
- Круг Е. К., Минина О. М.**
1. Об особенностях исследования динамических свойств нелинейных систем с неустойчивым звеном. — Автоматика и телемеханика, 1955, № 6.
- Крутова И. Н.**
1. Динамика вибрационного сервомеханизма электрического автопилота. — Автоматика и телемеханика, 1959, № 2.
 2. Динамика вибрационного контура электрического сервомеханизма в режиме свободных колебаний. — Автоматика и телемеханика, 1959, № 4.
 3. Исследование периодических движений, возникающих в вибрационном контуре электрического сервомеханизма при постоянном возмущении. — Автоматика и телемеханика, 1959, № 5.
- Крылов А. Н.**
1. Лекции о приближенных вычислениях. М. — Л., Гостехиздат, 1950. 400 с.
 2. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах. М. — Л., Гостехиздат, 1950. 368 с.
- Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.**
1. Новые методы нелинейной механики в их применении к изучению работы электрических генераторов. Ч. I. М. — Л., Гостехиздат, 1934. 243 с.
 2. Введение в нелинейную механику. Киев, Изд-во АН УССР, 1937, 364 с.
- Крюкшанк А. Дж. (Cruikshank A. Y. O.)**
1. A Note on the time series and the use of gump functions in approximate analysis. — Proc. IEE, 1955, part C, 102, № 2.

Ку Я. (Ку У. Н.)

1. Nonlinear analysis of electromechanical problems. — J. Franklin Inst., 1953, 255.
 2. A method of solving third and higher order nonlinear differential equations. — J. Franklin Inst., 1953, 256.
 3. Acceleration plane method for nonlinear oscillations. — In: Proc. Symposium on Nonlinear Circuit Analysis. Brooklyn, N. Y., USA, 1953.
 4. Acceleration plane method for analysis of a circuit with nonlinear inductance and nonlinear capacitance. — Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs., 1955, part I, 74.
 5. Analysis of multi-loop nonlinear systems. — Trans. IRE, 1954, CT-1, № 4.
 6. Analysis of nonlinear coupled circuits. — Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs., 1955, part I, 74, № 16.
 7. Analysis of nonlinear systems with more than one degree of freedom by means of space trajectories. — J. Franklin Inst., 1955, 259.
 8. Boundary layer problems solved by the method of nonlinear mechanics. — In: Proc. Ninth International Congress of Applied Mechanics. 4. Brussels, 1956.
 9. Analysis of servomechanisms with nonlinear feedback control. — Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs., 1956, part II, 75.
 10. The phase-space method for analysis of nonlinear control systems. — Trans. ASME, 1957, 79.
 11. Analysis and control of nonlinear systems. New York, Ronald, 1958. 360 p.
 12. On nonlinear networks with random inputs. — Trans. IRE, 1960, CT-7, № 4.
 13. Theory of nonlinear control. — J. Franklin Inst., 1961, 271.
 14. On nonlinear oscillations in electromechanical systems. — J. Franklin Inst., 1961, 272.
 15. Taylor — Cauchy transforms for analysis of varying-parameter systems. — Proc. IRE, 1961, 49, № 6.
 16. Formulation of Liapunov functions of nonlinear systems for stability studies. — In: Proc. First Allerton Conference on Circuit and System Theory, 1963.
 17. Lyapunov function of a fourth-order system. — IEEE Trans., 1964, AC-9, № 3.
 18. On Stability of some fourth-order nonlinear systems with forcing functions. — In: Proc. International Colloquium on Forced Vibrations in Nonlinear Systems, Marseilles, 1964.
 19. Stability and boundedness considerations in some nonlinear systems. — In: Proc. National Electronics Conference. Chicago, Ill., 1965, 21.
 20. Lyapunov function of a high-order system. — Proc. IEEE, 1966, 54, № 12.
 21. Heat transfer problems solved by the method of nonlinear mechanics. — Internat. J. Nonlinear Mech. 1966, 1.
- Ку Я., Вольф А. А. (Ку У. Н., Wolf A. A.)
1. A Stability criterion for nonlinear systems. — Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs., 1959, part II, 78.

- 2 Transform ensemble method for analysis of linear and nonlinear systems with random inputs. — In: Proc. National Electronics Conference. Chicago, Ill., 1959, 15.
- Ку Я., Вольф А. А., Китц Дж. (Ku Y. H., Wolf A. A. and Kietz J. H.)
1. Taylor — Cauchy transforms for analysis of a class on nonlinear systems. — Proc. IRE, 1960, 48, № 5.
- Ку Я., Меккель Р., Су К. К. (Ku Y. H., Mekel R. and Su C. C.)
1. Stability and design of nonlinear control systems via Liapunov's criterion. — IEEE International Convention Record., 1964, 12, pt. I.
- Ку Я., Пурри Н. (Ku Y. H., and Puri N.)
1. On Liapunov functions of high order nonlinear systems. — J. Franklin Inst., 1963, 276, № 5.
- Ку Я., Чен Ч. (Ku Y. H., and Chen C. F.)
1. Stability study of a third-order servomechanisms with multiplicative feedback control. — Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs., 1958, part II, 72.
 2. Liapunov approach to stability and performance on nonlinear control systems. — In: Work Session in Lyapunov's Second Method. Ann. Arbor, Mich., 1960.
 3. Partition of the phase space as criterion for stability and performance of nonlinear control systems. — In: Proc. Second Conference on Nonlinear Vibrations. Warsaw, 1963.
- Ку Я., Чи Х. (Ku Y. H. and Chieh H. T.)
1. Extension of Popov's theorems for stability of nonlinear control systems. — J. Franklin Inst., 1965, 279.
 2. New theorems on absolute stability of nonautonomous nonlinear control systems. — IEEE International Convention Record, 1966, 14, pt. 7.
 3. Stability of control systems with multiple nonlinearities and multiple inputs. — J. Franklin Inst., 1966, 282, № 6.
- Куwahara М. (Kuwahara M.)
1. Oscillations in relay servomechanisms with coulomb friction. — J. Inst. Electr. Engrs. Japan, 1961, 81, № 878.
 2. Self-sustained oscillation of servomechanism with backlash and nonlinear friction. — J. Inst. Electr. Engrs. Japan, 1962, 82, № 881.
- Куwahara М., Watanabe Р. (Kuwahara M., Watanabe R.)
1. Linearization of nonlinear friction in servomechanism. — J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 1965, 9, № 8.
- Куwahara М.; Hirai К. (Kuwahara M., Hirai K.)
1. Self-excited oscillation of relay servomechanism with colomb friction and its Graphical solution. — J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 1962, 6, № 3.
- Кудревич Я. (Kudrewicz J.)
1. Badanie stabilnosci nieliniowych methodami analisy Sunctionalnej. — Arch. Elektrotechniki, 1961, 10, № 1.
 2. O pewnej metodzie badania stabilności nieliniowych układów elektrycznych. — Arch. Elektrotechniki, 1961, 10, № 2.
 3. Zastosowanie metod analisy funkcyjnej do badania stabilności nieliniowych układów elektrycznych. — Rozpr. Elektrotechniczne, 1963, 9, № 1—2.

4. Stabilność nieliniowych układów impulsowych. — Arch. Automat. i Telemekhaniki, 1964, 9, z. 3.
 5. Powstawanie drgań okresowych w układach nieliniowych. — Arch. Automat. i Telemekhaniki, 1966, 11, z. 4.
 6. Stabilność układów zawierających zmienny w czasie prawie okresowo. — In: Prace 4 Krajowej Konferencji Automatyki. I. Kraków, 1967.
- Кудрявцев Ю. А.
1. Применение одного класса систем автоматического регулирования с переменной структурой. — В кн.: Техническая кибернетика. М., 1965.
 2. Синтез систем переменной структуры с коммутируемыми фазосдвигающими фильтрами. — В кн.: Кибернетика и управление. М., 1967.
- Кузнецов П. И., Стратонович Р. А., Тихонов В. И.
1. Прохождение случайных функций через нелинейные системы. — Автоматика и телемеханика, 1953, № 4.
- Кузовков Н. Т.
1. Составление и преобразование структурных схем для систем автоматического регулирования. — Уч. зап. МГУ, 1954, вып. 172.
- Кузьмин Л. П.
1. Графоаналитический способ определения характеристик релейной системы. — Автоматика и телемеханика, 1958, № 4.
- Кулебакин В. С.
1. К теории автоматических вибрационных регуляторов для электрических машин. — Теорет. и эксперимент. электротехника, 1932, № 4.
 2. К теории автоматических вибрационных регуляторов для электрических машин. — Теорет. и эксперимент. электротехника, 1937, № 4.
 3. Общие основы автоматического регулирования. — Автоматика и телемеханика, 1940, № 4.
 4. Об определении основных параметров автоматических регуляторов. — Автоматика и телемеханика, 1940, № 6.
- Кули В., Кларк Р., Букнер Р. (Cooley V., Clark R., Buchner R.)
1. Stability in linear systems having a time variable parameter. — IACC, 1964.
- Кумагаи С., Нагата А. (Kumagai S., Nagata A.)
1. Optimal control of saturating sampled-data control systems. — J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 1963, 7, № 4.
- Кунцевич В. М.
1. Исследование устойчивости многомерной системы управления с частотно-импульсной модуляцией прямым методом Ляпунова. — Автоматика и телемеханика, 1968, № 9.
- Куприянова Л. И.
1. Об устойчивости одной нелинейной системы регулирования с нейтральным объектом. — Автоматика и телемеханика, 1959, № 2.
- Курман К. (Kurman K.)
1. Płaszczyzna energetyczna — pewna modyfikacja płaszczyzny fazowej. — Arch. Automat. i Telemekhaniki, 1959, 4, z. 3—4.

Курцвейль Я. (Kurzweil I.)

1. On the reversibility of the first of Lyapunov concerning the stability of motion. — Casop. pestov, mat., 1955, 5 (80).

Кюэно М. (Cuenod M.)

1. Methode de calcul a l'aide de suites. Thèse. Lausanne, 1955. 75 p.

Ла-Салль Ж. П.

1. Новое понятие устойчивости. — В кн.: Тр. 2-го Конгресса ИФАК. Базель, 1964. М., 1965.

Ла-Салль Ж. П., Лефшец С.

1. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М., «Мир», 1964. 168 с.

Латт С. (Lattes S.)

1. Sur les quations fonctionnelles qui de finissent une courbe ou une surface invariante une transformation. — Ann. Mat., 1906, 3 ser., 13.

Лаубер Р.

1. Новый метод определения описывающей функции некоторых нелинейных систем. В кн.: Тр. 2-го Конгресса ИФАК. Базель, 1964. М., 1965.

Левандовский А. (Lewandowski A.)

1. An investigation of the alternating character of free non-linear vibration by means of comparison. — Arch. mechan. Stosowanej, 1958, 10, № 1.

Ле-Корбее П. (Le Corbeiller P.)

1. Les systemes autoentretenus et les oscillations de relaxation. Paris, Hermann, 1931. 46 p.
2. Le mecanisme de la production des oscillations. — Ann. Postes, Telegraphes et Teleph., 1932, 21.

Леонард А. (Leonard A.)

1. Stabilitats kriterium insbeson dere von regelkreisen bei vorgeschriebener stabilitat tsatgute. — Arch. Electrotechn., 1948, Н. 2, 3.
2. Относительное демпфирование как критерий устойчивости, а также как средство для нахождения корней полинома Гурвица. — В кн.: Автоматическое регулирование. Сб. материалов конференции в Кренфилде, 1951. М., 1954.

Леоте А. (Leaute H.)

1. Memoires sur les oscillations a longues periodes dans les machines actionnee par des moteurs hydrauliques et sur les moyens de prevenir ces oscillations. — J. Ecole Polytechn., 1885, 55.
2. Du mouvement trouble des moteurs consecutifs a une perturbation brusque. Nouvelle methode graphique pour l'etude complete de ce mouvement. — J. Ecole Polytechn., 1891, 61.

Летов А. М.

1. К задаче об автопилоте. Канд. дисс. М., 1946.
2. К задаче об автопилоте. — Вестник МГУ, 1946, № 1.
3. К теории изодромного регулятора. — Прикл. матем. и механ., 1948, 12, вып. 4.
4. Регулирование стационарного состояния системы, подверженной действию постоянных возмущающих сил. — Прикл. матем. и механ., 1948, 12, вып. 2.

5. К теории изодромного регулятора. — Прикл. матем. и механ., 1948, 12, вып. 4.
 6. Об одном особом случае исследования устойчивости систем регулирования. — Прикл. матем. и механ., 1948, 12, вып. 4.
 7. Собственно неустойчивые регулируемые системы. — Прикл. матем. и механ., 1950, 14, вып. 2.
 8. Граничные значения наименьшего характеристического числа одного класса регулируемых систем. — Прикл. матем. и механ., 1951, 15, вып. 5.
 9. Устойчивость регулируемых систем с двумя исполнительными органами. — Прикл. матем. и механ., 1953, 17, вып. 4.
 10. К теории качества нелинейных регулируемых систем. — Автоматика и телемеханика, 1953, № 5.
 11. Метод малого параметра в теории автоматического регулирования. — В кн.: Основы автоматического регулирования. М., 1954.
 12. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. М., Гостехиздат, 1955. 312 с.
 13. Состояние проблемы устойчивости в теории автоматического регулирования (обзор). — В кн.: Тр. 2-го Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. Москва, 1953. 1. М. — Л., 1955.
 14. Устойчивость и качество нелинейных систем автоматического регулирования. — В кн.: Итоги науки. Технические науки. I. М., 1957.
 15. Условно устойчивые регулируемые системы (об одном классе оптимальных регулируемых систем). — Автоматика и телемеханика, 1957, № 7.
 16. Проблема качества для нелинейных авторегулируемых систем с квадратичной метрикой. — Изв. АН СССР. ОТН. Энергетика и автоматика, 1959, № 3.
 17. On the Theory of nonlinear control systems. — Contribution to differential equations. USA, 1961, 1, № 2.
 18. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. Изд. 2-е испр. и дополн., М., Физматгиз, 1962. 483 с.
 19. Проблема качества для нелинейных авторегулируемых систем с квадратичной метрикой. — Изв. АН СССР. ОТН. Энергетика и автоматика, 1959, № 3.
- Летов А. М., Дувакин А. П.
1. Об устойчивости регулируемых систем с двумя регулирующими органами управления. — Прикл. матем. и механ., 1954, 18, вып. 2.
- Летов А. М., Лурье А. И.
1. Состояние и задачи развития теории устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования. — В кн.: Основные проблемы автоматического регулирования и управления. М., 1957.
- Лефевр К., Ришале Ж.
1. Энергетические критерии устойчивости. — Автоматика и телемеханика, 1968, № 4.
- Лефшец С. (Lefschetz S.)
1. Lyapunov and stability in dynamical systems. — Bull. Soc. Math. Mech., 1958, 3.

Лехтман И. Я.

1. К расчету релейных следящих систем. — Автоматика и телемеханика, 1951, № 1.

Лившиц Н. А., Пугачев В. Н.

1. Вероятностный анализ систем автоматического управления. т. 2. М., «Сов. радио», 1963.

Ли Хун-Джинг (Li Xan-Jing)

1. On the absolute stability of systems with time lags. — Acta math. Sinica, 1963, 13, № 4.

Лоэб Ж. Д. (Loeb J. D.)

1. De la mecanique lineaire a la mecanique nonlineaire. — Ann. télécommuns., 1950, 5, № 2.

Лукомская А. М.

1. Библиографический указатель печатных трудов и материалов о жизни и деятельности А. М. Ляпунова. — В кн.: Ляпунов А. М. Избранные труды. М., 1948.

Лурье А. И.

1. Об устойчивости одного класса регулируемых систем — Прикл. матем. и механ., 1945, 9, № 5.

2. Влияние силы трения в измерительном органе регулятора на процесс непрямого регулирования. — Сов. котлогурбостроение, 1946, № 3.

3. Об автоколебаниях в некоторых регулируемых системах. — Автоматика и телемеханика, 1947, № 5.

4. Об устойчивости движения одной динамической системы. — Прикл. матем. и механ., 1947, 11, № 4.

5. Об устойчивости автоколебаний регулируемых систем. — Автоматика и телемеханика, 1948, № 1.

6. О канонической форме уравнений теории автоматического регулирования. — Прикл. матем. и механ., 1948, 12, № 5.

7. О характере границ области устойчивости регулируемых систем. — Прикл. матем. и механ., 1950, 14, вып. 4.

8. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М. — Л., Гос. изд. техн.-теорет. лит., 1951. 216 с.

9. К задаче об устойчивости регулируемых систем. — Прикл. матем. и механ., 1951, 15, вып. 1.

10. О собственно неустойчивых регулируемых системах. — Прикл. матем. и механ., 1951, 15, вып. 2.

11. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. — В кн.: Тр. 2-го Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. Москва, 1953. I. М. — Л., 1955.

Лурье А. И., Постников В. Н.

1. К теории устойчивости регулируемых систем. — Прикл. матем. и механ., 1944, 8, № 3.

Лурье А. И., Чекмарев А. И.

1. Вынужденные колебания в нелинейной системе с характеристикой, составленной из двух прямолинейных отрезков. — Прикл. матем. и механ., 1937, 1, вып. 3.

Лиенард А. (Lienard A.)

1. Etude des oscilations entretenues. — Rev. gen. electr., 1928, 23, p. 901—948.

Л ю т к е н х а у с В. (Lutkenhouse W. J.)

1. Dividing lines for backlash in the phase plane, M. S. thesis V. S. Naval Postgraduate School, Monterey, Calif., 1959.

Л я п у н о в А. М.

1. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, Харьковск. матем. о-во, 1892. 251 с.

М а г н у с К. (Magnus K.)

1. Über ein Verfahren zur Untersuchung nichtlinearer Schwingung — Regelungs Systeme. Düsseldorf, VDI Verlag. 1955.

М а д в е д А. (Madwed A.)

1. Number series method of solving linear and nonlinear differential equations. — Revf. Instrumentation Lab., MIT, 1950, № 6445-T-26.

М а э з а в а С. (Maezawa S.)

1. Steady forced vibration of unsymmetrical piecewise — linear system (1st report, explanation of analytical procedure). — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1960, 26, № 167.
2. Steady forced vibration of unsymmetrical pieewise — linear system (2nd report, comparison with analog computer experiments). — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1960, 26, № 167.
3. Steady forced vibration of unsymmetrical pieewise — linear system (3-rd report, application to the ultrasonic carving machine). — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1960, 26, № 167.
4. Perfect fourier series solution of feedback control system with a pieewise — linear element subjected to sinusoidal input (2-nd report, generalization and mathematical foundation). — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1963, 29, № 200.

М а й г а р и н Б. Ж.

1. Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования третьего порядка. — Автоматика и телемеханика, 1963, № 6.

М а й е р А. Г.

1. К теории вынужденных колебаний в сложном генераторе. — Уч. зап. Горьковск. ун-та, 1937, вып. 6.

М а к а р о в И. М., Р а х м а н к у л о в В. З.

1. Об улучшении быстродействия систем с переменной структурой путем комбинирования гиперплоскостей скольжения. — Автоматика и телемеханика, 1970, № 6.

М а к а р о в И. М., Р а х м а н к у л о в В. З., Г л у х о в Ю. П.

1. Использование алгоритмов СПС с кусочно-непрерывным формированием гиперплоскости скольжения для высококачественного управления свободным движением объектов с изменяющимися параметрами. — Автоматика и телемеханика, 1970, № 7.

М а к - Д о н а л ь д Д. (McDonald D.)

1. Nonlinear techniques for improving Servo Performance. — In: Proc. National electronic conference. Chicago, Ill., 1950, 6.

М а к - К о л Л.

1. Основы теории сервомеханизмов. М., Гос. изд. иностр. лит-ры, 1947. 152 с.

М а к у р а А. (Macura A.)

1. Statystyczna analiza układów nieliniowych. — Arch. Automat. i Telemechaniki, 1958, 3, z. 4.

2. Zagadnienia teorii nieliniowych układów automatycznej regulacji. — Arch. Automat. i Telemekhaniki, 1961, 6, z. 2—3.
3. Statyczna analiza nieliniowych układów blokowych. — Arch. Automat. i Telemekhaniki, 1964, 4, z. 3—4.

Малкин И. Г.

1. Об устойчивости периодических движений динамических систем. — Прикл. матем. и механ., 1944, 8, № 4.
2. К теории периодических решений Пуанкаре. — Прикл. матем. и механ., 1948, 13, вып. 6.
3. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Л. — М., Гостехиздат, 1949. 244 с.
4. Колебания квазилинейных систем с неаналитической характеристикой нелинейности. — Прикл. матем. и механ., 1950, 14, вып. 1.
5. К теории колебаний квазилинейных систем со многими степенями свободы. — Прикл. матем. и механ., 1950, 14, вып. 4.
6. К теории устойчивости регулируемых систем. — Прикл. матем. и механ., 1951, 15, № 1.
7. Об одном способе решения задачи устойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней. — Прикл. матем. и механ., 1951, 15, вып. 4.
8. Теория устойчивости движения. М. — Л., Гос. изд. техн.-теорет. лит., 1952. 432 с.
9. Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования. — Прикл. матем. и механ., 1952, 16, вып. 3.
10. Об устойчивости систем автоматического регулирования. — Прикл. матем. и механ., 1952, 16, вып. 4.
11. Современное состояние метода Пуанкаре и возможность его использования. — В кн.: Тр. 2-го Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. Москва, 1953. 1. М.—Л., 1955.

Манабе С. (Manabe S.)

1. The Generalized «Saturation function method» for analyzing nonlinear control systems. — J. Inst. Electr. Engrs., Japan, 1960, 80, № 863.

Мандельштам Л. И., Андронов А. А., Витт Г. С., Папалекси Н. Д., Горелик Г. С., Хайкин С. Э.

1. Новые исследования нелинейных колебаний. М., Радиониздат, 1936. 96 с.

Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д.

1. О явлениях резонанса n -го рода. — Журн. техн. физики, 1932, 2, вып. 7—8.
2. Об обосновании одного метода приближенного решения дифференциальных уравнений. — ЖЭТФ, 1939, 4.
3. Об одном методе измерения логарифмического декремента и частоты электромагнитных колебательных систем. — В кн.: Мандельштам Л. И., Полное собрание трудов. 1. М., 1948.

Маркевич Н. М.

1. Решение задачи о наполнении и опорожнении сосудов переменного объема сжимаемым газом, связанной с расчетом некоторых механизмов управления. — Уч. зап. ЛГУ, 1949, № 17.

Марухаси Т. (Maruhashi T.)

1. On the oscillations in a relay control system with dead time. — J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 1963, 7, № 2.
2. Analysis of servomechanism containing saturation and backlash. — J. Inst. Electr. Engrs. Japan, 1963, 83, № 892.

Марухаси Т., Кондо К. (Maruhashi T., Kondo K.)

1. On a method of evaluation of transient responses of nonlinear control systems by using the describing function technique. — J. Japan Assoc. Automatic Control Engrs., 1964, 8, № 10.

Масленников В. А.

1. Качественное регулирование нейтрального объекта астатическим регулятором. — Автоматика и телемеханика, 1956, № 2.

Массера Д. Л. (Massera J. L.)

1. On Lapunoff's condition of stability. — Ann. Math., 1949, 50, № 5.
2. Contributions to stability theory. — Ann. Math., 1956, 64, p. 182—206.

3. К теории устойчивости. — Математика, 1957, 1.

Матвеев П. С.

1. Графоаналитические методы построения переходных процессов в системах автоматического регулирования. Метод касательных. — В кн.: Основы автоматического регулирования. М., 1954.

Матсубара М. (Matsubara M.)

1. The Non-linear theory of delayed feedback. — J. Inst. Electr. Engrs., Japan, 1960, 80, № 858.

Махаланобис А. К., Нас А. К. (Machalanobis A. K., Nath A. K.)

1. On the stability of a hysteretic system under sinusoidal excitation. — Internat. J. Control, 1965, 2, № 6.
2. On the dual-input describing functions of a nonlinear element. — IEEE Trans., 1965, AC-10, № 2.
3. A Multiple-input quasi-linearization method with applications. — Internat. J. Control, 1966, 4, № 1.

Мееров М. В.

1. О системах авторегулирования, устойчивых при сколь угодно большом коэффициенте усиления, Автом. и телемех., 1947, № 4.
2. Об использовании кривой D -разбиения для исследования качества систем автоматического регулирования. — Автоматика и телемеханика, 1951, № 6.

Мейер К. (Mejer K.)

1. On the existence of Lyapunov functions for the problem of lure. — SIAM J. Control, 1966, 3, № 3.

Мельников Г. И., Тихонов А. А.

1. Способ определения периодического движения неавтономных автоматических систем. — Автоматика и телемеханика, 1970, № 7.
2. Определение периодического движения нелинейных систем с периодическим возмущением. — Автом. и телемех., 1970, № 9.

Миками Т. (Mikami T.)

1. Optimum control of a rolling angle of an airplane having a rate-limited servo. — J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 1962, 6, № 10.

Микеладзе Ш. Е.

1. Численные методы математического анализа. Гостехиздат, 1953.

Минагава С. (Minagawa S.)

1. A Phase plane approach to on-off controlled servomechanisms to sinusoidal input. — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1961, 27, № 173.

Мине К., Адахи Т. (Mine K., Adachi T.)

1. An analysis of self-oscillation in a thermal process with unsymmetrical backlash and leading phenomena. — J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 1966, 10, № 7.

Минорский Н. (Minorsky N.)

1. Introduction to non-linear mechanics. Ann. Arbor, Edwards, 1947. 447 с.
2. Non-linear oscillations New York — London — Toronto, 1962.

Мира К. (Mira Cr.)

1. Extention des notions de points singuliers aux equations aux differences. — C. r. Acad. Sci., 1963, 256, p. 3809—3812.
2. Determination pratique du domaine de stabilite d'un point d'equilibre d'une recurrence non lineaire du deuxieme ordre a variables reelles. — C. r. Acad. Sci., 1965, 261, p. 5314—5317.
3. Sur la reduction d'un probleme optimal a l'equation d'Hamilton — Jacobi. — C. r. Acad. Sci., Ser. A, 1966, 262, p. 196—199.
4. Sur quelques proprietes de la frontiere du domaine de stabilite d'un point double d'une recurrence du deuxieme ordre a variables reelles et sur un cas de bifurcation de cette frontiere. — C. r. Acad. Sci., Ser. A, 1966, 262, p. 951—954.

Мионов В. Д.

1. К расчету процесса регулирования с постоянной скоростью и упругой обратной связью. — Изв. ВТИ, 1947, № 12.

Мирославлев Е. Н.

1. Нелинейные системы с корректирующими устройствами. — Вестн. Моск. ун-та, 1958, № 1.

Митропольский Ю. А.

1. Медленные процессы в нелинейных колебательных системах со многими степенями свободы. — Прикл. матем. и механ., 1950, вып. 2.
2. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах. Киев, Изд. АН УССР, 1955. 284 с.
3. Вынужденные колебания в нелинейных системах при прохождении через резонанс. — Инженерный сборник, 1953, 15.
4. Построение асимптотического решения для автономной системы с сильной нелинейностью. — ДАН УССР, 1961, 7.
5. Исследование нестационарных колебаний в нелинейных системах. — Тр. Международного симпозиума по нелинейным колебаниям. Приложение методов теории нелинейных колебаний к задачам физики и техники, Киев, Изд-во АН УССР, 1963.
6. Основные направления в теории нелинейных колебаний и их развитие. — Тр. Международного симпозиума по нелинейным колебаниям, т. I, Аналитические методы нелинейных колебаний, Киев, Изд-во АН УССР, 1963.

Митсумаки Т. (Mitsumaki T.)

1. Modified optimum non-linear control. — In: Proc. of the First Internat. Congr. of IFAC. Moscow, 1960. 1, London, 1961.

2. A Number of zero-crossings as a criterion for on-off adaptive control systems. — J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 1962, 6, № 6.
3. A Frequency of zero-crossing as a performance index for on-off adaptive control systems. — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1963, 29, № 200.

Миура Г., Ватанабе Х. (Miura G., Watanabe H.)

1. Dynamic characteristics of Second-order control system with Nonlinear restoring force. — J. Inst. Electr. Engrs., Japan, 1966, 86, № 939.

Михайлов Ф. А.

1. О предельных значениях квадратичных оценок качества регулирования. — В кн.: Тр. 2-го Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. Москва, 1953, 2. М. — Л., 1955.

Моисеев Н. Д.

1. О некоторых методах теории технической устойчивости. 1. О выводе достаточных условий технической устойчивости методом грубой квадратурной мажорации. — Тр. ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1944, вып. 135.
2. Квазиинтегральный вывод прямого коэффициентного критерия асимптотической устойчивости для обыкновенной системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. — В кн.: Записки семинара по теории устойчивости движения. М., 1948, вып. 3.
3. Очерки развития теории устойчивости. М., Гостехиздат, 1949. 663 с.

Моросанов И. С.

1. Расчет установившихся режимов в системах экстремального регулирования с независимым поиском. — В кн.: Доклады конференции по теории и применению дискретных автоматических систем. М., 1958.
2. Влияние флюктуаций на релейные экстремальные системы в автоколебательном режиме. — Автом. и телемех., 1960, № 9.
3. Об одной ошибке применения метода статистической линеаризации. — Автоматика и телемеханика, 1968, № 2.
4. Релейные экстремальные системы. Приближенные методы исследования. М., «Наука», 1964. 267 с.
5. Гармоническая линеаризация релейных систем при статистических воздействиях. — В кн.: Докл. 3-го Всесоюзного совещания по автоматическому управлению. Одесса, 1965. М., 1967.
6. Практические методы вычисления коэффициентов линеаризации произвольных нелинейностей. — Автоматика и телемеханика, 1968, № 10.

Мухаметзянов И. А.

1. Достаточные условия абсолютной устойчивости и диссипативности нелинейных регулируемых систем при постоянно действующих и параметрических возмущениях. — Автоматика и телемеханика, 1966, № 12.

Мысовских И. П.

1. Лекции по методам вычислений. М., Физматгиз, 1962, с. 247—340 (изложены методы Рунге — Кутта, Адамса и т. п.).

Мясников Н. Н.

1. Критерий Михайлова и оценка корней характеристического уравнения. — Автоматика и телемеханика, 1949, № 4.
2. О степени устойчивости линейных регулируемых систем. — Тр. Ленингр. военно-воздушн. инж. акад., 1949, вып. 25.

Наджафов Э. М.

1. Приближенное определение периодических режимов в системах автоматического регулирования, содержащих несколько нелинейностей. — В кн.: Тр. 2-го Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. I. М. — Л., 1955.

Нарендра К. С., Голдвин Р. М. (Narendra K. S., Goldwyn R. M.)

1. A Geometrical criterion for the stability of certain non-linear nonautonomous systems. — IEEE Trans., 1964, CT-11, № 3.

Наслен П. (Naslin P.)

1. The Dynamics of linear and non-linear systems. London — Glasgow, Blackie, 1965. 596 p.

Натали Ф. Д. (Natali F. D.)

1. An Egnivalent gain for nonlinear elements different from that proposed by booton. — Proc. IEE, 1967, 55, № 3.

Наумов Б. Н.

1. Влияние воздействий по производным на частоту и амплитуду автоколебаний в системах регулирования. — В кн.: Сб. работ по автоматике и телемеханике. Тр. научн.-техн. конференции молодых специалистов Ин-та автоматки и телемеханики АН СССР. М., 1953.
2. Приближенный метод расчета систем автоматического регулирования, содержащих нелинейные элементы. Канд. дисс. ИАТ АН СССР. М., 1955.
3. Приближенный метод построения переходных процессов в нелинейных системах автоматического регулирования. — В кн.: Сб. работ по автоматике и телемеханике. М., 1956.
4. Проблемы теории нелинейных систем автоматического регулирования и управления. М., Изд. АН СССР, 1957. Гл. IV. Синтез нелинейных систем автоматического регулирования и управления
5. Eine Näherungs methode zur berechnung der übergangsprozesse in selbsttätigen regelungssystemen mit nichtlinearen elementen. — In Regelungstechnik. München, Oldenburg, 1957.
6. Choix de la caractéristique sur retour en vitesse non une'aïke dans les assek-vissements de position. — Automatisme, 1960, 5, № 6.
7. Переходные процессы в линейных системах автоматического регулирования. Ред. проф. Я. З. Цыпкин. М. — Л., Госэнергоиздат, 1960. 223 с.
8. Approximate method for calculating time response in linear, time-varying, and nonlinear automatic control systems. — Trans. ASME, Ser. D, 1961, 83, № 1.
9. Метод приближенного вычисления переходных процессов в линейных системах с постоянными и переменными во времени параметрами и в нелинейных системах автоматического регу-

лирования. — Техническая механика. Тр. американск. общества инженеров-механиков, 1961, № 1.

10. Исследование абсолютной устойчивости положения равновесия в нелинейных системах автоматического управления при помощи логарифмических частотных характеристик. — Автоматика и телемеханика, 1965, № 4.
11. Частотный метод исследования абсолютной устойчивости и качества нелинейных систем с переменными во времени параметрами при заданных и случайных воздействиях. — Докл. 3-го Всесоюзного совещания по автоматическому управлению. Одесса, 1965. М., 1967.
12. Частотный метод исследования абсолютной устойчивости и качества нелинейных систем и систем с переменным во времени параметром при заданных и случайных воздействиях. — Докл. на 3-м Международном конгрессе ИФАК. Лондон, 1966.
13. Выбор характеристики нелинейной скоростной обратной связи позиционных следящих систем. — Автоматика и телемеханика, 1959, № 3.
14. Расчет абсолютной устойчивости процессов и состояний равновесия в нелинейных системах на основе частотных методов. — В кн.: Точные методы исследования нелинейных систем автоматического управления. М., «Машиностроение», 1971.

Наумов Б. Н., Цыпкин Я. З.

1. Частотный критерий абсолютной устойчивости процессов в нелинейных системах автоматического управления. — Автоматика и телемеханика, 1964, № 6.

Нго Ван Вьонг

1. Об абсолютной устойчивости регулируемых систем с двумя исполнительными органами в критическом случае. — Автоматика и телемеханика, 1968, № 1.

Неймарк Ю. И.

1. Об определении значений параметров, при которых система автоматического регулирования устойчива. — Автоматика и телемеханика, 1948, № 3.
2. Теория вибрационного погружения и вибровыдергивания. М., Госэнергоиздат, 1949.
3. О периодических режимах и устойчивости релейных систем. — Автоматика и телемеханика, 1953, № 5.
4. Об автоколебаниях и вынужденных колебаниях релейных систем с запаздыванием. — Автоматика и телемеханика, 1955, № 3.
5. О периодических движениях релейных систем. — В кн.: Памяти А. А. Андропова. М., 1955.
6. О скользящем режиме и периодических движениях. — Тр. ГИФТИ и радиофиз. ф-та ГГУ, 1956, 30.
7. О скользящем режиме и периодических режимах релейной системы. — Тр. ГИФТИ и радиофиз. ф-та ГГУ, 1956, 30.
8. О скользящем режиме релейных систем автоматического регулирования. — Автоматика и телемеханика, 1957, № 1.
9. Численный метод отыскания периодических движений. — Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1959, 2, № 6.

Неймарк Ю. И., Кубланов И. М.

1. Исследование периодических режимов и их устойчивости для простейшей распределенной системы релейного регулирования температуры. — Автоматика и телемеханика, 1953, № 1.

Неймарк Ю. И., Шильников Л. П.

1. О симметричных периодических движениях многокаскадной релейной системы. — Автоматика и телемеханика, 1959, № 11.

Нелепин Р. А.

1. Вопросы динамики одного типа нелинейных корабельных регулируемых систем второго порядка. — Тр. ВВМИОЛУ им. Ф. Э. Дзержинского, 1957, № 19.
2. Устойчивость системы автоматического регулирования корабельного типа при учете сухого трения. — Тр. ВВМИОЛУ им. Ф. Э. Дзержинского, 1957, № 19.
3. Вопросы динамики систем автоматического регулирования с силовой обратной связью при учете кулоновского трения. — Энергомашиностроение, 1957, № 9.
4. О построении фазовых портретов некоторых автоколебательных систем с неоднозначной кусочно-линейной характеристикой при исследовании их методом точечных преобразований. — Тр. ВВМИОЛУ им. Ф. Э. Дзержинского, 1957, № 20.
5. Теория некоторых нелинейных систем непрямого регулирования. — Тр. ВВМИОЛУ им. Ф. Э. Дзержинского, 1958, № 28.
6. Динамика непрямого регулирования при учете кулоновского трения в золотнике и сервомоторе и нелинейной характеристики сервомотора типа насыщения. — Изв. АН СССР. ОТН. Энергетика и автоматика, 1959, № 1.
7. Исследование простейшей самонастраивающейся системы экстремального регулирования методом точечных преобразований. — Тр. НТО Судпрома, 1960, № 2.
8. Теория некоторых систем непрямого регулирования с несколькими существенными нелинейностями. — Автоматика и телемеханика, 1960, № 6.
9. Динамика непрямого регулирования с переменной скоростью сервомотора при учете кулонова трения в золотнике и сервомоторе. — В кн.: Автоматическое управление и вычислительная техника. Вып. 4, 1961.
10. Об исследовании нелинейных автоматических систем методом сечений пространства параметров. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1964, № 6.
11. Метод сечений пространства параметров. — В кн. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. М., 1966.
12. Об исследовании нелинейных автоматических систем высокого порядка точными аналитическими методами. — Докл. АН СССР, 1965, 161, № 4.
13. Об исследовании методом сечений пространства параметров одного класса систем управления. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1965, № 4.

14. Об исследовании точными методами систем с двумя нелинейными элементами. — Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1965, № 3.
 15. Об одном методе анализа и синтеза нелинейных автоматических систем. — В кн.: Многосвязные инвариантные, нелинейные и дискретные системы. М., 1966.
 16. О синтезе нелинейных законов. — Докл. АН СССР, 1966, 166, № 6.
 17. Об одном методе анализа и синтеза нелинейных автоматических систем. — В кн.: Тр. 3-го Всесоюзного совещания по автоматическому управлению (технической кибернетике). Одесса, 1965. М., 1967.
 18. К вопросу о точной границе области абсолютной устойчивости регулируемых систем. — Автоматика и телемеханика, 1967, № 4.
 19. Точные аналитические методы в теории нелинейных автоматических систем (с примерами из судовой автоматике). Л., «Судостроение», 1967. 444 с.
 20. К вопросу о точной границе области абсолютной устойчивости регулируемых систем. — Автоматика и телемеханика, 1967, № 4.
- Немыцкий В. В.
1. К вопросу об установившихся режимах в системах автоматического регулирования. — В кн.: Тр. 1-го Международного конгресса ИФАК по автоматическому управлению. I. М., 1961.
- Николаев Я. Н.
1. Применение метода Кенигса — Лемерая к теории простейших сервосистем типа реле с запаздыванием. — Уч. зап. Горьковск. ун-та, 1947, вып. 13.
- Никольский Г. Н.
1. К вопросу об автоматической устойчивости корабля на заданном курсе. — Тр. центральной лаборатории проводной связи, 1934, вып. 1.
 2. Об одной задаче непрямого регулирования. — Инж. сб. Ин-та механики АН СССР, 1948, 4, вып. 2.
- Нитта К., Окитцу Х. (Nitta K., Okitsu H.)
1. Dynamic characteristics of DC motor taking account of their nonlinearities. — J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 1965, 9, № 2.
- Нishimura М. (Nishimura M.)
1. A study on discontinuous control systems with a switching line computer. — J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 1965, 9, № 9.
- Новацкий П. Я. (Nowacki P. J.)
1. Niektóre zagadnienia nieliniowe w teorii automatycznej regulacji. — Arch. Automat. i Telemechaniki, 1958, 3, z. 4.
 2. Niektóre zagadnienia nieliniowe w teorii automatycznej regulacji. — Arch. Automat. i Telemechaniki, 1959, 4, z. 1.
- Ньютон Дж., Гулд Л. А., Кайзер Дж. (Newton G. J., Gould L. A., Kaiser J.)
1. Analytical and design of linear feedback controls. New York, Wiley, 1957. 419 с.
- Огурцов А. И.
1. О выборе параметра в критерии В. М. Попова устойчивости регулируемых систем. — Автоматика и телемеханика, 1968, № 3.

- Ольденбург Р., Сарториус Г.
1. Динамика автоматического регулирования. М., Госэнергониздат, 1949, 326 с.
- Оппельт В. (Oppelt W.)
1. Method for the Frequency Locus for Controllers with Friction. — Z. VDI, 1948, 90, p. 179—183.
- Оркина Е. Л.
1. Устойчивость нелинейных следящих систем с асинхронным двигателем. — Автоматика и телемеханика, 1965, № 9.
2. Применение разрывных функций Ляпунова для анализа устойчивости нелинейных следящих систем. — Автоматика и телемеханика, 1965, № 12.
- Орурк И. А.
1. Расчет сложных линейных и нелинейных динамических систем применением интегральных уравнений. — Тр. ВМАКВ им. А. Н. Крылова, 1956, вып. 12.
2. Расчет переходных процессов в нелинейных системах. — Изв. высших учебных заведений. Электромеханика, 1959, № 12.
- Осинский З. (Osinski Z.)
1. Forced vibration of or system of one degree of freedom due to periodic forces with damping characterized by a strong non-linearity. — Arch. mechan. stosowanej, 1959, 11, № 1.
2. Основные проблемы автоматического регулирования и управления. — Тр. сессии АН СССР по научным проблемам автоматизации производства, 1956, М., 1957.
- Отт М. (Ott M.)
1. Ansendung der Beschreibungsfunktionen auf Regelkreise mit mehreren Nichtlinearitäten. — Regelungstechnik, 1966, 14, № 12.
- Павлов В. В.
1. Инвариантность и автономность нелинейных систем управления. Киев, «Наукова думка», 1971, 270 с.
- Пальтов И. П.
1. Устройство для интегрирования медленно меняющейся функции времен, задаваемой в виде угла поворота. — Автоматика и телемеханика, 1956, № 4.
- Палюсински О.
1. Устойчивость систем с консервативными объектами. — Автоматика и телемеханика, 1969, № 11.
- Панич Ю. В.
1. Статистическая линеаризация нелинейных стохастических преобразований с памятью. — Автоматика и телемеханика, 1969, № 4.
- Панков Р. А., Самойлов А. А.
1. Способ приближенного представления нелинейностей и применение статистической линеаризации для анализа замкнутых автоматических систем. — Автоматика и телемеханика, 1966, № 4.
- Пачесновский В. (Paczynowski W.)
1. Wkład A. Nukowskiego do teorii regulacji nieliniowej (r. 1896). — Arch. Automat. i Telemechaniki, 1962, 7, z. 3—4.
2. Об устойчивости решений бесконечной системы уравнений (7) — Прикл. матем. и механ., 1948, 12.

3. Об одной оценке характеристических чисел (7). — Изв. АН КазССР. Серия матем. и механ., 1948, 2.
4. Равномерная устойчивость по первому приближению (1, 3, 4, 7) — Прикл. матем. и механ., 1949, 13.
5. Об устойчивости решений дифференциальных уравнений. Изв. АН КазССР. Серия матем. и механ., 1950, 4.
6. О спектре характеристических чисел (7). — Прикл. матем. и механ., 1950, 14.

Пеллегрен М.

1. Статистический расчет следящих систем. М., ИЛ, 1957. 223 с.

Первозванский А. А.

1. Приближенный метод исследования автоколебательных систем при наличии случайных воздействий. — Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение, 1958, № 3.
2. Автоколебательные системы при наличии медленно меняющихся внешних возмущений. — Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 1.
3. Случайные процессы в нелинейных автоматических системах. М., Физматгиз, 1962. 351 с.

Персидский К. П.

1. Об устойчивости движения по первому приближению. — Матем. сб., 1933, 40.
2. Об устойчивости решений счетной системы дифференциальных уравнений (7) — Изв. АН КазССР. Сер. матем. и механ., 1948, 2.
3. К вопросу об абсолютной устойчивости. — Автоматика и телемеханика, 1969, № 12.

Пестель М., Тэлер Дж. (Pastel M. P., Thaler G. J.)

1. Stability criteria for instrument servomechanisms with coulomb friction and stiction. — Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs. Part 2. 1959, 78, № 45.
2. Instrument servomechanisms with backlash, coulomb friction and stiction. — Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs. Part 2. 1960, 79, № 49.

Петелин Д. П.

1. Приближенное определение автоколебаний в системе автоматического регулирования синхронного двигателя. — Автоматика и телемеханика, 1959, № 1.

Петров Б. Н.

1. О построении и преобразовании структурных схем. — Изв. АН СССР, ОТН, 1945, № 12.
2. Связь между качеством переходного процесса и распределением нулей и полюсов передаточной функции. — В кн.: Теория автоматического регулирования. М., 1954.
3. Принцип инвариантности и условия его применения при расчете линейных и нелинейных систем. — Тр. Первого Международного конгресса ИФАК по автоматическому управлению. М., Изд-во АН СССР, 1961.

Петров Б. Н., Емельянов С. В.

1. Принцип построения комбинированных САР с переменной структурой. — ДАН СССР, 1963, 153, № 5.

- Петров Б. Н., Емельянов С. В., Грищенко М. Б.
 1. Автономность в многосвязных системах автоматического управления с переменной структурой — ДАН СССР, 1966, **169**, № 1.
- Петров Б. Н., Емельянов С. В., Дудин Е. Б.
 1. О выборе критериев синтеза комбинированных следящих систем с переменной структурой — ДАН СССР, 1963, **148**, № 6.
- Петров Б. Н., Емельянов С. В., Костылева Н. Е.
 1. Об управлении линейными объектами с переменными параметрами. — ДАН СССР, 1964, **155**, № 1.
- Петров Б. Н., Емельянов С. В., Уткин В. И.
 1. Принцип построения инвариантных систем автоматического управления с переменной структурой. — ДАН СССР, 1964, **154**, № 6.
- Петров Б. Н., Попов Е. П., Воронов А. А., Храмой А. В.
 1. Развитие теории автоматического регулирования в СССР. — В кн.: Тр. 2-го Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. Москва, 1953. М.—Л., 1955.
- Петров Б. Н., Рутковский В. Ю.
 1. Некоторые вопросы построения схем и выбора характеристических быстродействующих сервомеханизмов. — В кн.: Автоматическое управление и вычислительная техника. Вып. 2. М., 1959.
- Петров Б. Н., Старикова М. В.
 1. К исследованию автоколебаний в системах автоматического регулирования с логическими устройствами. — Изв. АН СССР. ОТН. Энергетика и автоматика, 1961, № 3.
 2. К определению колебательных процессов в сложных нелинейных системах при различных начальных отклонениях. — Техническая кибернетика, 1964, № 3.
- Петров Б. Н., Уланов Г. М., Емельянов С. В.
 1. Оптимизация и инвариантность в системах автоматического регулирования с жесткой и переменной структурой. — В кн.: Тр. 2-го Международного конгресса ИФАК по автоматич. управлению. Базель, 1963. М., 1965.
- Петров В. В.
 1. Исследование пневмогидравлического сервомеханизма автопилота. Канд. дисс. Ин-т автоматизации и телемеханики. АН СССР. М., 1948.
 2. Об автоколебаниях двухкаскадных следящих механизмов с релейным управлением. — Автоматика и телемеханика, 1951, № 1.
 3. Динамика одно- и двухкаскадных сервомеханизмов с несколькими нелинейными характеристиками. — В кн.: Тр. 2-го Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. Москва, 1953. М.—Л., 1955.
- Петров В. В., Рутковский В. Ю.,
 1. Теория простейших релейных сервомеханизмов с запаздыванием. — Изв. АН СССР. ОТН, 1956, № 4.
 2. Теория простейших сервомеханизмов с двумя запаздывающими реле. — Изв. АН СССР. ОТН, 1957, № 2.
- Петров В. В., Уланов Г. М.
 1. Теория двух простейших релейных систем регулирования. — Автоматика и телемеханика, 1950, № 5.

2. О стабилизирующем эффекте импульса по ускорению в обратной связи релейной следящей системы. — Автоматика и телемеханика, 1951, № 5.
3. Использование жесткой и скоростной обратных связей для подавления автоколебаний двухкаскадного сервомеханизма с релейным управлением. — Автоматика и телемеханика, 1952, № 2.
4. Дополнение к статье «Использование жесткой и скоростной обратных связей для подавления автоколебаний двухкаскадного сервомеханизма с релейным управлением». — Автоматика и телемеханика, 1952, № 6.
5. К теории непрямого регулирования при учете сухого трения в чувствительном элементе. — ДАН ССРСР, 1955, 101, № 4.
6. Основы динамического расчета одно- и двухкаскадных нелинейных сервомеханизмов. — В кн.: Научно-техн. об-во приборостроительной пром-сти. Москва. Научно-техн. сессия, 1957, М., 1957.
7. Общность скользящих, вибрационных и оптимальных режимов класса сервомеханизмов. — ДАН СССР, 1957, 112, № 3.
8. О состоянии и задачах изучения динамики нелинейных систем автоматического регулирования при помощи фазового пространства и о вопросах их динамической точности. — В кн.: Основные проблемы автоматического регулирования и управления. М., 1957.

П л и с с В. А.

1. О проблеме Айзермана для случая системы трех дифференциальных уравнений. — ДАН СССР, 1958, 121, № 3.
2. Некоторые проблемы теории устойчивости в целом. Л., Изд. ЛГУ, 1958. 183 с.

П л и ш к и н Ю. М.

1. К вопросу об оценке интегральных критериев качества регулирования нелинейных систем. — Автоматика и телемеханика, 1955, № 1.

П о п к о в Ю. С.

1. Статистические модели нелинейных систем. — Автоматика и телемеханика, 1967, № 10.

П о п о в В. М. (Popov V. M.)

1. Criterii suficiente de stabilitate simptotica in mare pentru sistemele automate cu mai multe organe de executie. — Studii si cercetari de energetica, 1959, 9, № 1.
2. Criterii de stabilitate pentru sistemele nelineare de reglare automata, bazate pe utilizarea transformatei Laplace. — Studii si cercetari de energetica, 1959, 9, № 4.
3. Criterii suficiente de stabilitate asimptotica de executie. — Studii si cercetari de energetica, 1959, 9, № 4.
4. Noi criterii de stabilitate pentru sistemele automate nelineare. — Studii si cercetari de energetica, 1960, 10, № 1.
5. Criterii de stabilitate pentru sistemele automate nelineare. — Studii si cercetari de energetica, 1960, 10, № 1.
6. Критерий качества нелинейных регулируемых систем. — В кн.: Тр. 1-го Международного конгресса ИФАК по автоматическому управлению. I. М., 1961.

7. Criterii de stabilitate pentru unele tipuri de sisteme automate nelineare. — *Atomatica si Electronica*, 1961, 5, № 3.
 8. Об абсолютной устойчивости нелинейных систем регулирования. — *Автоматика и телемеханика*, 1961, № 8.
 9. Об одном критическом случае абсолютной устойчивости. — *Автоматика и телемеханика*, 1962, № 1.
 10. Решение новой задачи об устойчивости регулируемых систем. — *Автоматика и телемеханика*, 1963, № 1.
 11. Hiperstabilitatea sistemelor automate. Bucuresti, Acad. Republicii Socialiste Romania, 1966. 304 с.
 12. Some remarks on a direction of researches concernini the stability of nonlinear control systems. — *Rev. roum. sci. techn. Ser. Electrotechn. et energ.*, 1966, 11, № 4.
- П о п о в В. М., Х а л а н а й А.
1. Об устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования с запаздывающим аргументом. — *Автоматика и телемеханика*, 1962, № 7.
- П о п о в Е. П.
1. Учет влияния нелинейности при расчете следящих систем. — *Автоматика и телемеханика*, 1953, № 6.
 2. Уточнение первого приближения при исследовании автоколебаний нелинейных систем. — *ДАН СССР*, 1954, 98, № 3.
 3. Автоколебания нелинейных систем при медленно меняющемся внешнем воздействии. — *ДАН СССР*, 1954, 98, № 4.
 4. К приближенному исследованию автоколебаний и вынужденных колебаний нелинейных систем. — *ДАН СССР*, 1954, 95, № 5.
 5. Приближенное исследование автоколебаний нелинейных систем. — *Изв. АН СССР. ОТН*, 1954, № 5.
 6. Динамика систем автоматического регулирования. М., Гостехиздат, 1954, 199 с.
 7. Приближенное определение автоколебаний в системах автоматического регулирования. — В кн.: Тр. 2-го Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. Москва, 1953. М.—Л., 1955.
 8. Приближенное исследование переходных процессов в нелинейных автоматических системах методом гармонической линеаризации. — *Изв. АН СССР. ОТН*, 1955, № 9.
 9. Приближенное исследование переходных процессов в нелинейных автоматических системах методом гармонической линеаризации. — *Изв. АН СССР. ОТН*, 1956, № 12.
 10. Диаграммы затухания нелинейных процессов в автоматических системах. — *Автоматика. АН УССР*, 1956, № 4.
 11. Оценка качества и выбор параметров нелинейных автоматических систем высокого порядка. — *Изв. АН СССР. ОТН*, 1956, № 12.
 12. Одно сообщение асимптотического метода Н. Н. Боголюбова в теории нелинейных колебаний. — *ДАН СССР*, 1956, 111, № 2.
 13. О применении метода гармонической линеаризации к исследованию качества переходных процессов в нелинейных автома-

- тических системах. — В кн.: Основные проблемы автоматического регулирования и управления. М., 1957.
14. О выборе параметров автоколебательных систем регулирования. — В кн.: Автоматическое управление и вычислительная техника. Вып. 1. М., 1958.
 15. О выделении областей устойчивости нелинейных автоматических систем на основе гармонической линеаризации. — Изв. АН СССР. ОТН, Энергетика и автоматика, 1959, № 1.
 16. К теории вибрационного сглаживания нелинейных характеристик с помощью автоколебаний. — В кн.: Автоматическое управление и вычислительная техника. Вып. 2. М., 1959.
 17. Влияние вибрационных помех на устойчивость и динамические качества нелинейных автоматических систем. — Изв. АН СССР. ОТН, Энергетика и автоматика, 1959, № 4.
 18. Об определении высших гармоник несимметричных автоколебаний. — Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 6.
 19. Некоторые вопросы синтеза нелинейных систем автоматического управления. В кн.: Тр. 1-го Международного конгресса ИФАК. Москва, 1960. М., 1961.
 20. Об особенностях введения малого параметра при исследовании нелинейных колебаний в автоматических системах. — Прикл. матем. и механ., 1962, № 1.
 21. Об исследовании автоколебательных систем с логическими устройствами. — Изв. АН СССР. ОТН, Энергетика и автоматика, 1962, № 4.
 22. О линейных законах управления. — Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, 1962, № 5.
 23. К вопросу обоснования методов, основанных на методе гармонического баланса. — В кн.: Метод Гольдфарба в теории регулирования (сб. статей). М.—Л., ГЭИ, 1962.
 24. Приближенные методы исследования нелинейных колебаний в автоматических системах. — В кн.: Тр. Международного симпозиума по нелинейным колебаниям. Приложения теории нелинейных колебаний. 3, Киев, 1963.
 25. Устойчивость и колебательные режимы нелинейных систем автоматического управления. — В кн.: Современные методы проектирования систем автоматического управления. М., 1967.
 26. Процессы управления в нелинейных автоматических системах. — В кн.: Современные методы проектирования систем автоматического управления. М., 1967.
 27. Об оценке качества нелинейных автоматических систем при случайных помехах. — Автоматика и телемеханика, 1959, № 10.
- Попов Е. П., Пальтов И. П.
1. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. М., Физматгиз, 1960. 192 с.
- Попов Е. П., Хлыпало Е. И.
1. Оценка качества и выбор параметров нелинейных автоматических систем. — Изв. АН СССР. ОТН, 1956, № 6.

Поповский А. М.

1. Линеаризация скользящего режима работы регулятора постоянной скорости закрытия. — Автоматика и телемеханика. 1950, № 3.

Портнов-Соколов Ю. П.

1. О движении гидравлического поршневого исполнительного механизма при типовых нагрузках на него. — В кн.: Сб. работ по автоматике и телемеханике. М., 1953.

Поспелов Г. С.

1. Побудительная стабилизация релейно-контактных систем автоматического регулирования. — Тр. Военно-возд. акад. им. Н. Е. Жуковского, 1949, вып. 335.
2. Некоторые вопросы теории релейных систем автоматического регулирования. — В кн.: Основы автоматического регулирования. Теория. М., Машгиз, 1954.
3. Вибрационная линеаризация релейных систем автоматического регулирования. Реакция релейных систем на медленно меняющиеся возмущения. — В кн.: Тр. 2-го Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. Москва, 1953. М.—Л., 1955.
4. Динамические характеристики релейных следящих систем, I.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1965, № 3.
5. Динамические характеристики релейных следящих систем, II.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1966, № 2.

Прелль Р. (Proell R.)

1. Über den indirektwirkenden Regulierapparat Patent Proelle. — Z. Vereines Deutsch Ingr., 1884, 28, № 24—25.
2. Проблемы теории нелинейных систем автоматического регулирования и управления. — В кн.: Итоги науки. М., 1957.
3. Приспосабливающиеся автоматические системы. Под ред. Э. Мишкина и Л. Брауна. М., ИЛ, 1963.

Пуанкаре А. (Poincaré H.)

1. Des courbes définies par les equation differentielles. — J. Math. pures et appl., 1881, ser. 3, 7; 1882, ser. 3, 8; 1885, ser. 4, 1; 1886, ser. 4, 2.
2. Les methodes nouvelles del la mecanique celeste. I. Paris, Gauthier Villars, 1892. 385 p.

Пугачев В. С.

1. Случайные функции определяемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. — Тр. ВВИА им. Жуковского, 1944, № 118.
2. Основы общей теории случайных функций. М., Изд-во Акад. артилл. наук, 1952. 344 с.
3. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Гостехиздат, 1957. 659 с.

Пупков К. А.

1. Метод исследования точности существенно нелинейных систем автоматического управления при помощи эквивалентной передаточной функции. — Автоматика и телемеханика. 1960, № 2.
2. Статистический отчет нелинейных систем автоматического управления. М., Машиностроение, 1965. 403 с.

Пу х о в Г. Е.

1. Комплексный метод расчета периодических и переходных процессов в нелинейных и линейных системах. — В кн.: Основные проблемы автоматического регулирования и управления. М., 1957.
2. Комплексное исчисление и его применение. Киев, Изд-во АН УССР, 1961, 230 с.

Пу х о в Г. Е., А м о с о в а С. П.

1. К расчету нелинейных цепей переменного и постоянного тока. — Электричество, 1954, № 10.

П ф а р р А. (Pfarr A.)

1. Der reguliertvorgang mit indirektwirkendem regulator. — Z. Vereines dtsch. Ingr., 1899, 43, № 50, 51.

П ы ш к и н И. В.

1. Устойчивость одного класса систем с переменными параметрами, изменяющимися периодически и скачком. — Автоматика и телемеханика, 1961, № 9.

П я т н и ц к и й Г. И.

1. Воздействие стационарных случайных процессов на системы автоматического регулирования, содержащие существенно нелинейные элементы. — Автоматика и телемеханика, 1960, № 4.

П я т н и ц к и й Е. С.

1. Новые исследования по абсолютной устойчивости систем автоматического регулирования (обзор). — Автоматика и телемеханика, 1968, № 6.
2. Абсолютная устойчивость нестационарных нелинейных систем. — Автоматика и телемеханика, 1970, № 1.
3. Абсолютная устойчивость нестационарных нелинейных систем. Свободные и вынужденные движения. — Автоматика и телемеханика, 1970, № 3.
4. Абсолютная устойчивость нелинейных импульсов систем с нестационарной нелинейностью. — Автоматика и телемеханика, 1970, № 8.

Р а г а з з и н и Дж. Р., Б е р г е н А. Р. (Ragazzini J. R., Bergen A. R.)

1. A Mathematical technique for the analysis of linear systems. — Proc. IRE, 1954, 42, p. 1645—1651.

Р а е в с к и й С. Я.

1. О некоторых типовых нелинейностях при непрерывных воздействиях. — Вест. Моск. ун-та, 1955, № 12.
2. Развитие теории автоматического управления в Ин-те автоматки и телемеханики (1939—1964 гг.). — Автоматика и телемеханика, 1964, № 6.

Р а з у м и х и н Б. С.

1. Об устойчивости тривиального решения систем второго порядка. — Прикл. матем. и механ., 1955, 19, № 3.
2. Об устойчивости систем автоматического регулирования с одним регулирующим органом. — Автоматика и телемеханика, 1956, № 11.
3. Устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования с запаздыванием. — Инж. сб., 1960, 29.
4. Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздыванием. — Автоматика и телемеханика, 1960, № 6.

5. Устойчивость релейных систем. — Инж. журнал, 1961, 1. вып. 1.
 6. Метод исследования устойчивости систем с последействием. — ДАН СССР, 1966, 167, № 6.
- Раушенбах Б. В.
1. О выборе рациональной меры продольной динамической устойчивости самолета. — Тр. ЦАГИ, 1941, вып. 533.
- Рачинский С. (Raczynski S.)
1. O problemie inwariantności układów nieliniowych. — Arch. Automat. i Telemekhaniki, 1968, 13, z. 2.
- Реказиус З. В. (Rekasius Z. V.)
1. A Stability criterion for feedback systems with one nonlinear elements. — IEEE Trans., 1964, AC-9, № 1.
- Реказиус З. В., Роуланд Д. Р. (Rekasius Z. V., Rowland J. R.)
1. A Stability criterion for feedback systems containing a single time-varying nonlinear element. — IEEE Trans., 1955, AC-10, № 3.
- Рибери Э. (Riberi E.)
1. Analyse des systemes de regulation extremale pas a pas par une methode graphique. — C. r. Acad. Sci., 1966, ser. A, 262, p. 92—95.
 2. Analyse graphique du comportement d'un systeme de regulation extremale pas a pas adapte a un processus presentant une inertie apres la caracteristique statique. — C. r. Acad. Sci., 1966, ser. A, 262, p. 931—934.
 3. Analyse graphique d'un systeme de regulation extremale pas a pas adapte a un processus dont la caracteristique extremale est situee entre deux operateurs lineaires du premier ordre. — C. r. Acad. Sci., 1966, ser. A, 262, p. 1348—1351.
 4. Analyse graphique du comportement d'un systeme de regulation extremale pas a pas adapte a un processus presentant une inertie du deuxieme ordre avant la caracteristique statique. — C. r. Acad. Sci., 1966, ser. A, 263, p. 589—591.
- Римский-Корсаков А. В.
1. Вычисление энергии колебательной системы с помощью операционного исчисления. — Журнал техн. физики, 1938, 8.
- Ришале Ж., Лефевр К. (Richalet J., Lefevre C.)
1. Systemes lineaires d'ordre quelconque a coefficient periodique. — C. r. Acad. Sci., 1966, ser. A, 262, № 11.
- Родден Д. Д. (Rodden J. J.)
1. Applications of Lyapunov stability theory. Ph. D. Thesis, Stanford University, Stanford, 1964.
- Розе М. (Roseau M.)
1. Sur la stabilite de la solution nulle de certains systemes differentiels dans les cas critiques. — C. r. Acad. Sci., 1963, 257, p. 3549.
 2. Sur la stabilite des solutions periodiques de certains systemes differentiels quasi-lineaires. — In: Colloque international du C. N. R. S. sur les vibrations forcees dans les systemes non lineaires. Marseille, 1964.
 - 3 Vibrations non lineaires et theorie de la stabilite. Berlin, Springer-Verlag, 1966. 254 p.

Розенвассер Е. Н.

1. Об устойчивости нелинейных регулируемых систем. — ДАН СССР, 1957, 117, № 2.
2. О построении функции Ляпунова для одного класса нелинейных систем. — Изв. АН СССР. ОТН, 1960, № 2.
3. Некоторые вопросы теории нелинейных регулируемых систем. Канд. дисс. Горьковск. гос. ун-т. Горький, 1961.
4. Об абсолютной устойчивости нелинейных систем. — Автоматика и телемеханика, 1963, № 3.
5. Применение интегральных уравнений для построения и обоснования приближенного метода определения периодических режимов нелинейных систем. — В кн.: Тр. междунар. симпозиума по нелинейным системам. I. Киев, 1963.
6. Вариационный подход к оценкам метода гармонического баланса. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1964, № 1.
7. Исследование периодического режимов в автоматических системах со многими нелинейностями. — В кн.: Тр. 3-го Всесоюзного совещания по автоматическому управлению (техн. кибернетике). Одесса, 1965. М., 1967.
8. Колебания нелинейных систем. М., «Наука», 1969, 576 с.

Ройтенберг Я. Н.

1. Автоколебания гидроскопических стабилизаторов. — Прикл. матем. и механ., 1947, 9, № 2.

Рокард Ив. (Rocard Y.)

1. Theorie des oscillateurs. Paris, Editions de la revue Scientifique, 1941. 223 p.

Роль А. Дж. (Rault A. J.)

1. Stability of time varying feedback systems. Ph. D. Thesis. Berkeley, 1966.

Ротач В. Я., Плетнев Г. П., Беляев Г. В.

1. Применение метода Гольдфарба при определении частотных характеристик промышленных объектов. — В кн.: Метод Гольдфарба в теории регулирования. М.—Л., 1962.

Рубин Б. И.

1. Исследование стационарного процесса колебаний вибрационно-го регулятора напряжений. — Тр. Ленингр. воен.-воздушн. инж. акад., 1948, вып. 20.

Рубинчик М. А.

1. Приближенный метод оценки качества регулирования в линейных системах. — В кн.: Устройства и элементы теории автоматики и телемеханики. М., 1952.
2. Определение области расположения корней характеристического уравнения. — В кн.: Регулирование машин и синтез механизмов. I. М., 1950.

Рутковский В. Ю.

1. Анализ свободных колебаний вокруг центра тяжести нейтрального самолета без собственного демпфирования с релейным автопилотом. — Автоматика и телемеханика, 1958, № 5.

Рэб Г. (Reeb G.)

1. Sur les mouvements periodiques de certains systemes mecaniques. — С. г. Acad. Sci., 1948, 227, p. 1331—1332.

Рябов Б. А.

1. Автоколебания в некоторых сервосистемах, обусловленные наличием сухого (кулоновского) трения. — ДАН СССР, 1950, 73, № 2.
2. Определение параметров режима установившихся автоколебаний некоторых систем. — ДАН СССР, 1950, 71, № 4.
3. Автоколебания некоторых систем, имеющих нелинейный элемент с 2-образной характеристикой. — В кн.: Вопросы автоматизации в угольной промышленности. М.—Л., 1953.

Рябов Ю. А.

1. Об оценке области применимости метода малого параметра в задачах теории нелинейных колебаний. — В кн.: Тр. Международного симпозиума по линейным колебаниям. I. Киев, 1963.

Саварagi Я. (Sawaragi Y.)

1. Some numerical methods for transient response of nonlinear control systems. — J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 1960, 4, № 6.
2. A Statistical study on the analysis and synthesis of nonlinear automatic control systems subjected to random inputs. — In: Proc. of the First Internat. Congr. of IFAC. Moscow, 1960, 2. London, 1961.
3. Modification of equivalent gains based on the probability density function of the response nonlinear control subjected to a gaussian random input. — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1961, 27, № 173.
4. Harmonic and subharmonic oscillations of a symmetric nonlinear system with «Set-Up» springs (2-nd Report, stability of periodic solutions). — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1961, 27, № 176.
5. The Discrepancy form the normal distribution of the probability of the response of nonlinear control systems subjected to a gaussian random input. — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1962, 28, № 185.
6. Influences of nonlinearities on the response probability distribution of control systems subjected to a random Input. — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1962, 28, № 185.
7. Analysis of the limit cycles occuring in a mixing process by on-off Control. — J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 1962, 6, № 4.
8. The advanced method of evaluation of the response on nonlinear control systems subjected to a suddenly applied stationary random input (I. Response of nonlinear control systems with time invariant characteristics). — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1962, 28, № 188.
9. The Advanced method of evaluation of the response of nonlinear control systems subjected to a suddenly applied stationary random input (II. Response of nonlinear control systems with time variant characteristics). — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1962, 28, № 188.
10. Time-dependent probability distribution of the non-stationary response of nonlinear control systems. — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1962, 28, № 191.

11. A statistical design of the linear switching line of relay control system. — J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 1963, 7, № 1.
 12. Non-stationary responses of nonlinear control systems with randomly time-varying characteristics subjected to a suddenly applied stationary gaussian random input. — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1963, 29, № 197.
 13. On the response of non-linear control systems subjected to a suddenly applied stationary gaussian random input. — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1963, 29, № 197.
 14. Equivalent linearization analysis of non-linear control systems with a non-stationary random input. — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1963, 29, № 200.
 15. A study on the statistical synthesis of optimum nonlinear control systems subjected to non-gaussian random inputs. — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1963, 29, № 203.
 16. An analysis on non-stationary response of non-linear control systems by the method of Taylor — Cauchy transform. — J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 1964, 8, № 9.
 17. An analysis on the indicial response on non-linear servo systems with a random disturbance by the method of Taylor — Cauchy transformation. — J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 1964, 8, № 12.
 18. A statistical study on the response of nonlinear control systems subjected to a non-stationary random input. — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1964, 30, № 215.
 19. On the response of nonlinear control systems subjected to a step input in the presence of a Gaussian random noise. — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1964, 30, № 218.
 20. Synthesis of nonlinear control systems with a deterministic input in the presence of a random disturbance. — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1964, 30, № 218.
 21. Improvement of the non-stationary response of control systems by introducing a nonlinear element of zero-memory type. — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1964, 30, № 218.
 22. A nonlinear compensation of a two-dimensional nonlinear servo-mechanism. — J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 1966, 10, № 6.
 23. On the non-stationary response of nonlinear control system with an irrational transfer function. — Trans. Soc. Instrum. and Control Engrs., 1967, 3, № 3.
 24. An analysis of non-stationary response of non-linear control systems with dead time subjected to a suddenly applied random disturbance with mean value. — J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 1967, 11, № 10.
 25. An approximate method for evaluating the transient response of nonlinear control systems. — J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 1968, 12, № 5.
- Савараги Я., Акаши Х. (Sawaragi Y., Akashi H.)
1. Condition for the occurrence of subharmonic oscillations of relay control systems. — J. Japan Assoc. automat. Control Engrs., 1960, 4, № 2.

- Савараги Я., Акаши Х., Терайши М., Фудуда Т. (Sawaragi Y., Akashi H., Terashi M., and Fududa T.)
1. Non-linear compensation of two-dimensional contouring servo-mechanism. — Mem. Fac. Engng., Kyoto Univ., 1966, 29, part 4.
- Савараги Я., Ионезава Я. (Sawaragi Y., Yonezawa Y.)
1. Study of the self-oscillation in an improved on-off control systems (1st Report). — J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 193, 7, № 2.
 2. Existing conditions for self-oscillation in an improved on-off control system. — Mem. Fac. Engng., Kyoto Univ., 1963, 25, part 4.
- Савараги Я., Иошимура Т. (Sawaragi Y., Yoshimura T.)
1. A study on the bayesian estimation of unknown parametres of a nonlinear controlled system. — Trans. Japan Soc. Instrum. and Control Engrs., 1967, 3, № 3.
- Савараги Я., Сугаи Н. (Sawaragi Y., Sugai N.)
1. Accuracy considerations of the equivalent linearization technique for the analysis of a non-linear control system with a Gaussian random input. — Mem. Fac. Engng., Kyoto Univ., 1961, 23, part 3.
- Савараги Я., Сугаи Н., Сунахара Я. (Sawaragi Y., Sugai N., Sunahara Y.)
1. A statistical study on the analysis and synthesis of automatic control systems subjected to random inputs. — In: Proc. of the First Internat. Congr. of IFAC. Moscow, 1960. London, 1961.
 2. Statistical studies on non-linear control systems (Book). Osaka, Japan, 1962.
- Савараги Я., Сунахара Я. (Sawaragi Y., Sunahara Y.)
1. The statistical studies on the response of automatic control systems with a nonlinear elements of zero memory Type. Part I. — Techn. Repts., Engng. Res. Inst., Kyoto Univ., 1958, 8, № 5.
- Савараги Я., Сунахара Я., Катаяма Т. (Sawaragi Y., Sunahara Y., Katayama T.)
1. Stochastic optimum synthesis of time-variant control systems by introducing non-linear elements. — In: Proc. of the 3 IFAC Congress. London, 1966.
- Савараги Я., Сунахара Я., Накемицо Т. (Sawaragi Y., Sunahara Y., Nakamizo T.)
1. On the response of non-linear time-variant control systems subjected to a pre-assigned signal in the presence of Gaussian random noise. — Techn. Repts. Engng. Res. Inst., Kyoto Univ., 1963, 13, № 2.
 2. Synthesis of non-linear control systems with a deterministis input in the presence of random disturbance. — Techn. Repts. Engng. Res. Inst., Kyoto Univ., 1963, 13, № 3.
 3. Improvement of the non-stationary response by the introduction of a non-linear element of zero-memory type. — Mem. Fac. Engng., Kyoto Univ., 1963, 25, part 3.
 4. Study on the control performance of relay control systems subjected to a random input. — Mem. Fac. Engng., Kyoto Univ., 1963, 25, part 3.

- Савараги Я., Сунахара Я., Накамицо Т., Катаяма Т. (Sawaragi Y., Sunahara Y., Nakamizo T., Katayama T.)
1. A Study on statistical evaluation of non-stationary response of time-variant linear and non-linear control systems with a random input. — Techn. Repts. Engng. Res. Inst. Kyoto Univ., 1966, Rep. № 123.
- Савараги Я., Сунахара Я., Соэда Т. (Sawaragi Y., Sunahara Y., Soeda T.)
1. Statistical studies on the response of non-linear time-variant control systems subjected to a suddenly applied stationary Gaussian random input. — Mem. Fac. Engng., Kyoto Univ., 1962, 24, part 4.
 2. Statistical study on the response of non-linear control systems subjected to a non-stationary Gaussian random input. — Mem. Fac. Engng., Kyoto Univ., 1964, 26, part 2.
- Савараги Я., Сунахара Я., Хара К. (Sawaragi Y., Sunahara Y., Hara K.)
1. An analysis of non-stationary response of non-linear control systems by the method of Taylor—Cauchy transform. — Techn. Repts. Engng. Res. Inst., Kyoto Univ., 1963, 13, № 4.
 2. On a method of evaluating the non-stationary response of time-variant non-linear control systems with a dead time. — Techn. Repts. Engng. Res. Inst., Kyoto Univ., 1966, Rep. № 127.
- Савараги Я., Сунахара Я., Хиракава К. (Sawaragi Y., Sunahara Y., Hirakawa K.)
1. On the statistical analysis of non-linear time-variant control systems by using a method of integral transformation. — Techn. Repts. Engng. Res. Inst., Kyoto Univ., 1965, Rep. № 115.
- Савараги Я., Токумару Х. (Sawaragi Y., Tokumaru H.)
1. Some numerical methods for analysis of transient responses of nonlinear control systems. — Mem. Fac. Engng., Kyoto Univ., 1960, 22, part 2.
 2. Exact periodic solutions for the forced oscillations of a symmetric nonlinear systems with «Set-Up Spring». — Mem. Fac. Engng., Kyoto Univ., 1961, 23, part 1.
- Сакава Я. (Sakawa Y.)
1. Subharmonic oscillations in relay control systems. — Proc. of the First Internat. Congr. of IFAC. 1. Moscow, 1960. London, 1961.
 2. Self-oscillations in a non-linear control system with dead time. — J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 1962, 6, № 1.
- Сакава Я., Сугата К. (Sakawa Y., Sugata K.)
1. Oscillations in a nonlinear system with dead time. — J. Inst. Electr. Engrs Japan, 1963, 83, № 903.
- Сандберг И. В. (Sandberg I. W.)
1. On the stability of solution of linear differential equations with periodic coefficients. — SIAM J. Control, 1964, 12, № 2.
 2. A frequency domain condition for the stability of systems containing a single time-varying nonlinear element. — Bell System Techn. J., 1964, 43.
 3. Some stability results to those of V. M. Popov. — Bell System Techn. J., 1965, 44.

Са то Т. (Sato T.)

1. Non-linear stochastic filters. — Trans. Soc. Instrum. and Control Engrs., 1965, 1, № 1.
2. A sufficient condition of absolute stability of a type of nonlinear stochastic system. — Trans. Soc. Instrum. and Control Engrs., 1966, 2, № 3.
3. Analysis of nonlinear stochastic systems (nonlinear stochastic transformations of random processes, an example). — J. Soc. Instrum. and Control Engrs., 1966, 5, № 3.

Се н А. К. (Sen A. K.)

1. The complex equivalent lain of a memory-type nonlinearity. — IEEE Trans., 1965, AC-10, № 2.

Си г а л о в Г. Г.

1. К анализу нелинейных систем методом уравнений моментов. — Автоматика и телемеханика, 1970, № 6.

Си дер ь я д е с Л. (Sideriades L.)

1. Considerations theoriques a des fins experimentales sur un resonateur serie. — Colloque International du C. N. R. S. sur les vibrations forcees dans les systemes non lineaires. Marseille 1964.

Си мо но в Н. И.

1. Прикладные методы анализа у Эйлера М., Гостехиздат, 1957, 167 с.

Ско в ро н с к и й Я. М. (Skowronski J. M.)

1. A Method of qualitative Analysis of vibrating discrete systems with pronounced non-linearity in the phase space. — Arch. Mechan. Stosowanej, 1958, 10, № 5.

Ско в ро н с к и й Я. М., Зи ем ба С. (Skowronski J. M., Ziemba S.)

1. Some complimentary remarks on the delta method for determining phase trajectories of systems with pronounced non-linearity. — Arch. Mechan. Stosowanej, 1958, 10, № 5.
2. The Problems of vibrations of non-automatic system with strong non-linearity. — Arch. Mechan. Stosowanej, 1958, 10, № 4.
3. Obszar ograniczoneści ruchu silnie nieliniowych nieautonomicznych układów z częściowe ujemnym tłumieniem. — Arch. Automat. i Telemekhaniki, 1962, 7, z. 1—2.

Сла в ин А. А.

1. Анализ автоколебаний в некоторых релейных системах. — Автоматика и телемеханика, 1965, № 10.
2. Об одном виде несимметричных автоколебаний в релейной системе. — Автоматика и телемеханика, 1965, № 11.

Сме т а н и н Н. А.

1. Гармоническая линеаризация звена переменной структуры. — Автоматика и телемеханика, 1965, № 6.

Сми р но ва И. М.

1. К приближенному исследованию условий устойчивости периодических режимов в системах автоматического регулирования. — Автоматика и телемеханика, 1954, № 12.
2. К приближенному исследованию условий устойчивости периодических режимов. — Автоматика и телемеханика, 1955, № 1.
3. Об устойчивости приближенно найденных периодических режимов в системах автоматического регулирования. — В кн.: Тр.

- 2-го Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. Москва, 1953, М.—Л., 1955.
- Смит Г. В. (Smith H. W.)
1. The Applicability of quasilinear method of nonlinear feedback systems with random inputs. — In: Proc. of the Second Internat. Congr. of IFAC. Basel, 1963.
- Солодовников В. В.
1. О применении трапецидальных частотных характеристик к анализу качества систем автоматического регулирования. — Автоматика и телемеханика, 1949, № 5.
- Соколов Н. И.
1. Приближенный аналитический метод вычисления переходных процессов в линейных системах автоматического регулирования. — Тр. Моск. авиац. ин-та, 1957, вып. 75.
 2. Аналитический метод приближенного вычисления переходных процессов в некоторых нелинейных системах автоматического регулирования. — В кн.: Некоторые методы расчета систем автоматического регулирования и их элементов. Под ред. Б. Н. Петрова. Л., 1959.
- Сомервил М. Д., Амертон Д. Д. (Simerville M. J., Amer-ton D. D.)
1. Multigain representation for a single-valued non-linearity with several inputs and evaluations of equivalent gains by accurrсор method. — Proc. IEE, 1958, part C, № 309.
- Старикова М. В.
1. Автоколебания и скользящий режим в системах автоматического регулирования. М., Машгиз, 1962. 195 с.
 2. К определению колебательных процессов и скользящих режимов в автоматических системах с переменной структурой, в которых используются производные в законе переключения. — Автоматика и телемеханика, 1969, № 4.
- Стаут Г. М. (Stout T. M.)
1. A Step-by-step method for transient analysis of feedback systems with one nonlinear element. — Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs., part II, 1957, 75.
- Таката М. (Takata M.)
1. Time-optimal problem of sampled-data control systems of a linear process with saturating manipulated variables. — J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 1965, 9, № 12.
- Такахаси Я., Зиглер Дж. Г., Никольс Н. Б. (Takahashi Y., Ziegler J. G., Nicols H. B.)
1. Process control with a velocity limit. — In: Proc. of First International Congress of IFAC. Moscow, 1960. 1. London, 1961.
- Талер С., Боксер Р. (Thaler S., Boxer R.)
1. An operational calculus for numerical analysis. — IRE National Convention Records, 1956, pt. 2.
- Таль А. А.
1. Задача Вышнеградского в теории прямого регулирования (с учетом саморегулирования объекта и воздействия по производной регулируемого параметра). — Автоматика и телемеханика, 1953, № 5.

Тамура Х. (Tamura H.)

1. Determination of modes of forced oscillations in relay control systems. — J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 1962, 6, № 4.
2. Determination of modes of forced oscillations in second — order relay systems. — J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 1964, 8, № 12.
3. Phase-plane analysis of transient response of second — order relay systems subjected to periodic input. — J. Soc. Instrum. and Control Engrs., 1964, 3, № 10.

Тастин А. (Tustin A.)

1. A Method of analysing effect of certain kinds of nonlinearity in closed-cycle control systems. — J. IEEE, part IIA, 1947, 94, № 1.
2. Effect of backlash and speed-dependent friction on stability of closed-cycle control systems. — J. IEEE, part IIA, 1947, 94, № 1.
3. A method of analysing the behavior of linear systems in terms of time series. A method of analysing the effects of certain kinds of nonlinearity in closed-cycle control systems. — J. IEEE, part IIA, 1947, 94, № 1.

Тафт В. А.

1. Электрические цепи с периодически изменяющимися параметрами и переходные процессы в синхронных машинах. М., Изд-во АН СССР, 1958. 187 с.
2. Об устойчивости периодических режимов в системах автоматического регулирования, найденных приближенно, исходя из гипотезы фильтра. — Автоматика и телемеханика, 1958, № 6.
3. Об анализе устойчивости периодических режимов в нелинейных системах регулирования со многими степенями свободы. — Автоматика и телемеханика, 1959, № 9.

Теворовский В. И.

1. Анализ автоколебаний в релейных системах, содержащих звено с диаметрами, изменяющимися скачком. — Автоматика и телемеханика, 1961, № 10.
2. Периодические режимы в релейных системах, содержащих звено со скачкообразно изменяющимися параметрами. — Изв. АН СССР. ОТН, Энергетика и автоматика, 1962, № 5.
3. Устойчивость периодических режимов в релейной системе, содержащей звено со скачкообразно изменяющимися параметрами. — Техн. кибернетика, 1963, № 2.
4. Об автоколебаниях релейных систем, содержащих звено со скачкообразно изменяющимися параметрами. — Автоматика и телемеханика, 1965, № 11.
5. О влиянии звена с изменяющейся постоянной времени на работу релейного вибрационного регулятора. — Автоматика и телемеханика, 1965, № 12.

Теодорчик К. Ф.

1. Типы движений, управляемых реле сервомеханизмов. — Журн. техн. физики, 1938, 8, № 10.
2. Автоколебательные системы. М.—Л., Гостехиздат, 1944. 104 с.
3. Автоколебательные системы. Изд. 3. М.—Л., Гос. изд. техн.-теорет. лит-ры, 1952. 272 с.

- Тихонов А. Н.
1. О методах регуляризации задач оптимального управления. — Докл. АН СССР, 1965, 162, № 4.
 2. Об устойчивости задач оптимизации функционалов. — Журнал вычислит. матем. и мат. физики, 1966, 6, № 4.
- Тихонов В. И.
1. Воздействие малых флюктуаций на электронное реле. — Вестн. Моск. ун-та, 1956, вып. 5.
 2. Воздействие больших флюктуаций на электронное реле. — Радиотехника и электроника, 1956, 1, вып. 2.
- Тихонов В. И., Амиантов И. Н.
1. Воздействие сигнала и шума на нелинейные элементы (прямой метод). — Радиотехника и электроника, 1957, 2, № 5.
- Токумару Х. (Tokumaru H.)
1. The noninteracting control of linear multivariable systems by relay elements. — Trans. Soc. Instrum. and Control Engrs., 1967, 3, № 3.
- Токумару Х., Имаи М. (Tokumaru H., Imai M.)
1. On the stability of two-variable relay control systems. — J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 1965, 9, № 10.
- Топчиев Ю. И.
1. Обобщенный метод гармонической линеаризации. — В кн.: Современные методы проектирования систем автоматического управления. М., 1967.
 2. Частотный метод анализа качества нелинейных систем. — В кн.: Современные методы проектирования систем автоматического управления. М., 1967.
- Троицкий В. А.
1. Нелинейные задачи колебания динамических систем с конечным числом степеней свободы. Канд. дисс. Ленинградск. политехн. ин-т им. М. И. Калинина, Л., 1952.
 2. О канонических преобразованиях уравнений теории автоматического регулирования — Прикл. матем. и механ., 1953, 17, вып. 1.
- Тупицын А. И.
1. О форме кривой переходного процесса при минимуме интегральной квадратичной погрешности. — Автом. и телемех., № 4, 1953.
- Тэллор Дж., Пестель М.
1. Анализ и расчет нелинейных систем автоматического управления. М., «Энергия», 1964, 488 с.
- Удерман Э. Г.
1. Метод корневого годографа в теории автоматического управления. М. — Л., Госэнергоиздат, 1963, 112 с.
- Урман Е. Л.
1. Применение принципа гармонического баланса для исследования условий синхронизации синхронных машин. — Вестн. электропромышленности, 1957, № 4.
- Уткин В. И.
1. Применение систем автоматического регулирования с переменной структурой для компенсаций возмущений, приложенных к различным точкам объекта. — В кн.: Теория и применение автоматических систем. М., 1964.

2. О компенсации вынужденной составляющей движения в системах с переменной структурой. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1965, № 4.
 3. Квазиинвариантное управление вынужденным движением линейных объектов с переменными параметрами. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1966, № 5.
- Фавар Ж. (Favark J.)
1. Sur les equations differentielles lineaires a coefficients presque periodiques. — Acta math., 1928, 51.
- Факума А., Матсубара М. (Fukuma A., Matsubara M.)
1. Jump Resonance of nonlinear control systems. — Trans. Soc. Instrum. and Control Engrs., 1965, 1, № 4.
- Фальб П. Л., Зеймс Г. (Falb P. L., Zames G.)
1. On cross-correlation bounds and the positivity of certain nonlinear operators. — Trans. IEEE, 1967. AC-12, № 2.
- Фату П. (Fatou P.)
1. Sur le mouvement d'un systeme soumis a des forces a courte periode. — Bull. Soc. math. France, 1928, 56.
- Федоров С. М.
1. Применение показателя колебательности к расчету нелинейных следящих систем. — Изв. АН СССР. ОТН, 1958, № 10.
- Фельдбаум А. А.
1. Интегральные критерии качества регулирования. — Автоматика и телемеханика, 1948, № 1.
 2. Методы исследования переходных процессов в самоустанавливающихся системах. Докт. дисс. М., Ин-т автоматике и телемеханики АН СССР, 1948.
 3. О распределении корней характеристического уравнения систем авт. регулирования. — Автоматика и телемеханика, 1948, № 4.
 4. Косвенные методы исследования переходных процессов в системах автоматического регулирования. — Тр. НИИ МПС, 1949.
 5. Исследование динамики систем автоматического регулирования по методу обобщенного интегрального критерия. — Электричество, 1951, № 7.
 6. Электрические системы автоматического регулирования. М., Оборонгиз, 1954. 786 с.
 7. Простейшие релейные системы автоматического регулирования. — Автоматика и телемеханика, 1949, № 4.
 8. О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства. — Автоматика и телемеханика, 1955, № 2.
- Финдайзен В. (Findeisen W.)
1. Numeryczna metoda analizy i syntezy ukladu automatycznej regulacji w aparacie o odpowiedzi' na wymusznie o ksztalcie skoku jednostkowego. — Zesz. nauk. Politechn. warsz., Elektryka, 1956, 13, № 24.
- Флоке Г. (Floquet G.)
1. Sur les equations differentielles a coefficients periodiques. — Ann. scient. Ecole norm. super., 1883, Ser. 2, 12.
 2. Equations differentielles lineaires a coefficients doublement periodiques. — Ann. scient. Ecole norm. super., Ser. 3. 1884, 1.

- Флюгге-Лотц И. (Flügge-Lotz I.)
1. Über Bewegungen eines Schwingers unter dem Einfluss von Schwarz — Weissregulungen. — Z. angew. Math. und Mech., 1947, 25/27, № 4.
 2. Zusammenfassender Bericht über bewegungen eines schwingers unter dem einfluss von Schwarz-weiss-Steuerungen. — Z. angew. Math. und Mech., 1947, 25/27.
 3. Discontinuous Automatic Control. Princeton, N. Y., Princeton Univ. Press, 1953, 168 p.
 4. Synthesis of third-order contactor-control systems. — In: Proc. of the First International Congress of IFAC. Moscow, 1960. London, 1961.
 5. Discontinuous automatic control. — Appl. Mech. Revs., 1961, 14.
- Флюгге-Лотц И., Вюнш В. С. (Flügge-Lotz I. and Wunch W. S.)
1. On a nonlinear transfer system. — J. Appl. Phys., 1955, 26, № 4.
- Флюгге-Лотц И., Ишикава Т. (Flügge-Lotz I. and Ishikawa T.)
1. Investigation of third-order contactor control systems with two complex poles without zeros. — NASA, 1960, Tech. Note D-428.
 2. Investigation of third-order contactor control systems with zeros in their transfer funster functions. — NASA, 1961, Tech. Note D-719.
 3. Contactor control of third-order systems with zeros in the transfer function of the plant. — Internat. J. Control, 1966, 3, № 2.
- Флюгге-Лотц И., Кашиваги Я. (Flügge-Lotz I. and Kashiwagi Y.)
1. Stability indicative function and its application to systems with time delay. — Ingenieur — Archiv, 1966, 35, № 5.
- Флюгге-Лотц И., Клоттер К. (Flügge-Lotz I. and Klotter K.)
1. Über bewegungen eines schwingers unter dem einfluss von Schwarz-Weiss-Steuerungen: Bewegung eines Schwingers von einem Freiheitsgrad; steuerung mit stellungsuzuordnung ohne Schaltverschiebungen. — Z. für angew. Math. und Mech., 1948, 28.
- Флюгге-Лотц И., Крайг А. (Flügge-Lotz I. and Craig A.)
1. The choice of time for zeroing a disturbance in a minimum-fuel consumption control problem. — Trans. ASME, 1965, Ser. D, 87, № 1.
 2. Investigation of optimal control with a minimum-fuel consumption criterion for a fourth-order plant synthesis of an efficient sub-optimal control. — Trans. ASME, Ser. D, 1965, 87, № 1.
- Флюгге-Лотц И., Линдберг Г. Е. (Flügge-Lotz I. and Lindberg H. E.)
1. On the design and comparison of contactor control systems. — IRE Wescon Convention Rec., 1957, 1.
 2. Studies of second and third order contactor control systems. — NASA 1959, Tech. Note D-107.
- Флюгге-Лотц И., Мальц М. Д. (Flügge-Lotz I. and Maltz M. D.)
1. Attitude stabilization using a contactor control system with a linear switching criterion. — Automatica, 1965, 2, № 4.
- Флюгге-Лотц И., Марбах Г. (Flügge-Lotz I. and Marbach H.)
1. The optimal control of some attitude control systems for different performance criteria. — Trans. ASME, Ser. D, 1963, 83.

- Флюгге-Лотц И., Ми-Инь (Flügge-Lotz I. and Mih Yin)
1. The optimum response of second order, velocity-controlled systems with contactor control. — Trans. ASME, Ser. D, 1961, **83**, № 1.
- Флюгге-Лотц И., Тейлор К. Ф. (Flügge-Lotz I. and Taylor C. F.)
1. Synthesis of a nonlinear control system. — Trans. IRE, 1956, PGAC-1, № 2.
 2. Investigation of a nonlinear control system. — NASA, 1958, TR. — 1391.
- Флюгге-Лотц И., Титус Г. (Flügge-Lotz I. and Titus H.)
1. The Optimum response of full Third-order systems with contactor control. — Trans. ASME. Ser. D, 1962, **84**.
 2. Optimum and quasioptimum control of third- and fourth-order systems, automatic and remote control. — In: Proc. of the Second Congress of the IFAC. Besel, 1963.
- Фогель Т. (Vogel T.)
1. Sur certains oscillations a deferlement. — Ann. Telecommun., 1951, **6**, № 7.
 2. Topologie des oscillations a deferlement. — In: Actes du Colloque international des vibrations non lineaires, Ile de Porquerrolles, 1951. Paris, 1953.
 3. Sur les systemes deferlants. — Bull. Soc. math. France, 1953, **81**, fasc. 1.
 4. Systemes dynamiques hereditaires a deferlement. — Rend. Semin. mat. Univ. Padova, 1953, **22**.
 5. Sur des systemes dynamiques a heredite non lineaire et a memoire totale. — C. r. Acad. Sci. 1937, **245**, p. 1224—1226.
 6. Heredite discontinue dans les systemes dynamiques. — C. r. Acad. Sci. 1958, **246**, p. 1379—1381.
 7. Systemes dynamiques a heredite non lineaire et a memoire totale. — C. r. Acad. Sci., 1958, **246**, p. 59—61.
 8. Systemes dynamiques hereditaires. — Cahiers phys. 1959, № 107—108.
 9. Dynamique theorique et heredite. — Rend. Semin. mat. Univ. e Politecn. Torino, 1961—1962, **21**.
 10. Solutions periodiques des systemes hereditaires. — Proc. Vibration Probl. 1962, **3**, № 1.
 11. Systemes deferlants, systemes hereditaires, systemes dynamiques. — Тр. Международного симпозиума по нелинейным колебаниям. Киев, 1961. 2. Киев, 1963.
 12. Theorie des systemes perissables: application a la fatigue des metaux. — J. Mech., 1963, **2**, № 4.
 13. Sur differentes classes de systemes evolutifs. — Bul. Inst. Politehnic Din Iasi. Ser. Nuoa, 1964, **10**, fasc. 3—4.
 14. Systemes a retard. — In: Actes du colloque international du C. N. R. S. sur les vibrations forcees dans les systemes non lineaires. Marseille, 1964.
- Фоп Р. (Faure R.)
1. Sur l'existence de certaine solutions periodiques et methode de Leray — Schauder: excitation parametrique et equations differen-

tielles auf differences. — In: Actes du colloque International du C. N. R. S. sur les vibrations forcees dans les systemes non lineaires. Marseille, 1964.

Ф р а н к М. Л.

1. Графические методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Л.—М., Гос. техн.-теоретич. изд., 1933, 50 с.

Ф у д ж и и К., Ш о д ж и К. (Fujii K., Shoji K.)

1. On the applications of the Popov criterion (General characteristics of the popov locus). — J. Soc. of Instrum. and Control Engrs., 1966, 5, № 10.

Ф у ф а е в Н. А.

1. К теории электромагнитного прерывателя. — Автоматика и телемеханика, 1954, № 5.

2. К теории вибрационного звена, работающего на принципе электромагнитного прерывателя. — В кн.: Тр. Второго всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, Москва 1953. I. М. — Л., 1955.

3. Теория электромагнитного прерывателя. В кн.: Памяти А. А. Андропова. М., 1955.

Х а а г Ж. (Haag J.)

1. Sur les oscillations auto-entretenues. — C. r. Acad. Sci. 1934, 199, p. 906.

2. Sur l'etude asymptotique des oscillations de relaxation. — C. r. Acad. Sci., 1936, 292, p. 102.

3. Etude asymptotique des oscillations de relaxation. — Ann. scient. Ecole norm. super., 1943, 60.

4. Exemples concrets d'etude asymptotique d'oscillation de relaxation. — Ann. scient. Ecole norm. super., 1944, 61.

5. Sur la stabilite des solutions de certains systemes d'equations differentielles. — Bull. Soc. math. France, 1946, 70.

6. Sur certains systemes d'equations differentielles a solutions periodiques. — Bull. Soc. math. France, 1946, 70.

7. Sur la synchronisation des systemes a plusieurs degres de liberte. — Ann. scient. Ecole norm. super., 1947, 64.

8. Sur certains systemes d'equations differentielles definies par des fonctions periodiques et discontinues. — Bull. Soc. math. France, 1947, 71.

9. Sur l'existence et la stabilite des solutions periodiques de certains systemes differentielles. — Ann. scient. Ecole norm. super. Ser. 3, 1948, 65.

10. Sur l'approximation des solutions associees d'un systeme differentiel a coefficients periodiques. — Bull. Soc. math. France, 1948, 72.

11. Sur la stabilite des points invariants d'une transformation. — Bull. Soc. math. France, 1949, 73.

12. Sur la synchronisation des systemes oscillants non lineaires. — Ann. scient. Ecole norm. super., 1950, 67.

13. Cols, Noeuds et Foyers. — Bull. Soc. math. France, 1950, 74.

14. Sur la synchronisation d'un oscillateur par une force sinusoidale independante de la vitesse. — C. r. Acad. Sci., 1951, 233, p. 117—118.

15. Sur certains systemes a solution periodique lentement variable. — Bull. Soc. math. France, 1951, **75**.
 16. A propos de l'equation de Mathieu. — C. r. Acad. Sci., 1951, **232**, p. 661—663.
- Хааг Ж., Шалле Р. (Haag J., Chaleat R.)
1. Problemes de theorie generale des oscillations et de chronometrie. Paris, Gauthier — Villars, 1960.
- Хабаров В. С.
1. К вопросу построения частотных характеристик одного класса САР с переменной структурой. — Автоматика и телемеханика, 1965, № 8.
- Хазен Г. Л. (Hazen H. L.)
1. Theory of servomechanisms. — J. Franklin Inst., 1934, **218**, № 5.
- Халанай А. (Halanay A.)
1. Theoria calitativa a ecuatiilor differentiale. Bucuresti, Acad. RPR, 1963. 482 p.
- Хан В. (Hahn W.)
1. Über die Anwendung der methode von Lyapunov auf Differenzgleichungen. — Math. Ann. 1958, **136**.
 2. Theorie und Anwendung der directen methode von Liapunov. Berlin, Springer, 1959. 142 p.
- Харкевич А. А.
1. О специальной частотной характеристике для оценки искажений формы кривой. — Ж. техн. физики, 1936, **6**, вып. 9.
- Хата С., Шибата Х. (Hata S., Schibata H.)
1. A Statistical linearization technique for backlash characteristic. — J. Inst. Electr. Engrs. Japan, 1966, **86**, № 933.
 2. Further consideration for the statistical linearization technique of backlash. — J. Inst. Electr. Engrs., Japan, 1967, **87**, № 949.
- Хаяси Ч. (Hayashi C.)
1. Quasi-periodic oscillations in non-linear control systems. — In: Proc. of the First International congress of IFAC. Moscow, 1960. **2**, London, 1961.
 2. Summed and differential harmonic oscillations in the vibratory system with non-linear restoring force of the Third order. — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1966, **32**, № 234.
- Хаяси С., Мизуками К. (Hayashi S., Mizukami K.)
1. An Analysis of non-linear sampled-data feed-back control systems. — J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 1963, **7**, № 2.
 2. Approximate Solution of Mathieu's differential equation. — J. Inst. Electr. Engrs. Japan, 1966, **931**.
- Хиггинс Т. Дж. (Higgins T. J.)
1. A Resume of the development and literature of nonlinear control system theory. N. Y. 1956. 5 с.
 2. A Resume of the development and literature of nonlinear control system theory. — ASME, paper № 56-IRD-4.
- Хизамура Т. (Hisamura T.)
1. Self-excited oscillation of relay-type sampled-data feedback control system. — J. Soc. Instrum. and Control Engrs., 1962, **1**, № 2.

2. Compensation of on-off sampled-data control systems based on steady state response. — *Trans. Soc. Instrum. and Control Engrs.*, 1965, **1**, № 3.
- Хираи К., Кувахара М. (Hirai K., Kuwahara M.)
1. Forced oscillation in servomechanism with coulomb friction. — *J. Inst. Electr. Engrs., Japan.* 1961, **81**, № 878.
 2. Oscillations in relay servomechanisms with backlash. — *J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs.* 1963, **7**, № 1.
- Хлыпало Е. И.
1. Приближенное исследование переходных процессов в нелинейных системах второго порядка. — *Изв. АН СССР, ОТН*, 1958, № 10.
 2. Нелинейные системы автоматического управления. Л., «Энергия», 1967. 451 с.
- Холл А. К. (Holl A. K.)
1. The Analysis and synthesis of linear servomechanisms. Cambridge, 1943.
- Хопкин А. М. (Hopkin A. M.)
1. A Phaseplane approach to the compensation hage of saturating servomechanisms. — *Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs.*, 1951, **70**, part 1.
- Хухриков С. С.
1. Приближенный численный метод расчета переходных процессов в линейных и нелинейных системах, М., Оборонгиз, 1957. 50 с.
- Цыпкин Я. З.
1. Степень устойчивости систем с запаздыванием обратной связью. — *Автоматика и телемеханика*, 1947, № 2.
 2. Устойчивость и автоколебания в релейных системах автоматического регулирования. — *Тр. ЛКВВИА*, 1950, вып. 32.
 3. Переходные и установившиеся процессы в импульсных цепях. М. — Л., Госэнергоиздат. 220 с.
 4. Вынужденные колебания в релейных системах автоматического регулирования. — *Автоматика и телемеханика*, 1952, № 5.
 5. Об устойчивости периодических режимов в релейных системах автоматического регулирования. — *Автоматика и телемеханика*, 1953, № 5.
 6. Частотный метод анализа автоколебаний и вынужденных колебаний в релейных системах автоматического регулирования. — В кн.: *Основы автоматического регулирования. Теория*. М., 1954.
 7. Исследование влияния параметров нелинейных систем автоматического регулирования на устойчивость и автоколебания. — *Тр. ВЗЭИ*, 1954, вып. 3.
 8. Теория релейных систем автоматического регулирования. М., Гостехиздат, 1955. 456 с.
 9. Частотный метод исследования периодических режимов релейных систем автоматического регулирования. — В кн.: *Памяти А. А. Андропова*. М., 1955.
 10. К теории релейных систем автоматического регулирования. — В кн.: *Тр. 2-го Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования*. Москва, 1953. М. — Л., 1955.

11. Частотный метод исследования периодических режимов релейных систем автоматического регулирования. — В кн.: Памяти А. А. Андропова. М., 1955.
 12. Стабилизация релейных систем автоматического регулирования. — В кн.: Тр. Международного симпозиума по проблемам автоматики. Милан, 1956. Рим, 1956.
 13. Переходные процессы в нелинейных системах автоматического регулирования. — В кн.: Проблемы теорий нелинейных систем автоматического регулирования и управления. М., 1957.
 14. Теория импульсных систем. М., Физматгиз, 1958. 724 с.
 15. Частотные характеристики релейных следящих систем. — Автоматика и телемеханика, 1959, № 12.
 16. Об устойчивости в целом нелинейных импульсных автоматических систем. — ДАН СССР, 1962, 145, № 1.
 17. О некоторых свойствах абсолютно устойчивых нелинейных импульсных автоматических систем. — Автоматика и телемеханика, 1962, № 12.
 18. Об устойчивости релейных автоматических систем в большом. — Изв. АН СССР. ОТН, Техн. кибернетика, 1963, № 3.
 19. Об устойчивости процессов в нелинейных импульсных автоматических системах. — ДАН СССР, 1963, 152, № 2.
- Цыпкин Я. З., Бромберг П. В.
1. О степени устойчивости линейных систем. — Изв. АН СССР. ОТН, 1945, № 12.
- Цыпкин Я. З., Гольденберг Л. М.
1. Построение переходного процесса в системах автоматического регулирования по характеристикам их отдельных звеньев. — Тр. ВЗЭИ, 1955, № 7.
- Цыпкин Я. З., Пышкин И. В.
1. К теории импульсных автоматических систем с конечным временем съема данных. — Изв. АН СССР. ОТН, Энергетика и автоматика, 1961, № 5.
- Чанг К., Казда Л. Ф. (Chuang K., Kazda L. F.)
1. A Study on nonlinear systems with random inputs. — Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs., 1959, part II, 78, № 42.
- Чезари Л. (Cesari L.)
1. Asymptotic behaviour and stability problems in ordinary differential equations. Berlin, Springer, 1959. 271 p.
- Черников С. А.
1. Исследование нелинейных свойств микроскопических систем методом гармонической линеаризации. — Изв. высш. учебн. заведений. Приборостроение, 1963, № 4.
 2. К исследованию нелинейных систем автоматического управления при внешнем воздействии. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1964, № 3.
 3. Устойчивость и автоколебания неравножестких микроскопических систем при внешнем воздействии. — Изв. высш. учебн. заведений. Приборостроение, 1965, № 2.

Честнат Г. Р. (Chestnut H. R.)

1. Obtaining attenuation — frequency characteristics for servomechanisms. — Gen. Electr. Rev., 1947, 50, № 12.

Честнат Г. Р., Майер Р. В. (Chestnut H. R., Mayer R. W.)

1. Servomechanisms and regulating system design. I. New York, Wiley, 1951. 505 p.

Четаев Н. Г.

1. О наименьшем характеристическом числе. — Прикл. матем. и механ., 1945, 9, № 3.
2. Об устойчивости движения. — Изв. АН СССР. ОТН, 1945, № 6.
3. Устойчивость движения. М. — Л., Гостехиздат, 1946. 204 с.
4. О выборе параметров устойчивости механической системы. — Прикл. матем. и механ., 1951, 15, вып. 3.

Чоудхари А. К., Бозу М. С., Махаланобис А. К. (Choudhury A. K., Bosu M. S., Mahalanobis A. K.)

1. Transfer function analyzer for linear and nonlinear components. — Electronic Engng., 1961, 33, № 400.

Шалле Р. (Chaleat R.)

1. Troisieme approximation de la perturbation d'amplitude des oscillateurs. — C. r. Acad. Sci., 1963, 256, p. 1908.
2. Troisieme approximation de la periode d'un oscillateur non lineaire. — C. r. Acad. Sci., 1963, 256, p. 3575.
3. Les trois premieres approximations de la theorie des perturbations et leurs applications. — In: Proc. 11 International congress for applied mechanics. Munich, 1964. Berlin, 1966.
4. Sur l'equation de Lord Raleigh. — In: colloque international du C. N. R. S. sur les vibrations forcees dans les systemes non lineaires. Marseille, 1964.

Шен Д. (Chen D. W. C.)

1. Non-linear amplitude-sensitive control systems with stochastic inputs. — IRE WESCON Convention Record, 1957, part 4.

Шен К. Н., Миллер Г. А., Никольс Н. Б. (Chen C. N. I., Miller H. A., Nickols N. B.)

1. Nonlinear integral compensation of a velocity-lag servomechanism with backlash. — Trans. ASME, 1957, 79, № 3.

Шиллак Д. Д. (Siljak D. D.)

1. Nonlinear systems. The Parameter Analysis and Design. N. Y. Wiley, 1969. 618 p.

Шиманов С. Н.

1. К теории колебаний квазилейных систем с постоянным запаздыванием. — Автоматика и телемеханика, 1960, № 6.

Шимемура Е., Йошида Я. (Chimemura E., Yoshida Y.)

1. Self-oscillations in a control system with dead time and unsymmetrical saturation. — J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 1963, 7, № 5.

Шимитцу Т. (Shimizu T.)

1. The Solutions of the nonlinear differential equations by the numerical calculation method in the phase plane. — J. Inst. Electr. Engrs., Japan, 1960, 80.

- Шимого Т. (Chimogo T.)
1. Nonlinear vibrations of systems under random loading. — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1962, 28, № 188.
 2. Unsymmetrical nonlinear vibration systems under random loading. — Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1962, 28, № 188.
- Шлитт Г. (Schlitt H.)
1. Ein kompensationsverfahren zur Messung von Beschreibenfunctionen. — Regelungstechnik, 1966, H. 7.
- Шомло Я. (Somlo J.)
1. Egyenes szakaszokkal közelített histerézis hurok típusu nemlinearitasok leiro függvényei. — In: Automatizalasi kollokvium. Budapest, 1963.
 2. Szakaszosan linearis nemlinearitasok harmonikus analizise, I; II. — Meres es Automatika, 1964, 12; 1965, 13.
 3. Nemlinearitas meghatarozasa leiro függvenegéböl MTA. — Automatizalasi Kut. Inst., 1965, № 6.
 4. Altalanos leiro, függvény meghatarozasi modszer. — Meres es Automatika, 1965, 13, № 9.
 5. Описывающие функции нелинейностей с кусочно-линейной характеристикой. — Acta Technica, 1966, 54, fasc. 3—4.
 6. Обобщенный метод для исследования систем с кусочно-линейными характеристиками I. Гармонический анализ кусочно-линейных характеристик. — Автоматика и телемеханика, 1966, № 7.
 7. Некоторые сообщения в области частотных методов анализа и синтеза нелинейных автоматических систем. Канд. дисс. Моск. энергет. ин-т. М., 1968.
- Шпилецкий Я. (Szpilecki J.)
1. Oscylacje relaksacyjne w ukladach nieliniowych, opisanych przez parametry, które sa wielkościami stochastycznymi. — Arch. Automat. i Telemechaniki, 1958, 3, z. 4.
- Шринас М. Д. (Srinath M. D.)
1. Describing Function for non-linearities with dual inputs. — Trans. IEEE, 1964, AC-9, № 1.
- Штейн В. А. (Stein W. A.)
1. Analysing a nonlinear transient response by the phase plane method AIEE. — Application and Industry, 1960, Sept.
- Шулкин П. (Szulkin P.)
1. Analiza stabilności ukladu regulacji ze wzmacniaczem o petlowej charakterystyce. — Arch. Automat. i Telemechaniki 1960, 5, z. 3.
- Эйдиоров Р. М.
1. К оценке времени переходных процессов в системах автоматического регулирования с перем. структурой. — Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1965, № 5.
- Якубович В. А.
1. Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования. — ДАН СССР, 1962, 143, № 6.
 2. Частотные условия абсолютной устойчивости регулируемых систем с гистерезисными нелинейностями. — ДАН СССР, 1963, 149, № 2.

3. Абсолютная устойчивость импульсных систем с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками. I. — Автоматика и телемеханика, 1967, № 9.
 4. Абсолютная устойчивость импульсных систем с несколькими нелинейными нестационарными или линейными нестационарными блоками. II. — Автоматика и телемеханика, 1968, № 2.
 5. Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем критических случаев. II. — Автоматика и телемеханика, 1963, № 3.
 6. Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем в критических случаях. II. — Автоматика и телемеханика, 1963, № 6.
 7. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. II. Абсолютная устойчивость вынужденных колебаний. — Автоматика и телемеханика. 1964, № 7.
 8. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. III. Абсолютная устойчивость в классе нелинейностей с условием на производную. — Автоматика и телемеханика, 1965, № 9.
 9. Частотные условия существования абсолютно устойчивых периодических и почти периодических предельных режимов систем автоматического регулирования со многими нестационарными нелинейностями. — В кн.: Докл. на 3-м Международном конгрессе ИФАК. Лондон, 1966.
 10. Решенные и нерешенные математические задачи нелинейной теории регулирования. — В кн.: Докл. на математическом конгрессе. Москва, 1966.
 11. Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками. — Автоматика и телемеханика, 1967, № 6.
- Ямагучи Д. (Yamaguchi J.)
1. On the subharmonic oscillation of the relay servomechanism. — In: Proc. of the First Internat. Congr. of IFAC. Moscow, 1960. I. London, 1961.
 2. Computational aids for dynamic characteristics of feedback compensated on-off type controllers. — J. Soc. Instrum. and Control Engrs., 1963, 2, № 6.
 3. Design method of on-off type controllers (for controlled object with a static behavior). — J. Soc. Instrum. and Control Engrs., 1964, 3, № 10.
 4. Design method of on-off type controllers (controlled objects with static behavior). — J. Soc. Instrum. and Control Engrs., 1964, 3, № 7.
- Ямагучи К., Изава К. (Yamaguchi K., Izawa K.)
1. Improvement of on-off type control systems. — J. Soc. Instrum. and Control Engrs., 1964, 3, № 7.
- Ямада М. (Yamada M.)
1. Optimum control for 0-type system with a saturated element. — J. Japan. Assoc. Automat. Control Engrs., 1961, 5, № 3.
 2. Analysis for an improvement of performance of a servo-system with saturation. — J. Inst. Electr. Engrs., Japan, 1963, 83, № 899.

Ямамото Т. (Yamamoto T.)

1. Summed and differential harmonic oscillation in nonlinear vibratory systems. (Systems with Unsymmetrical Nonlinearity).— Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1961, 27, № 173.
2. On the vibrations of the shaft carrying an unsymmetrical rotating body. (On the response curves at the major critical speeds).— Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1962, 28, № 194.

Ямамото Т., Накао Я. (Yamamoto T., Nakao Y.)

1. Combination tones of summed type in nonlinear vibratory systems.— Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1963, 29, № 197.

Ямамото Т., Ота Х. (Yamamoto T., Ota H.)

1. Unstable vibrations of the shaft carrying an unsymmetrical rotating body. (Vibrations induced by flexibility of bearing pedestals).— Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1962, 28, № 194.
2. On the dynamically unstable vibrations of the shaft carrying an unsymmetrical rotating body.— Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1964, 30, № 209.

Ямамото Т., Сайто А. (Yamamoto T., Saito A.)

1. On the oscillations of summed and differential types under the parametric excitation.— Bull. Japan Soc. Mech. Engrs., 1967, 11, № 43.

Ямамото Т., Хаяси С. (Yamamoto T., Hayashi S.)

1. On the response curves and the stability of summed and differential harmonic oscillations.— Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1962, 28, № 194.
2. Combination tones of differential type in nonlinear Vibratory systems.— Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1964, 30, № 209.

Ямашита С. (Yamashita S.)

1. A Contribution to flow controls making use of an on-off element.— J. Japan Assoc. Automat. Control Engrs., 1963, 7, № 3.

Яроминек В. Ф.

1. О запасе устойчивости линейных систем автоматического регулирования.— Изв. высш. учебн. заведений, 1959, № 8.
 2. Об одном случае нахождения минимума квадратичной интегральной оценки. Изв. высш. учебн. заведений. Электромеханика, 1959, № 12.
 3. Исследование линейных систем автоматического регулирования при помощи показателей запаса устойчивости по определителям.— В кн.: Тр. 1-го Международного конгресса ИФАК. I. М., 1961.
-

